数理解析研究所講究録
1127 巻 2000 年 44-52

ダム過程の再帰一非再帰判定条件

山里　眞　(琉球大学)

平成11 年 11 月 2 日

1　序

報告者は[4] でダム過程 (または storage process ともいう) が再帰的になるための十分条件や必要条件を与えた。しかしこれらを組み合わせても安定過程を入力とし、出力レート (release rate) をべき関数に限った過程の再帰性の必要十分条件は得られなかった。再帰性や非再帰性を示すにはうまいリャプーノフ関数を見つけることが鍵になる。われわれは上に述べたような確率過程に適用可能なリャプーノフ関数を見つけ再帰性の必要十分条件を示すことが出来た。また、出力レートが有界、非減少な場合にも新しい再帰性の十分条件や非再帰性の十分条件を見つけたのでこれらを報告する。

まづ最も一般なダム過程を定義しよう。$r(x)$ を $[0,\infty)$ で定義された非負値関数で $r(0)=0, r(x)>0\ (x>0)$, 左連続、正の右極限を持つものとする。これを release rate という。放流レートと和訳すべきか。$\{A(t)\}$ を増加加法過程で $A(0)=0$,

$$Ee^{-\theta A(t)}=\exp\int_0^\infty t(e^{-\theta y}-1)\nu(dy)$$

となるものとする。ただし　ν は $(0,\infty)$ 上の測度で

$$0<\int_0^\infty(x\wedge 1)\nu(dx)<\infty$$

を満たすとする。この ν は $\{A(t)\}$ のレヴィ測度とよばれる。n を $n\geq 1$ なる整数とし、$\{A(t)\}$ から

$$A_n(t)=\sum_{s\leq t}(A(s)-A(s-))1_{\{A(s)-A(s-)>\frac{1}{n}\}}$$

で $\{A_n(t)\}$ を定義するとこれは $\nu_n(\cdot)=\nu(\cdot\cap(\frac{1}{n},\infty))$ をレヴィ測度とする増加加法過程である。この $\{A_n(t)\}$ に対し

$$X_n(t)=x-\int_0^t r(X_n(s))ds+A_n(t)$$

を満たす確率過程 $\{X_n(t)\}$ がただひとつ存在する。$\{X_n(t)\}$ は n に関し単調非減少でその極限を $\{X(t)\}$ とおくとこの確率過程は

$$X(t) = x - \int_0^t r(X(s))ds + A(t)$$

を満たす。この $\{X(t)\}$ を r と ν に対応するダム過程という。詳しくは [1] を参照。この確率過程は Hunt 過程になる。

2 Lemmas

τ_y を $\{X(t)\}$ の $[0,y]$ への hitting time とし τ_y^* を $[y,\infty]$ への hitting time とする。ダム過程 $\{X(t)\}$ はつぎの3つのタイプに分類できる ([4]) :
(a) すべての $x > y > 0$ に対し $P_x(\tau < \infty) < 1$,
(b) すべての $x > y > 0$ に対し $P_x(\tau < \infty) = 1$, かつ $E_x(\tau) = \infty$,
(c) すべての $x > y > 0$ に対し $P_x(\tau < \infty) = 1$, かつある y とすべての $x > y$ に対し $E_x(\tau) = \infty$.

(a) が成り立つとき $\{X(t)\}$ は非再帰的、(b) が成り立つとき零再帰的、(c) がなりたつとき正再帰的、(b) または (c) が成り立つとき再帰的であるといおう。$r(x)$ が非減少関数のときには正再帰的であるための必要十分条件が知られている ([1]) のでここでは再帰—非再帰性の判定条件に興味がある。

補題 2.1 $\nu(R_+) < \infty$ または r が非減少であることを仮定する。ある $x_0 > 0$ があって $[x_0,\infty]$ で非負値な関数 $u(x)$ で、$r(x)u(x)$ が連続で、

$$\int_{x_0}^{\infty} u(x)dx = \infty$$

かつ

$$r(x)u(x) \geq \int_x^{\infty} \nu(y-x,\infty)u(y)dy, \quad \textit{for all} \quad x \geq x_0$$

を満たすものがあればダム過程 $\{X(t)\}$ は再帰的

証明 $U(x) = \int_{x_0}^{x} u(y)dy$ とおく。$\mathcal{D}$ を $\{X(t)\}$ の *Hille-Yoshida* の意味の生成作用素 $\mathcal{G}$ の定義域とする。これは $\nu(R_+) < \infty$ または r が非減少という仮定のもとでは C_0 の関数 f で $rf' \in C_0$ かつ $rf'(0) = 0$ を満たす有界な *derivative* f'を持つものの全体を含む ([3])。したがって M を $x_0 < M < \infty$ととったとき $V_M(x) \in \mathcal{D}$ で $U(x) = V_M(x)$ *for* $x \in [x_0, M]$ となるものが存在する。まづ

$$\mathcal{G}U(x) \leq 0 \quad \textit{for} \quad x \geq x_0 \tag{1}$$

を示す。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}U(x) &= -r(x)U'(x) + \int_0^\infty \{U(x+y) - U(x)\}\nu(dy) \\
&= -r(x)u(x) + \int_0^\infty \nu[y,\infty]u(x+y)dy \\
&= -r(x)u(x) + \int_0^\infty \nu[y-x,\infty]u(y)dy \le 0 \quad for \quad x \ge x_0.
\end{aligned}
$$

つぎに $x_0 \le a < x < b < M$ と、a, b, M をとる。

$$U(X(s)) = V_M(X(s)) \quad for \quad 0 \le s \le t \wedge \tau_a \wedge \tau_b^*$$

だから *Dynkin formula* と (1) により

$$
\begin{aligned}
E_x(U(X(t \wedge \tau_a \wedge \tau_b^*))) &= U(x) + E_x[\int_0^{t\wedge\tau_a\wedge\tau_b^*} \mathcal{G}U(X(s))ds] \\
&\le U(x)
\end{aligned}
$$

を得る。上式左辺を

$$E_x(U(X(t \wedge \tau_a \wedge \tau_b^*))) = J_1 + J_2 + J_3$$

と分ける。ただし

$$
\begin{aligned}
J_1 &= E_x(U(X(t)); t < \tau_a \wedge \tau_b^*), \\
J_2 &= E_x(U(X(\tau_a)); \tau_a < \tau_b^*, \tau_a \le t), \\
J_3 &= E_x(U(X(\tau_b^*)); \tau_b^* \le \tau_a, \tau_b^* \le t).
\end{aligned}
$$

$P_x(\tau_b^* < \infty) = 1$ と $X(\tau_a) = a$ より

$$J_2 \to U(a)P_x(\tau_a < \tau_b^*) \quad as t \to \infty.$$

また、 $X(\tau_b^*) \ge b$ と U が単調非減少であることから，$t \to \infty$ のとき

$$J_3 \to E_x(U(X(\tau_b^*)); \tau_b^* \le \tau_a) \ge U(b)P_x(\tau_b^* \le \tau_a)$$

ゆえに

$$\{U(b) - U(a)\}P_x(\tau_b^* \le \tau_a) \le U(x) - U(a).$$

ここで $b \to \infty$ とすると $P_x(\lim_{b\to\infty} \tau_b^* = \infty) = 1$ ([4]) より

$$
\begin{aligned}
P_x(\tau_b^* \le \tau_a) &\to P_x(\tau_a = \infty), \\
U(b) - U(a) &\to \infty
\end{aligned}
$$

を得る。したがって $P_x(\tau_a = \infty) > 0$ とすると矛盾であるから $\{X(t)\}$ は再帰的。

補題 2.2 $\nu(R_+) < \infty$ または r が非減少であることを仮定する。ある $x_0 > 0$ があって $[x_0, \infty]$ で非負値な関数 $u(x)$ で、$r(x)u(x)$ が連続で、

$$\int_{x_0}^{\infty} u(x)dx < \infty$$

かつ

$$r(x)u(x) \le \int_{x}^{\infty} \nu(y-x,\infty)u(y)dy, \quad \textit{for all} \quad x \ge x_0 \tag{2}$$

を満たすものがあればダム過程 $\{X(t)\}$ は非再帰的

証明 $U(x) = \int_{x_0}^{x} u(y)dy$ とおくと (2) より

$$\mathcal{G}U(x) \ge 0 \quad \textit{for} \quad x \ge x_0. \tag{3}$$

補題 *1.1* の証明と同様にして M を $x_0 < M < \infty$ ととったとき $V_M(x) \in \mathcal{D}$ で $U(x) = V_M(x)$ *for* $x \in [x_0, M]$ となるものが存在する。つぎに

$$x_0 \le a < x < b < M$$

と、a, b, M をとる。

$$U(X(s)) = V_M(X(s)) \quad \textit{for} \quad 0 \le s \le t \wedge \tau_a \wedge \tau_b^*$$

だから *Dynkin formula* と (3) により

$$\begin{aligned} E_x(U(X(t\wedge\tau_a\wedge\tau_b^*))) &= U(x) + E_x[\int_0^{t\wedge\tau_a\wedge\tau_b^*} \mathcal{G}U(X(s))ds] \\ &\ge U(x) \end{aligned}$$

を得る。上式左辺を

$$E_x(U(X(t\wedge\tau_a\wedge\tau_b^*))) = J_1 + J_2 + J_3$$

と分ける。ここで、

$$\begin{aligned} J_1 &= E_x(U(X(t)); t < \tau_a \wedge \tau_b^*), \\ J_2 &= E_x(U(X(\tau_a)); \tau_a < \tau_b^*, \tau_a \le t), \\ J_3 &= E_x(U(X(\tau_b^*)); \tau_b^* \le \tau_a, \tau_b^* \le t). \end{aligned}$$

$P_x(\tau_b^* < \infty) = 1$ と $X(\tau_a) = a$ より

$$J_2 \to U(a)P_x(\tau_a < \tau_b^*) \quad \textit{as} \quad t \to \infty.$$

また、 $X(\tau_b^*) \ge b$ と U が単調非減少であることから,

$$J_3 \le U(\infty)P_x(\tau_b^* \le \tau_a)$$

かつ

$$J_1 \leq U(\infty)P(t < \tau_a \wedge \tau_b^* = \infty) \to 0 \quad as \quad t \to \infty$$

したがって

$$U(a)P_x(\tau_a < \tau_b^*) + U(\infty)P_x(\tau_b^* \leq \tau_a) \geq U(x).$$

すなわち

$$\{U(\infty) - U(a)\}P_x(\tau_b^* \geq \tau_a) \geq U(x) - U(a).$$

ここで $b \to \infty$ とすると $P_x(\lim_{b\to\infty} \tau_b^* = \infty) = 1$ より

$$P_x(\tau_b^* \leq \tau_a) \to P_x(\tau_a = \infty) \geq \frac{U(x) - U(a)}{U(\infty) - U(a)} > 0$$

を得る。したがって $P_x(\tau_a < \infty) < 1$ となり $\{X(t)\}$ は非再帰的。

3 Main results

定理 3.1 *release rate* r が非減少を仮定する。ある $\beta \geq 0$ と $x_0 > 0$ があって任意の $x \geq x_0$ に対して

$$1 \geq \int_0^\infty \frac{\nu[y,\infty)}{r(y+x)}(\frac{x}{x+y})^\beta dy$$

かつ

$$\int_{x_0}^\infty \frac{1}{r(y)y^\beta} dy = \infty$$

ならば (r, ν) に対応するダム過程 $\{X(t)\}$ は再帰的。

証明 仮定より

$$\begin{aligned} x^{-\beta} &\geq \int_0^\infty \frac{\nu(y,\infty)}{r(x+y)} \frac{1}{(x+y)^\beta} dy \\ &= \int_x^\infty \frac{\nu(y-x,\infty)}{r(y)} y^{-\beta} dy \end{aligned}$$

だから

$$u(x) = \frac{1}{r(x)x^\beta}$$

とおくと $u(x)$ は補題２.*1* の条件を満たす。したがって $\{X(t)\}$ は再帰的

定理 3.2 *release rate* r が非減少を仮定する。ある $\beta > 0$ と $x_0 > 0$ があって任意の $x \geq x_0$ に対して

$$1 \leq \int_0^\infty \frac{\nu[y,\infty)}{r(y+x)}(\frac{x}{x+y})^\beta dy$$

かつ

$$\int_{x_0}^\infty \frac{1}{r(y)y^\beta} dy < \infty$$

ならば (r, ν) に対応するダム過程 $\{X(t)\}$ は非再帰的。

証明　定理 *3.1* の証明と同様に補題 *2.2* より $\{X(t)\}$ は非再帰的

4　応用

$\nu(x,\infty)=x^{-\alpha}$ かつ $r(x)=ax^{\beta}$ for $0<\alpha<\beta<1$ の場合を考えよう。[3] では次のことがわかっている。

$\alpha+\beta>1$ ならば $\{X(t)\}$ は正再帰的、

$\alpha+\beta=1$ かつ $\frac{1}{a}\leq\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}$ ならば $\{X(t)\}$ は再帰的、

$\alpha+\beta=1$ かつ $\frac{1}{a}>\alpha$ ならば $\{X(t)\}$ は非再帰的、

$\alpha+\beta<1$ ならば $\{X(t)\}$ は非再帰的。

$\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}<\alpha\ (\alpha>0)$ だから $\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}<\frac{1}{a}\leq\alpha$ のとき再帰的かどうかわからなかったが、定理３．２を用いると

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{y^{-\alpha}}{a(x+y)^{1-\alpha}}\left(\frac{x}{x+y}\right)^{\beta}dy\\
=\ &\frac{x^{\beta}}{a}\int_0^\infty \frac{1}{(x+y)^{1-\alpha+\beta}y^{\alpha}}dy\\
=\ &\frac{x^{\beta}}{ax^{1+\beta}}\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^{1-\alpha+\beta}y^{\alpha}}xdy\\
=\ &\frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^{1-\alpha+\beta}y^{\alpha}}dy\\
=\ &\frac{1}{a}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

これは $\beta>0$ の減少関数で $\beta=\alpha$ のとき $\frac{1}{a}\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ だから、$\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}<\frac{1}{a}$ ならば β を $\alpha<\beta$ かつ 十分 α に近くとっておくと定理 3.2 の条件を満たす。したがって $\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}<\frac{1}{a}$ ならば $\{X(t)\}$ は非再帰的となり，この場合の再帰性の分類が完全に出来た。なおこの分類は Takono[2] や Zakushilo [5] による、原点で local time が存在するかどうかの分類と一致している。

5　Case $r(\infty)<\infty$

次に $r(\infty)<\infty$ の場合を考えよう $r(x)$ がある $x_0>0$ 以上の x で定数 r_0 に一致している場合には

$\int_0^\infty \nu(x,\infty)dx<r_0$ のとき正再帰、

$\int_0^\infty \nu(x,\infty)dx=r_0$ のとき零再帰、

$\int_0^\infty \nu(x,\infty)dx<r_0$ のとき非再帰

であることがわかっている。$r(x)\neq r(\infty)\ (0<x<\infty)$ でも

$$\int_0^\infty \nu(x,\infty)dx\neq r_0$$

の場合には同じことが成り立つが $\int_0^\infty \nu(x,\infty)dx = r_0$ の場合には良くわかっていなかった。ここでは r が非減少な場合に再帰的、非再帰的それぞれの十分条件を与える。

定理 5.1 r は非減少、$r(\infty) = \int_0^\infty \nu(y,\infty)dy < \infty$,

$$r(\infty) - r(x) = Cx^{-\gamma}(1+o(1)) \quad as \quad x \to \infty$$

とする。ただし C は正の定数。このとき次が成立。

$\gamma > 1$ ならばダム過程は再帰的、
$0 < \gamma < 1$ ならばダム過程は非再帰的、
$\gamma = 1$ かつ $\int_0^\infty y\nu(y,\infty)dy < C$ ならばダム過程は非再帰的、
$\gamma = 1$ かつ $\int_0^\infty y\nu(y,\infty)dy > C$ ならばダム過程は再帰的。

証明 $v(x) = r(x)x^{-\beta}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{\nu(y,\infty)}{r(x+y)} v(x+y)dy \\
= \ & x^{-\beta}\int_0^\infty \nu(y,\infty)(1+\frac{y}{x})^{-\beta}dy \\
= \ & v(x) \\
&+x^{-\beta-\gamma}[-\int_0^\infty \nu(y,\infty)x^\gamma\{1-(1+\frac{y}{x})^{-\beta}\}dy + C(1+o(1))]
\end{aligned}$$

$\gamma > 1$ の場合には $0 < \beta \le 1$ ととるとファトゥーの補題により、

$$\begin{aligned}
&\liminf_{x\to\infty}\int_0^\infty \nu(y,\infty)x^\gamma\{1-(1+\frac{y}{x})^{-\beta}\}dy \\
\ge \ & \int_0^\infty \nu(y,\infty)\liminf_{x\to\infty} x^\gamma\{1-(1+\frac{y}{x})^{-\beta}\}dy = \infty
\end{aligned}$$

だから十分大きなすべての x に対して

$$v(x) > \int_0^\infty \frac{\nu(y,\infty)}{r(x+y)} v(x+y)dy$$

が成り立つ。また、

$$\int_1^\infty \frac{v(x)}{r(x)}dx = \int_1^\infty x^{-\beta}dx = \infty$$

だから補題 *2.1* より $\{X(t)\}$ は再帰的。次に, $0 < \gamma < 1$ かつ

$$\int_0^\infty y^\gamma \nu(y,\infty)dy < \infty$$

ならば $\beta > 1$ として

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \nu(y,\infty)x^\gamma\{1-(1+\frac{y}{x})^{-\beta}\}dy \\
= \ & \int_0^\infty y^\gamma\nu(y,\infty)(\frac{x}{y})^\gamma\{1-(1+\frac{y}{x})^{-\beta}\}dy
\end{aligned}$$

であり、$t^{-\gamma}\{1-(1+t)^{-\beta}\}$ は $t \geq 0$ に関し有界で $t \to 0$ のとき 0 に近づく。したがって、ルベーグの収束定理により

$$\int_0^\infty \nu(y,\infty)x^\gamma\{1-(1+\frac{y}{x})^{-\beta}\}dy \to 0$$

as $x \to \infty$. だから十分大きなすべての x に対して

$$v(x) > \int_0^\infty \frac{\nu(y,\infty)}{r(x+y)}v(x+y)dy$$

が成り立つ。だから

$$\int_1^\infty \frac{v(x)}{r(x)}dx = \int_1^\infty x^{-\beta}dx < \infty$$

だから補題 *2.2* より $\{X(t)\}$ は非再帰的。$\gamma = 1$ とする。$t^{-1}\{1-(1+t)^{-\beta}\}$ は t に関し有界かつ $t \to 0$ のとき β に近づく。よってルベーグの収束定理により

$$\int_0^\infty y\nu(y,\infty)\frac{x}{y}\{1-(1+\frac{y}{x})^{-\beta}\}dy \to \beta\int_0^\infty y\nu(y,\infty)dy \leq \infty.$$

ゆえに $\int_0^\infty y\nu(y,\infty)dy < C$ ならば $\beta > 1$ を十分 1 に近くとることにより、十分大きなすべての x に対し

$$v(x) \leq \int_0^\infty \frac{\nu(y,\infty)}{r(x+y)}v(x+y)dy.$$

また、

$$\int_1^\infty \frac{v(x)}{r(x)}dx < \infty$$

であるから、$\{X(t)\}$ は非再帰的。また、$\int_0^\infty y\nu(y,\infty)dy > C$ ならば $\beta < 1$ を十分 1 に近くとることにより、十分大きなすべての x に対し

$$v(x) \geq \int_0^\infty \frac{\nu(y,\infty)}{r(x+y)}v(x+y)dy.$$

また、

$$\int_1^\infty \frac{v(x)}{r(x)}dx = \infty$$

であるから、$\{X(t)\}$ は補題 *2.1* より再帰的。

参考文献

[1] P. J. Brockwell, S. J. Resnick, R. L. Tweedie, "*Storage processes with general release rule and additive inputs*," Adv. Appl. Probab. 14(1982),392-433.

[2] M. Takano, "*On emptiness of a dam process*," Reports of Liberal Arts, Sizuoka. Univ.,(Siences) 18(1982),23-27

[3] M. Yamazato, "*On semigroups corresponding to storage processes*," Ryukyu Math. J. , 11(1998), 87-101.

[4] M. Yamazato, "*Recurrence-transience criteria for storage processes*," submitted.

[5] O. K. Zakusilo, "*A criterion for the existence of the local time at zero for a class of storage processes*," Theor y Probab. Appl. 41(1996), 192-195.