

# Characterizations of the completeness by usco open mappings

岡山大学理学部数学科 吉岡 巖 (Iwao Yoshicka)

MALTA 大学

David Bukhagiar

ある空間を, よりおもしろい空間のよい写像の像として特徴づけるといふ話は沢山あります。例えば,

$X = k\text{-space} \iff$  局所 compact 空間  $Y$  が存在して,  $X$  は  $Y$  の高写像の像である。

この報告では, 写像を多価写像にまで広げて考えて見ることがある。写像  $F: X \rightarrow Y$  が 多価写像 であるとは, 各  $y \in Y$  に対して  $F(y)$  が空でない閉集合 (一点でなくてもよい) であるとします。1969年, H. H. Wicke によって次のような結果が与えられています [4]。

**定理.** Hausdorff 空間  $X$  について, 次の条件は同値である。

(a)  $X$  は point-countable type である。

(b) metric 空間  $Y$  が存在して,  $X$  は  $Y$  の usco open 多

写像の像である。

以下、写像は全て多価写像とする。全ての空間は regular であるとする。

### 1. 定義

定義 1  $X$  の open covering  $\{U_\alpha \mid \alpha \in A_n\}$  の列と写像  $\pi_n: A_{n+1} \rightarrow A_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) が以下の条件を満たすとき,  $\mathcal{S} = (\{U_\alpha \mid \alpha \in A_n\}_{n \geq 0}, \pi_n)$  を  $X$  の open sieve とする。

$$(i) \quad U_\alpha = X \text{ for } \forall \alpha \in A_0,$$

$$(ii) \quad \bigcup \{U_\beta \mid \beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)\} = U_\alpha \text{ for } \forall \alpha \in A_n (n \geq 0).$$

index  $\alpha_n$  の列  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  が,  $\pi_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$  ( $n \geq 0$ ) を満たすとき,  $\pi$ -chain とする。  $\mathcal{S}$  の  $\pi$ -chains 全体を  $\Pi(\mathcal{S})$  で表す [1, 2]。

定義 2  $X$  の open sieve  $\mathcal{S} = (\{U_\alpha \mid \alpha \in A_n\}_{n \geq 0}, \pi_n)$  において,  $A \subset \Pi(\mathcal{S})$  が以下を満たすとき  $A$  は allowed とする。

$$(i) \quad \bigcap_{n \geq 0} U_{\alpha_n} \neq \emptyset \text{ for } \forall (\alpha_n) \in A,$$

$$(ii) \quad x \in X \text{ ならば, } x \in \bigcap_{n \geq 0} U_{\alpha_n} \text{ for some } (\alpha_n) \in A,$$

$$(iii) \quad (\alpha_n) \in A \text{ ならば, } \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in U_{\alpha_k} \text{ に対して, } \exists (\beta_n) \in A \cap \langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle, x \in \bigcap_{n \geq 0} U_{\beta_n}.$$

$$(ここで, \langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle = \{(\gamma_n) \in \Pi(\mathcal{S}) \mid \gamma_i = \alpha_i (0 \leq i \leq k)\})$$

さらに,  $\forall (x_n) \in A$  について,  $X$  の filter base  $\mathcal{F}$  が,  $F_n \subset U_{x_n}$  for some  $F_n \in \mathcal{F}$  ( $n \geq 0$ ) を満たすならば  $\phi \in \bigcap \overline{F} (= \bigcap \{ \overline{F} \mid F \in \mathcal{F} \})$  であるとき,  $X$  は  $A$ -complete といい。

定義3  $X$  の open sieve  $\mathcal{S}$  が存在して,  $X$  が  $\Pi(\mathcal{S})$ -complete であるとき  $X$  は sieve complete [2] といひ, allowed  $A \subset \Pi(\mathcal{S})$  が存在して  $A$ -complete であるとき  $X$  は weakly sieve- $\rho$  であるといふ。

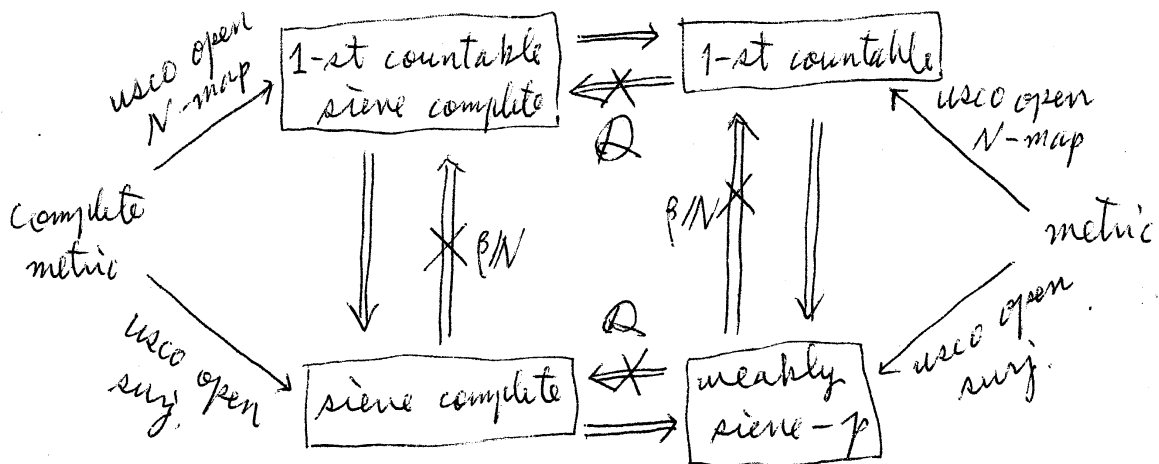
定義4  $X$  の部分集合  $A$  が countable character であるとは,  $A$  が countable base  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (即ち, 各  $U_n$  が  $A$  を含む開集合で,  $A$  を含む任意の開集合  $O$  に対して  $U_m$  が存在して  $A \subset U_m \subset O$  を満たす) を持つことをいふ。  $X$  の各点  $x$  に対して,  $x$  を含む compact set が存在して countable character であるとき,  $X$  は point-countable type であるといふ。

定義5 写像  $F: X \rightarrow Y$  について,  $\forall x \in X$  に対して,  $F(x) \subset V: \text{open in } Y$  ならば  $x$  の開近傍  $U$  が存在して  $F(U) \subset V$  であるとき,  $F$  は u.s.c. (= upper semi-continuous) といふ。また,  $F$  が u.s.c. で,  $\forall x \in X$  に対して  $F(x)$  が compact であるとき  $F$  は USCO であるといふ。  $\forall y \in Y$  と

$y \in V$  : open in  $Y$  に対して,  $F(x) \subset V$  for some  $x \in F^{-1}(y)$  であるとき  $F$  は S-map であるという,  $\forall y \in Y$  に対して  $x \in F^{-1}(y)$  と  $x$  の 周辺基底  $(U_n(x))_{n \geq 1}$  が存在して  $(F(U_n(x)))_{n \geq 1}$  が  $y$  の 周辺基底になるとき  $F$  を N-map とする.  $F(X) = Y$  のとき  $F$  は surjection であるという,  $X$  の 開集合  $U$  に対して,  $F(U)$  が  $Y$  の 開集合であるとき  $F$  は open であるという. ここに,  $A \subset X$  のとき  $F(A) = \cup \{F(x) \mid x \in A\}$  を,  $B \subset Y$  のとき,  $F^{-1}(B) = \{x \in X \mid F(x) \cap B \neq \emptyset\}$  を表わす.

2. 結果

以下, weakly sieve-p space, 1-st countable space, sieve complete space, 1-st countable sieve complete space は, complete metric space あるいは metric space の usco map の像として特徴づけることができることを示す. これ等の関係を下に図示する.



定理 1 空間  $X$  に対して, 次の条件は同値である。

- (a)  $X$  は point-countable type である。
- (b) 任意の  $x \in X$  と  $x$  の任意の開近傍  $U$  に対して, countable character  $\tau$  をつ compact set  $C$  が  $x \in C \subset U$  を満たすものが存在する。
- (c)  $X$  は weakly siem-p である。
- (d) metric space  $Y$  と usco open  $S$ -map  $F: Y \rightarrow X$  が存在する。
- (e) metric space  $Y$  と usco open surjection  $F: Y \rightarrow X$  が存在する。
- (f) point-countable type の空間  $Z$  と usco open surjection  $F: Z \rightarrow X$  が存在する。
- (g) weakly siem-p space  $Z$  と usco open surjection  $F: Z \rightarrow X$  が存在する。

定義 6 写像  $F: X \rightarrow Y$  は次の条件を満たすとき, tri-quotient といい [2]。

$X$  の開集合  $U$  に対して  $Y$  の開集合  $U^*$  を定める対応が存在して (i) ~ (iv) を満たす。

(i)  $U^* \subset F(U)$

(ii)  $X^* = Y$

$$(iii) \quad U \subset V \Rightarrow U^* \subset V^*$$

(iv)  $y \in U^*$  で,  $X$  の 閉集合 からなる  $U \cap F^{-1}(y)$  の covering  $\mathcal{W}$  (即ち,  $\bigcup \{W \mid W \in \mathcal{W}\} \supset U \cap F^{-1}(y)$ ) に対して,  $\mathcal{W}$  の有限個の元  $W_1, \dots, W_n$  が存在して  $y \in (W_1 \cup \dots \cup W_n)^*$ .

定理 2 空間  $X$  に対して, 次の条件は同値である。

(a)  $X$  は sieve complete である。

(b)  $X$  の open sieve  $\mathcal{S} = (\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \pi_n)$  で  $\Pi(\mathcal{S})$ -complete なものが存在して, 任意の  $x \in X$  と  $x$  の任意の 閉近傍  $U$  に対して  $(x_n) \in \Pi(\mathcal{S})$  が存在して  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subset U$  を満たす。

(c) complete metric space  $Y$  と usco open  $\mathcal{S}$ -map  $F: Y \rightarrow X$  が存在する。

(d) complete metric space  $Y$  と usco open surjection  $F: Y \rightarrow X$  が存在する。

(e) sieve complete space  $Z$  と usco tri-quotient map  $F: Z \rightarrow X$  が存在する。

注意(1)  $\mathcal{C}ech$ -complete  $\Rightarrow$  sieve complete は成り立つ。しかし, sieve complete であるが  $\mathcal{C}ech$ -complete ではない例は ([ ], Ex. 9.1) に与えられている。

(2)  $\beta\mathbb{N}$  は sieve complete であるが, いかんする metric

space の open continuous single-valued map の像にもならず  
ない。

(3)  $\mathbb{R} \supset I = [0, 1]$  に対して,  $F: I \rightarrow I$  を  $F(t) = I$   
( $t \in I$ ) で与えるとき  $F$  は usco open surjection で "あるが"  $S$ -  
map でない。

(4)  $Y = \mathbb{Q}$  (rationals) with discrete topology,  $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  とし,  
 $F: Y \rightarrow X$  を  $F(y) = \{x \in X \mid y-1 < x < y+1\}$  で与えるとき,  
 $F$  は u.s.c. open surjection で "あるが"  $X$  は siene complete でない。  
このことは, complete metric space の u.s.c. open surjection に  
よる像は必ずしも siene complete でないことを示す。

定理 3 Hausdorff 空間  $X$  に対して, 次の条件は同値であ  
る。

(a)  $X$  は 1-st countable である。

(b)  $X$  の open siene  $\mathcal{S} = (\{U_n \mid n \in \mathbb{N}, \pi_n\})$  と allowed  
 $A \subset \Pi(\mathcal{S})$  が存在して,  $X$  は  $A$ -complete かつ任意の  $x \in X$  に  
対して  $(a_n) \in A$  が存在して  $(U_{a_n})_{n \geq 0}$  は  $x$  の周辺優基である。

(c) metric space  $Y$  と open continuous single-valued  
map  $f: Y \rightarrow X$  が存在する。

(d) metric space  $Y$  と usco open  $N$ -map  $F: Y \rightarrow X$   
が存在する。

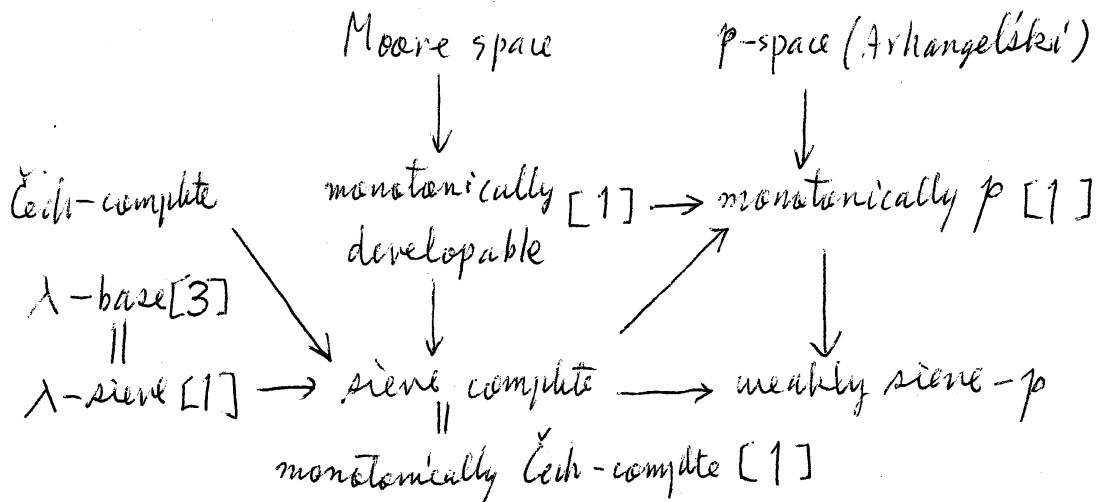
(e) 1-st countable space  $Z$  と usco open  $\mathcal{N}$ -map  $F: Z \rightarrow X$  が存在する。

定理 4 空間  $X$  に対して、次の条件は同値である。

- (a)  $X$  は 1-st countable sieve complete である。
- (b)  $X$  の open sieve  $\mathcal{S} = (\{L_\alpha \mid \alpha \in A_n\}_{n \geq 0}, \pi_n)$  が  $\pi(\mathcal{S})$ -complete なものが存在して、任意の  $x \in X$  に対して  $(\alpha_n) \in \pi(\mathcal{S})$  が存在して  $(L_{\alpha_n})_{n \geq 0}$  は  $x$  の周辺基底である。
- (c) complete metric space  $Y$  と usco open  $\mathcal{N}$ -map  $F: Y \rightarrow X$  が存在する。
- (d) 1-st countable sieve complete space  $Z$  と usco open  $\mathcal{N}$ -map  $F: Z \rightarrow X$  が存在する。

### 3 結語

(1) 2節で現れた空間と他のよく知られた空間の関係。





Sorgenfrey line は weakly sieve- $\rho$   $\tau$  であるが "monotonically  $\rho$   $\tau$  ではない。

(2) 定理 1 の証明の概略

(a)  $\Leftrightarrow$  (b)  $\Leftrightarrow$  (e) は Hausdorff 空間  $X$  で成り立つことか Wicke [ ] により示されてゐる。残りは (c)  $\Rightarrow$  (e)  $\Rightarrow$  (g)  $\Rightarrow$  (c), (e)  $\Rightarrow$  (f)  $\Rightarrow$  (a), (b)  $\Rightarrow$  (d)  $\Rightarrow$  (e) を示す。

(c)  $\Rightarrow$  (e) のために次の Lemma [2; Lemma 2.4] を示す。

Lemma  $\mathcal{S} = (\{U_\alpha \mid \alpha \in A_n \mid n \geq 0, \pi_n)$  が " $X$  の open sieve ならば", 次の条件を満たす open sieve  $\mathcal{S}_1 = (\{V_{\alpha, \lambda} \mid (\alpha, \lambda) \in A_n \times A_n \mid n \geq 0, \pi_n \times \varphi_n)$  (こゝに,  $\varphi_n: A_{n+1} \rightarrow A_n$ : map) が存在する。

(i)  $\overline{V_{\alpha, \lambda}} \subset U_\alpha$  for  $\forall \alpha \in A_n$  ( $n \geq 0$ ),

(ii)  $(\alpha, \lambda) \in A_n \times A_n$  に對して,  $(\beta, \mu) \in (\pi_n \times \varphi_n)^{-1}(\alpha, \lambda)$  ならば  $\overline{V_{\beta, \mu}} \subset V_{\alpha, \lambda}$  ( $n \geq 0$ ),

(iii) allowed  $A \subset \pi(\mathcal{S})$  に對して  $X$  が " $A$ -complete" ならば, allowed  $B \subset \pi(\mathcal{S}_1)$  が存在して  $X$  は " $B$ -complete" である。

(i), (ii) は [2] により, (iii) に對しては  $B = \{(\alpha_n, \lambda_n)_{n \geq 0} \mid (\alpha_n)_{n \geq 0} \in A\}$  が条件を満たす。

(c)  $\Rightarrow$  (e): 上の Lemma により open sieve  $\mathcal{S} = (\{U_\alpha$

$\{ \alpha \in A_n \}_{n \geq 0}, \pi_n \}$  と allowed  $A \subset \prod(S)$  が存在して, 二つの条件

$\overline{\bigcup_{\beta} \omega_{\beta}} \subset \bigcup_{\beta} \omega_{\beta}$  for  $\forall \beta \in \pi_n^{-1}(\alpha) (n \geq 0)$ , かつ  $X$  は  $A$ -complete を満たす. ここで,  $A$  は discrete space  $A_n$  の直積空間  $\prod_{n \geq 0} A_n$  の部分空間として考えるならば  $A$  は  $\dim A = 0$  の metric space である. 次に, 写像  $F: A \rightarrow X$  を

$$F(\alpha) = \bigcap_{n \geq 0} \omega_{\alpha_n} = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\omega_{\alpha_n}} \quad (A \ni \alpha = (\alpha_n)_{n \geq 0})$$

で与えると (e) の条件は満たされる。

(e)  $\Rightarrow$  (g):  $X$  は weakly sieve- $\rho$  に依るから明らか。

(g)  $\Rightarrow$  (c) は容易に示すことができる。

(e)  $\Rightarrow$  (t):  $X$  は point-countable type に依るから明らか。

(t)  $\Rightarrow$  (a) は容易に示すことができる。

(b)  $\Rightarrow$  (d):  $T = \{ X \text{ の空でない open sets 全体} \}$  に discrete topology を与えて,  $T^{\infty}$  の部分空間として

$A = \{ (t_n)_{n \geq 1} \mid \text{(i) } t_1 \supset t_2 \supset \dots, \text{(ii) } (t_n)_{n \geq 1} \text{ は, } X \text{ の空でない compact set の countable character} \}$

を考える。次に, 写像  $F: A \rightarrow X$  を

$$F(t) = \bigcap_{n \geq 1} t_n \quad (A \ni t = (t_n)_{n \geq 1})$$

で与えるならば (d) の条件を満たす。

(d)  $\Rightarrow$  (e) は明らかである。

定理 2, 3, 4 も類似の方法で示すことができる。

## 参考文献

- (1) J. Chaber, M.M. Ćoban, K. Nagami; On monotonic generalizations of Moore spaces,  $\check{C}$ ech-complete spaces and  $p$ -spaces, *Fund. Math.* 84 (1994) 107-119.
- (2) E. Michael; Complete spaces and tri-quotient maps, *Illinois Math.* 27 (1999) 716-733.
- (3) H. H. Wicke, J. M. Warrell, Jr.; Open continuous mappings of spaces having bases of countable order, *Duke Math. Jour.* 34 (1967) 255-271.
- (4) H. H. Wicke; On the Hausdorff open continuous images of Hausdorff paracompact  $p$ -spaces, *Proc. of A.M.S.* 22 (1969) 136-140.