

Highest weight modules over affine Lie algebras

広島大学理学部 谷崎俊之 (Toshiyuki TANISAKI)

1 問題の説明

\mathfrak{g} を対称化可能な \mathbb{C} 上の Kac-Moody リー代数, \mathfrak{h} をその Cartan 部分代数とする. Δ をそのルート系とし, Δ^+ を正ルートの集合, Π を単純ルートの集合とする. また正の実ルートおよび正の虚ルートの集合をそれぞれ Δ_{re}^+ , Δ_{im}^+ で表す. \mathfrak{h}^* 上の標準的な非退化対称双一次形式を $(,): \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ とし, 実ルート α に対応する余ルートを $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$ で定める. W をワイル群とする. \mathfrak{g} の部分リー代数 $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^-, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}^-$ を

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} &= \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha, & \mathfrak{n}^- &= \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \\ \mathfrak{b} &= \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}, & \mathfrak{b}^- &= \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^- \end{aligned}$$

で定める. ただし \mathfrak{g}_α は $\alpha \in \Delta$ に対応するルート空間である.

\mathfrak{h} 加群 M と $\mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$M_\mu = \{m \in M \mid hm = \mu(h)m \ (h \in \mathfrak{h})\}.$$

とおく. また \mathfrak{h} 加群 M であって

$$\begin{aligned} M &= \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} M_\mu, \\ \dim M_\mu &< \infty \text{ for any } \mu \in \mathfrak{h}^* \end{aligned}$$

を満たすものに対して, その指標を

$$\text{ch}(M) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} (\dim M_\mu) e^\mu.$$

で定める.

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して \mathfrak{g} 加群 $M(\lambda), L(\lambda)$ を

$$\begin{aligned} M(\lambda) &:= U(\mathfrak{g}) / \left(\sum_{h \in \mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h - \lambda(h)) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{n} \right), \\ L(\lambda) &:= M(\lambda) / (\text{極大真部分加群}) \end{aligned}$$

により定める。
このとき

$$\begin{aligned} \text{ch}(M(\lambda)) &= \frac{e^\lambda}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}} \\ &= e^\lambda \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots)^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}. \end{aligned}$$

が成り立つ。ただしシンボル e^ξ は $e^{\xi_1} e^{\xi_2} = e^{\xi_1 + \xi_2}$ を満たすものとする。

問題 1.1. 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\text{ch}(L(\lambda))$ を決定せよ。

$\rho \in \mathfrak{h}^*$ を、任意の $\alpha \in \Pi$ に対して $(\rho, \alpha^\vee) = 1$ を満たすものとし、ワイル群 W の \mathfrak{h}^* への新たな作用を

$$w \circ \mu = w(\mu + \rho) - \rho \quad (w \in W, \mu \in \mathfrak{h}^*).$$

で定める。 $\ell: W \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を長さ関数とすると、次が成り立つ。

定理 1.2 (Weyl-Kac). $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ であって

$$(\lambda + \rho, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}_{>0} \quad (\alpha \in \Delta_{\text{re}}^+)$$

を満たすものに対して、次が成立する。

$$\text{ch}(L(\lambda)) = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \text{ch}(M(w \circ \lambda)).$$

$M(\lambda)$ の任意の既約部分商は、ある μ に対する $L(\mu)$ と同型であることが知られており、 $M(\lambda)$ における $L(\mu)$ の重複度を $[M(\lambda) : L(\mu)]$ で表すとき、

$$(1) \quad \text{ch}(M(\lambda)) = \sum_{\mu} [M(\lambda) : L(\mu)] \text{ch}(L(\mu)),$$

が成り立つ。もしも任意の $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して $[M(\lambda) : L(\mu)]$ が分かれば、 $\text{ch}(L(\mu))$ に関する一次方程式(1)を解くことにより

$$(2) \quad \text{ch}(L(\mu)) = \sum_{\lambda} a(\mu, \lambda) \text{ch}(M(\lambda)) \quad (a(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z})$$

の形の表示が得られる。従って問題 1.1 は次の問題と同値な問題である：

問題 1.3. 任意の $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して $[M(\lambda) : L(\mu)]$ を決定せよ。

2 有限次元単純リー代数の場合

この節では $\dim \mathfrak{g} < \infty$ の場合に知られていることを述べる. P を整ウエイトの集合, すなわち

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z} \text{ for any } \alpha \in \Delta^+\}$$

とし,

$$P_{\text{reg}} = \{\lambda \in P \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) \neq 0 \text{ for any } \alpha \in \Delta^+\},$$

$$P^+ = \{\lambda \in P \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) > 0 \text{ for any } \alpha \in \Delta^+\},$$

$$P^- = \{\lambda \in P \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) < 0 \text{ for any } \alpha \in \Delta^+\}.$$

とおく. このとき

$$P_{\text{reg}} = W \circ P^+ = W \circ P^-, \quad w_0 \circ P^+ = P^-,$$

が成り立つ. ただし w_0 は W の最長元である.

定理 2.1. (Kazhdan-Lusztig 予想 [13], Brylinski-柏原 [2], Beilinson-Bernstein [1])

(i) 任意の $\lambda \in P^+$ に対して

$$\text{ch}(L(w \circ \lambda)) = \sum_{y \geq w} (-1)^{\ell(y) - \ell(w)} Q_{w,y}(1) \text{ch}(M(y \circ \lambda)).$$

(ii) 任意の $\lambda \in P^-$ に対して

$$\text{ch}(L(w \circ \lambda)) = \sum_{y \leq w} (-1)^{\ell(w) - \ell(y)} P_{y,w}(1) \text{ch}(M(y \circ \lambda)).$$

ただしここで $\geq, P_{y,w}(q), Q_{y,w}(q)$ はそれぞれ, Bruhat 順序, Kazhdan-Lusztig 多項式, 逆 Kazhdan-Lusztig 多項式を表す.

なお公式 $Q_{w,y}(q) = P_{yw_0, ww_0}(q)$ により, 定理の (i) と (ii) は同値な命題であることに注意しておく.

念のため (逆) Kazhdan-Lusztig 多項式の定義を復習しておこう. Coxeter 系 (W, S) に対して $H(W)$ をその Hecke 代数とする. $H(W)$ は $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 代数で, $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群としての自由基底 $\{T_w\}_{w \in W}$ を持ち, その積は

$$\begin{aligned} T_{w_1} T_{w_2} &= T_{w_1 w_2} \quad \text{if } \ell(w_1 w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2), \\ (T_s + 1)(T_s - q) &= 0 \quad \text{for } s \in S. \end{aligned}$$

により定まる (はじめの条件により $T_e = 1$ である).

定理 2.2 (Kazhdan-Lusztig [13]). 任意の $w \in W$ に対して $C_w \in H(W)$ であって

$$C_w = \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q) T_y = q^{-\ell(w)} \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q^{-1}) T_y^{-1}$$

with

$$\begin{aligned} P_{y,w}(q) &\in \mathbb{Z}[q], \\ P_{w,w}(q) &= 1, \\ \deg P_{y,w}(q) &\leq \frac{\ell(w) - \ell(y) - 1}{2} \quad \text{for } y < w \end{aligned}$$

を満たすものがただ一つ存在する.

また $w \leq y$ のとき $Q_{w,y}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ を

$$\sum_{w \leq y \leq z} (-1)^{\ell(w) - \ell(y)} Q_{w,y}(q) P_{y,z}(q) = \delta_{w,z}$$

により定める.

命題 2.3 (Kazhdan-Lusztig [13]).

$$|W| < \infty \Rightarrow Q_{w,y}(q) = P_{yw_0, ww_0}(q).$$

ただし w_0 は W の最長元とする.

最高ウェイトが整ウェイトでない一般の場合には、話はもう少し複雑になる。それを述べるために記号を用意する。

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\begin{aligned} \Delta^+(\lambda) &= \{\alpha \in \Delta^+ \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}\}, \\ \Pi(\lambda) &= \{\alpha \in \Delta^+(\lambda) \mid s_\alpha(\Delta^+(\lambda)) \cap (-\Delta(\lambda)) = \{-\alpha\}\}, \\ W(\lambda) &= \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta^+(\lambda) \rangle \subset W, \\ S(\lambda) &= \{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi(\lambda)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_0^+(\lambda) &= \{\alpha \in \Delta^+(\lambda) \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) = 0\}, \\ \Pi_0(\lambda) &= \{\alpha \in \Delta_0^+(\lambda) \mid s_\alpha(\Delta_0^+(\lambda)) \cap (-\Delta_0(\lambda)) = \{-\alpha\}\}, \\ W_0(\lambda) &= \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta_0^+(\lambda) \rangle \subset W(\lambda), \\ S_0(\lambda) &= \{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi_0(\lambda)\}. \end{aligned}$$

とおく. このとき $(W(\lambda), S(\lambda))$ および $(W_0(\lambda), S_0(\lambda))$ は Coxeter 系になる. Coxeter 系 $(W(\lambda), S(\lambda))$ の Bruhat 順序, 長さ関数, Kazhdan-Lusztig 多項式, 逆 Kazhdan-Lusztig 多項式を, それぞれ $\leq_\lambda, \ell_\lambda, P_{y,w}^\lambda(q), Q_{y,w}^\lambda(q)$ で表す. C^+, C^- を

$$C^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) \geq 0 \text{ for any } \alpha \in \Delta^+(\lambda)\},$$

$$C^- = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) \leq 0 \text{ for any } \alpha \in \Delta^+(\lambda)\}.$$

で定めるとき,

$$\mathfrak{h}^* = \bigsqcup_{\lambda \in C^+} W(\lambda) \circ \lambda = \bigsqcup_{\lambda \in C^-} W(\lambda) \circ \lambda.$$

が成り立つ.

定理 2.4. (i) $\lambda \in C^+$ とする. $w \in W(\lambda)$ が $wW_0(\lambda)$ の最長元ならば,

$$\text{ch}(L(w \circ \lambda)) = \sum_{y \geq_\lambda w} (-1)^{\ell_\lambda(y) - \ell_\lambda(w)} Q_{w,y}^\lambda(1) \text{ch}(M(y \circ \lambda)).$$

が成立する. (ii) $\lambda \in C^-$ とする. $w \in W(\lambda)$ が $wW_0(\lambda)$ の最短元ならば,

$$\text{ch}(L(w \circ \lambda)) = \sum_{y \leq_\lambda w} (-1)^{\ell_\lambda(w) - \ell_\lambda(y)} P_{y,w}^\lambda(1) \text{ch}(M(y \circ \lambda)).$$

が成立する.

この場合にも先ほどと同様に (i) と (ii) は同値な命題である. Jantzen [5] の結果により, 証明は λ が有理ウェイトの場合に帰着する. また有理ウェイトの場合には, Beilinson-Bernstein の結果 (未発表) と Lusztig [14] の結果から上の定理が従う.

3 無限次元 Kac-Moody リー代数の場合

以下 \mathfrak{g} は一般の対称化可能 Kac-Moody リー代数とする.

有限次元の場合と同様に $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\begin{aligned} \Delta^+(\lambda) &= \{\alpha \in \Delta_{\text{re}}^+ \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}\}, \\ \Pi(\lambda) &= \{\alpha \in \Delta^+(\lambda) \mid \alpha(\Delta^+(\lambda)) \cap (-\Delta(\lambda)) = \{-\alpha\}\}, \\ W(\lambda) &= \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta^+(\lambda) \rangle \subset W, \\ S(\lambda) &= \{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi(\lambda)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_0^+(\lambda) &= \{\alpha \in \Delta^+(\lambda) \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) = 0\}, \\ \Pi_0(\lambda) &= \{\alpha \in \Delta_0^+(\lambda) \mid s_\alpha(\Delta_0^+(\lambda)) \cap (-\Delta_0(\lambda)) = \{-\alpha\}\}, \\ W_0(\lambda) &= \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta_0^+(\lambda) \rangle \subset W(\lambda), \\ S_0(\lambda) &= \{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi_0(\lambda)\} \end{aligned}$$

とおく. $(W(\lambda), S(\lambda))$ および $(W_0(\lambda), S_0(\lambda))$ は Coxeter 系になる. $\leq_\lambda, \ell_\lambda, P_{y,w}^\lambda(q), Q_{y,w}^\lambda(q)$ をそれぞれ Coxeter 系 $(W(\lambda), S(\lambda))$ の Bruhat 順序, 長さ関数, Kazhdan-Lusztig 多項式, 逆 Kazhdan-Lusztig 多項式とする.

C^+, C^- を

$$\begin{aligned} C^+ &= \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) \geq 0 \text{ for any } \alpha \in \Delta^+(\lambda), \\ &\quad (\lambda + \rho, \alpha) \notin 2(\alpha, \alpha)\mathbb{Z} \text{ for any } \alpha \in \Delta_{\text{im}}^+\}, \\ C^- &= \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) \leq 0 \text{ for any } \alpha \in \Delta^+(\lambda), \\ &\quad (\lambda + \rho, \alpha) \notin 2(\alpha, \alpha)\mathbb{Z} \text{ for any } \alpha \in \Delta_{\text{im}}^+\}. \end{aligned}$$

により定めるとき, (\mathfrak{g} が有限次元でなければ)

$$\mathfrak{h}^* \supsetneq \bigsqcup_{\lambda \in C^+} W(\lambda) \circ \lambda \neq \bigsqcup_{\lambda \in C^-} W(\lambda) \circ \lambda \subsetneq \mathfrak{h}^*$$

が成り立つ. さらに $C_{\text{reg}}^\pm, C^\pm(\mathbb{Q}), C_{\text{reg}}^\pm(\mathbb{Q})$ を

$$\begin{aligned} C_{\text{reg}}^\pm &= \{\lambda \in C^\pm \mid w \in W, w \circ \lambda = \lambda \Rightarrow w = 1\}, \\ C^\pm(\mathbb{Q}) &= \{\lambda \in C^\pm \mid (\lambda + \rho, \alpha) \in \mathbb{Q} \text{ for any } \alpha \in \Delta^+\}, \\ C_{\text{reg}}^\pm(\mathbb{Q}) &= C_{\text{reg}}^\pm \cap C^\pm(\mathbb{Q}) \end{aligned}$$

で定める.

定理 3.1 (柏原-谷崎 [11]). \mathfrak{g} を一般の対称化可能 Kac-Moody Lie 代数とする. $\lambda \in C_{\text{reg}}^+(\mathbb{Q})$ のとき, 任意の $w \in W(\lambda)$ に対して

$$\text{ch}(L(w \circ \lambda)) = \sum_{y \geq \lambda w} (-1)^{\ell_\lambda(y) - \ell_\lambda(w)} Q_{w,y}^\lambda(1) \text{ch}(M(y \circ \lambda)).$$

が成立する.

定理 3.2 (柏原-谷崎 [12]). \mathfrak{g} をアフィン・リー代数とする.

(i) $\lambda \in C^+$ のとき, $w \in W(\lambda)$ であって $wW_0(\lambda)$ の最長元になっているものに対して,

$$\text{ch}(L(w \circ \lambda)) = \sum_{y \geq \lambda w} (-1)^{\ell_\lambda(y) - \ell_\lambda(w)} Q_{w,y}^\lambda(1) \text{ch}(M(y \circ \lambda))$$

が成立する.

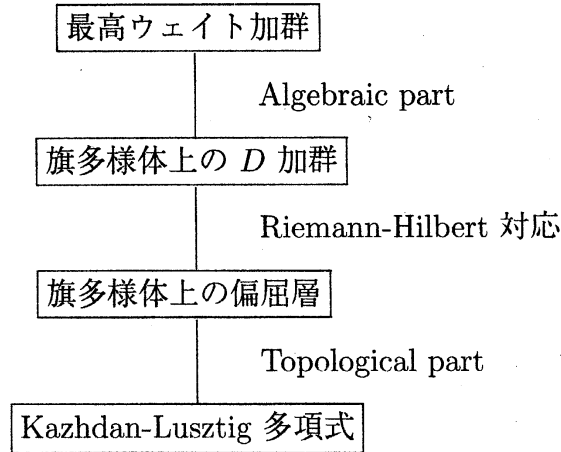
(ii) $\lambda \in C^-$ のとき, $w \in W(\lambda)$ であって $wW_0(\lambda)$ の最短元になっているものに対して,

$$\text{ch}(L(w \circ \lambda)) = \sum_{y \leq \lambda w} (-1)^{\ell_\lambda(w) - \ell_\lambda(y)} P_{y,w}^\lambda(1) \text{ch}(M(y \circ \lambda))$$

が成立する.

4 証明について

証明のスキームは次のとおり.



まず旗多様体およびその中の Schubert 多様体について述べる. $X = G/B^-$ を柏原の構成した旗多様体とする. これは局所的には無限次元アフィン空間

$$\mathbb{A}^\infty = \text{Spec} \mathbb{C}[x_i \mid i \in \mathbb{Z}]$$

に同型な無限次元スキームである. $w \in W$ に対して,

$$X^w = BwB^-/B^- \subset X, \quad X_w = B^-wB^-/B^- \subset X$$

とおく.

定理 4.1 (柏原 [6]). (i) $X = \bigsqcup_{w \in W} X^w$.
 (ii) $X^w \cong \mathbb{A}^\infty$ and $\text{codim } X^w = \ell(w)$.
 (iii) $\overline{X^w} = \bigsqcup_{y \geq w} X^y$.

定理 4.2 (柏原-谷崎 [9]). $X' = \bigcup_{w \in W} X_w$ とおくとき, 次が成立する. (i) $X' = \bigsqcup_{w \in W} X_w$.
 (ii) $X_w \cong \mathbb{A}^{\ell(w)}$.
 (iii) $\overline{X_w} = \bigsqcup_{y \leq w} X_y$.

$\overline{X^w}$ を余次元有限の Schubert 多様体, $\overline{X_w}$ を次元有限の Schubert 多様体と呼ぶ.

Algebraic part

$\lambda \in \mathcal{C}^+$ のとき, $w \in W(\lambda)$ に対する $L(w \circ \lambda)$ は余次元有限の Schubert 多様体 $\overline{X^w}$ を台にもつ左 $D_X(\lambda)$ 加群に対応し, また $\lambda \in \mathcal{C}^-$ のとき, $w \in W(\lambda)$ に対する $L(w \circ \lambda)$ は次元有限の Schubert 多様体 $\overline{X_w}$ を台にもつ右 $D_X(\lambda)$ 加群に対応している. この間の事情を, 以下 $\lambda = 0 \in \mathcal{C}^+$ の場合に限って説明しよう.

左 D_X 加群 $\mathcal{M}_w, \mathcal{L}_w$ を

$$\mathcal{M}_w = \mathbb{D}i_{w!}\mathcal{O}_{X^w}, \quad \mathcal{L}_w = \mathbb{D}i_{w!*}\mathcal{O}_{X^w}$$

により定める. ここで $i_w : X^w \rightarrow X$ は埋め込み写像, $\mathbb{D}i_{w!}, \mathbb{D}i_{w!*}$ は D 加群論の意味でのある種の直像関手である (詳細は省略する). ある種の大域切断関手

$$\tilde{\Gamma} : \{B\text{-equivariant } D_X\text{-modules}\} \rightarrow \{\mathfrak{g}\text{-modules}\}.$$

が定まり, 以下が成立する.

定理 4.3. (i) $\tilde{\Gamma}$ は完全関手である.

(ii) $\tilde{\Gamma}(\mathcal{M}_w) = M(w \circ 0)$.

(iii) $\tilde{\Gamma}(\mathcal{L}_w) = L(w \circ 0)$.

Riemann-Hilbert 対応

De Rham 関手

$$DR : \{\text{regular holonomic } D\text{-modules}\} \simeq \{\text{perverse sheaves}\}$$

に関して次が成立する.

定理 4.4. (i) $DR(\mathcal{M}_w) = \mathbb{C}_{X^w}[-\ell(w)]$.

(ii) $DR(\mathcal{L}_w) = {}^\pi\mathbb{C}_{X^w}[-\ell(w)]$.

Topological part

定理 4.5. 適当な (完備化された) *Grothendieck* 群において

$$[\mathbb{C}_{X^w}[-\ell(w)]] = \sum_{y \geq w} (-1)^{\ell(y) - \ell(w)} Q_{w,y}(1) [{}^\pi\mathbb{C}_{X^y}[-\ell(y)]]$$

が成立する.

定理 4.3, 定理 4.4, 定理 4.5 から求める結果が得られる.

References

- [1] A. Beilinson, J. Bernstein, *Localisation de \mathfrak{g} -modules*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **292** (1981) 15–18.
- [2] J.-L. Brylinski, M. Kashiwara, *Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems*, Invent. Math., **64** (1981) 387–410.
- [3] L. Casian, *Proof of the Kazhdan-Lusztig conjecture for Kac-Moody algebras (the characters $ch L_{\omega\rho-\rho}$)*, Adv. Math., **119** (1996) 207–281.
- [4] L. Casian, *Kazhdan-Lusztig conjecture in the negative level case (Kac-Moody algebras of affine type)*, preprint.
- [5] J. C. Jantzen, *Moduln mit einem höchsten Gewicht*, Lecture Notes in Math. **750**, Springer Verlag (1979).
- [6] M. Kashiwara, “The flag manifold of Kac-Moody Lie algebra” in *Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1990.
- [7] M. Kashiwara, “Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebra” in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math. **87** Birkhäuser, Boston, 1990, 407–433.
- [8] M. Kashiwara, T. Tanisaki, “Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebra II” in *Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory, Vol. II*, Progr. Math. **92** Birkhäuser, Boston, 1990, 159–195.
- [9] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level*, Duke Math. J., **77** (1995) 21–62.
- [10] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level II: Nonintegral case*, Duke Math. J., **84** (1996) 771–813.
- [11] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras III—positive rational case*, Asian J. Math., **2**(4) (1998) 779–832.
- [12] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Characters of irreducible modules with non-critical highest weights over affine Lie algebras*. math.RT/9903123, to appear in the proceedings of the ICRT, held at East China Normal University during June 29–July 4, 1998.

- [13] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, *Invent. Math.*, **53** (1979) 165–184.
- [14] G. Lusztig, *Characters of Reductive Groups over a Finite Field*, *Ann. Math. Studies*, Vol. **107**, Princeton Univ. Press, (1984).