数理解析研究所講究録
1127巻 2000年 134-137

移動領域の反射壁過程に対するペナルティメソッドについて

熊本大学工学部数理情報システム工学科　税所 康正 (SAISHO, Yasumasa)

Introduction

反射壁 Brown 運動の近似のうち反射壁 Brown 運動をいったん反射壁ではない通常の確率微分方程式 (SDE) で近似して（ペナルティメソッドと呼ばれる），さらにその方程式を Euler-Maruyama 近似する方法に関しては，[S], [KS] で述べた．この一見複雑な２段構えの近似をすることで，領域に対する条件が大きく緩められるだけでなく，収束の速さもほとんど落ちないことに注意したい．

さて最近，Cakir [C] は，移動したり大きさや形が変化する領域における反射壁過程について研究している．[C] ではこのような領域における反射壁方程式，いわゆる Skorohod 方程式の解の存在と一意性が論じられているが，この結果を利用して，移動領域における反射壁 Brown 運動の近似を [S], [KS] などの方法に従って目指すために，本稿では移動領域に対するペナルティメソッドを考える．

§1 では移動領域に対する Skorohod 方程式及び，Skorohod problem (equation) に関する [C] の結果を紹介しておく．§2 で現時点までに得られた結果を述べる．

1 Skorohod problem/equation and Skorohod SDE

[S1] にしたがって，領域 $D \subset \boldsymbol{R}^d$ に対する条件，Condition (A), (B) を述べておく．まず，normal vector を定義する：

$$\mathcal{N}_{x,r} = \{\boldsymbol{n} : |\boldsymbol{n}| = 1,\, B(x - r\boldsymbol{n}, r) \cap D = \emptyset\}, \quad r > 0,$$
$$\mathcal{N}_x = \bigcup_{r>0} \mathcal{N}_{x,r}, \quad x \in \partial D.$$

ここで，$B(y,r) = \{z \in \boldsymbol{R}^d : |z-y| < r\}$, $y \in \boldsymbol{R}^d$, $r > 0$.

Condition (A)　ある定数 $r_0 > 0$ が存在して，すべての境界点 $x \in \partial D$ に対して

$$\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_{x,r_0} \neq \emptyset.$$

Condition (B)　ある定数 $\delta > 0$ と $\beta \in [1,\infty)$ が存在して，次のことが成立する：任意の $x \in \partial D$ に対して単位ベクトル ℓ_x が存在して，

$$\langle \ell_x, \boldsymbol{n} \rangle \geq 1/\beta \quad \text{for any} \quad \boldsymbol{n} \in \bigcup_{y \in B(x,\delta) \cap \partial D} \mathcal{N}_y.$$

ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\boldsymbol{R}^d$ の通常の内積.

Remark 1.1 D が凸のときは任意の $r_0>0$ に対して Condition (A) がみたされる.

Remark 1.2 ([S1] Remark 1.3) 領域 D が Condition (A) を満たし $\mathrm{dist}(x,\overline{D})<r_0$ であるとき，$\mathrm{dist}(x,\overline{D})=|x-\overline{x}^D|$ を満たす $\overline{x}^D\in\overline{D}$ が一意的に存在する．特に $x\in D$ のときは $\overline{x}^D=x$ で，$x\notin D$ のときには $\overline{x}^D\in\partial D$ である.

$r_0,\delta>0\,\beta\in[1,\infty)$ に対して，

$$M_{r_0,\delta,\beta}:=\{D:\ D\text{ は Condition(A)(B) を }r_0,\delta,\beta\text{ に対して満たす領域}\}$$
$$d_H(D,\mathcal{O}):=\inf\{q:D^q\supset\mathcal{O},\ \mathcal{O}^q\supset D\},\ D,\mathcal{O}\in M_{r_0,\delta,\beta}$$

とおく．ただし，$D^q:=\{x:x=y+z,\ y\in D,\ |z|<q\}$ とする．また，$\boldsymbol{D}:[0,\infty)\to M_{r_0,\delta,\beta}$ として t における $\boldsymbol{D}$ の値を D_t と書く． さらに，$\alpha\geq 1$ に対して，

$$\mathbb{M}_\alpha:=\{\boldsymbol{D}:\ \text{ある正定数 }L'\text{ に対して }d_H(D_s,D_t)\leq L'|t-s|^\alpha\}$$

とおく.

Remark 1.3 $\alpha>1$ のときでも， $\boldsymbol{D}\in\mathbb{M}_\alpha$ をみたす領域は時間について静止し固定されているわけではない.

移動領域に対する Skorohod problem/equation 与えられた $w(0)\in\overline{D_0}$ であるような $w\in C([0,\infty\to\boldsymbol{R}^n)$ に対して，次を満たす組 (ξ,φ) を見つける問題を $(w;\boldsymbol{D})$ に対する Skorohod problem といい，次の方程式を $(w;\boldsymbol{D})$ に対する Skorohod equation とよぶ.

$$\xi(t)=w(t)+\varphi(t),\ t\geq 0, \tag{1.1}$$

ここで,

- $x(t)$: 連続で， $x(t)\in\overline{D_t}$
- $\varphi(t)$: 連続で有界変動， $\varphi(0)=0$
- $\varphi(t)=\int_0^t \boldsymbol{n}(s)d|\varphi|_s$，　$|\varphi|_t=\int_0^t I_{\{x(s)\in\partial D_s\}}(s)d|\varphi|_s$
- $\boldsymbol{n}(s)\in\mathcal{N}_{x(s)}$ if $x(s)\in\partial D_s$.

ただし，$|\varphi|_t$ は φ の $[0,t]$ における全変動を表し，$I_A(s)=\begin{cases}1,\ s\in A,\\ 0,\ s\notin A\end{cases}$ である.

この方程式の解の存在と一意性については次の結果がある.

Theorem 1.1 ([C]) $\boldsymbol{D}:[0,\infty)\to M_{r_0,\delta,\beta}$ が 連続であるとき，$w(0)\in\overline{D_0}$ であるような任意の $w\in C([0,\infty)\to\boldsymbol{R}^n)$ に対して (1.1) の解 (ξ,φ) が一意に存在して，ξ は (t,w) について連続.

2 移動領域に対する Penalty method

領域 D が Condition (A) をみたしているとき，次のような関数 $U : \boldsymbol{R}^d \to \boldsymbol{R}_+$ が存在することが知られている（[ST], [S], [KS]）:

- $U \in C^1(\boldsymbol{R}^d)$
- $U(x) = |x - \overline{x}^D|^2 \quad \text{if} \quad \mathrm{dist}(x, \overline{D}) \leq r_0/2$
- ∇U は有界で Lipschitz 連続.

これから，$\boldsymbol{D} : [0, \infty) \to M_{r_0,\delta,\beta}$ のとき，任意の $0 < T < \infty$ に対して，同様に次の条件をみたす関数 $U_t : \boldsymbol{R}^d \times [0, T] \to \boldsymbol{R}_+$ が存在することがわかる.

- $U_t \in C^1(\boldsymbol{R}^d), \quad U_t \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T$
- $U_t(x) = |x - \overline{x}^{D_t}|^2 \quad \text{if} \quad \mathrm{dist}(x, \overline{D_t}) \leq r_0/2$
- ∇U_t は有界で x について Lipschitz 連続.

いま，$x_m \in D_0$ として ξ_m を

$$\xi_m(t) = x_m + w(t) - \frac{m}{2} \int_0^t \nabla U_s(\xi_m(s))\, ds, \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.1}$$

の解とすると次の結果を得る.

Theorem 2.1 ある $\alpha > 1$ に対して $\boldsymbol{D} \in \mathbb{M}_\alpha$ とするとき，(2.1) の解は任意の $0 < T < \infty$ に対して $[0, T]$ で (1.1) の解に一様収束する.

References

[C] I. Cakir, Stochastic differential equations for moving domains with refrecting boundaries, Inaugural-dissertation , Universität Zürich (1996).

[KS] S. Kanagawa and Y. Saisho, Strong approximation of reflecting Brownian motion using penalty method and its application to computer simulation, preprint.

[S1] Y. Saisho, Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary, Probab. Theory Rel. Fields **74** (1987) 455-477.

[S2] 税所 康正, Penalty method を用いた反射壁 SDE の近似, 数理解析研究所講究録 **1032** (1998), 13-20.

[ST] Y. Saisho and H. Tanaka, On the symmetry of a reflecting Brownian motion defined by Skorohod's equation for a multi-dimensional domain, Tokyo J.Math. **10** (1987), 419-435.

SAISHO**, **Yasumasa

Department of Computer Science,
Faculty of Engineering,
Kumamoto University

ysaisho@kumamoto-u.ac.jp