数理解析研究所講究録
1127 巻 2000 年 67-79

Riesz-Raikov 和の中心極限定理とその周辺

福山 克司（神戸大学理学部）

0. 無理数回転の従属性消滅に関する杉田の予想

α を無理数とすると

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_0+(n-1)\alpha) \to \int_0^1 f(x)\,dx \qquad (N\to\infty,\ x_0\in\mathbf{R})$$

が周期 1 の局所 Riemann 可積分な函数に対して成り立つことが Weyl の定理より従う。このことを函数 f の数値積分法に用いるのが準 Monte Carlo 法と呼ばれるものであって、収束の際の誤差項が $O(N^{-1+\varepsilon})$ $({}^{\forall}\varepsilon>0)$ 程度の速さで減衰することが知られている。これに対して一様分布を持つ i.i.d. $\{\xi_n\}$ に対して

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \to \int_0^1 f(x)\,dx \qquad (N\to\infty) \qquad \text{a.s.}$$

であることが大数の法則により保証されるので、このことを用いて数値積分するのが Monte Carlo 法である。この収束の誤差項についても $O(N^{-1/2+\varepsilon})$ $({}^{\forall}\varepsilon>0)$ 程度の速さで減衰することが知られている。

このように準 Monte Carlo 法による方が一見収束は速そうであるが、実際上はそうではないことも良く知られている。即ち、積分空間の次元が高いときや被積分函数が複雑な場合は、実用的な時間内ではむしろ Monte Carlo 方の誤差項がはるかに小さいという現象が観測されるのである。

ここで述べる杉田洋氏による実験でもそのような現象が現れる。この実験は公平な simple random walk S_n のある点での滞在確率を準 Monte Carlo 法

により求めるというものである。以下これを紹介しよう。まず Rademacher 函数系 $\{r_n\}$ を用意する。即ち

$$r_1(\omega) := \mathbf{1}_{[0,1/2)}(\omega) - \mathbf{1}_{[1/2,1)}(\omega) \quad \text{and} \quad r_i(\omega) := r_1(2^{i-1}\omega), \quad (i \geq 2).$$

と定める。グラフを書くと自明なことだが、$\{r_n\}$ を Lebesgue 確率空間 $([0,1), d\omega)$ 上の確率変数列と見ると ± 1 の値を公平にとる i.i.d. となっていることが分かる。よって $S_n = r_1 + \cdots + r_n$ とおくと Lebesgue 確率空間上に fair simple random walk が構成できたことになる。さてこの枠組を利用して $P(S_m = a)$ の数値積分法的計算を試みる。準 Monte Carlo 法により

$$P(S_m = a) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{\{S_m = a\}}(\omega_0 + n\alpha)$$

となる。ここで ω_0 は任意、 α は無理数である。

この数値実験では m が大きい時には準 Monte Carlo 法の advantage は現れず、その収束の速さは Monte Carlo 法のそれと変わらなかった。杉田氏はこれを $\{S_m(\omega + n\alpha)\}$ は m が大きい時に漸近的に独立に近付くからであると考えた。S_m は正規化して $S_m/\sqrt{m}$ とすると m を大きくすると標準正規分布に近付くので、$S_m/\sqrt{m}$ に無理数回転を施して得られる定常列 $\{X_n^{(m,\alpha)}(\omega) = S_m(\omega + (n-1)\alpha)/\sqrt{m}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ が gaussian i.i.d. に近付くと予想し、実際、ほとんど全ての α に対して相関の消滅を示し、その order を以下のように評価した。

$$E\big(X_n^{(m,\alpha)} X_{n+k}^{(m,\alpha)}\big) = o(m^{-\beta}) \quad (m \to \infty,\ k \in \mathbf{N},\ 0 < \beta < 1/2).$$

この予想に関して我々 [Fuk 94b] が得た結果は以下の通りである。

- ほとんど全ての α にたいし定常列 $\{X_n^{(m,\alpha)}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ の任意の有限次元分布は $m \to \infty$ としたとき多次元標準正規分布に収束する。即ち、任意の $n \in \mathbf{Z}$ と

$k \in \mathbf{N}$ に対し

$$(X_n^{(m,\alpha)}, \dots, X_{n+k-1}^{(m,\alpha)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(\mathbf{0}, I_k) \qquad \text{as } m \to \infty. \tag{vanish}$$

が成り立つ。(vanish は従属性の消滅の意) ここで $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ は法則収束を表し I_k は k 次単位行列である。さらに相関の減衰について次のことが成り立つ。

$$\limsup_{m\to\infty} \sqrt{\frac{m}{\log\log m}} E\bigl(X_n^{(m,\alpha)} X_{n+k}^{(m,\alpha)}\bigr) = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{a.e. } \alpha$$

つまり、予想はほとんど全ての α に対して正しいというわけであり、その相関の減衰度の評価はぎりぎりのものであったと知れたわけである。しかるに次のことも示される。

- (vanish) が成り立たないような α の集合の Hausdorff 次元は 1 である。

可算集合は次元 0 であるので、この結果によれば (vanish) が成り立たない α は非可算個ある、よって予想は全ての $\alpha \notin \mathbf{Q}$ に対して成り立つわけではないと分かるのである。

無理数回転を用いて乱数生成をするという試みは [Sug 95] に面白い結果がある。また、上に述べたような漸近独立性を用いて準 Monte Carlo 法の有効性に対する議論をする手法は、[SugT 99] においてさらに発展され数々の結果が得られている。

ところで、上の予想で考察した例は

$$\frac{S_m}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{m} r_j(\omega) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{m} r_1(2^{j-1}\omega)$$

に無理数回転を作用させてできる定常列の従属性の漸近消滅であった。この式の最右辺は一般に Riesz-Raikov 和と呼ばれる

$$\sum_{j=1}^{m} f(\theta^{j-1}\omega)$$

の特別な形となっている。次節以下では Riesz-Raikov 和について考えてゆく。

1. Riesz-Raikov 和の大数の法則

Riesz-Raikov 和という名前についてまず説明しよう。$\theta > 1$ ならばほとんど全ての ω に対して $\{\theta^n\omega\}_{n\in\mathbf{N}}$ は mod 1 として torus 上に一様分布する。よって周期 1 を持つ局所 Riemann 可積分函数に対して

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f(\theta^{j-1}\omega) \to \int_0^1 f(x)\,dx \qquad \text{a.s.} \tag{LLN}$$

が成り立つ。ところで $\theta = 2, 3, \ldots$ とするとき、Raikov [Raik 36] は (LLN) が周期 1 を持つ全ての局所 Lebesgue 可積分函数に対して成り立つことを示し、Riesz [Ries 45] はこれが Ergode 定理の一例であると指摘した。即ち一次元 torus 上の変換 $\omega \mapsto \theta\omega$ mod 1 の ergode 性に起因するものであるという指摘である。ここで、 Legesgue 可積分と Riemann 可積分との間の懸崖は大変大きいものである。θ が整数ではないときには (LLN) は Riemann 可積分なもの以外に対しては Kac-Salem-Zygmund [KacSZ 48] や、それを拡張した Erdős [Erd49], Izumi [Izu 51] のように函数の連続率に条件をつけて証明することはできるが、それなしに証明するのは大変困難である。一般の L^2 函数に対して (LLN) が成り立つことは Bourgain [Bour 90] が代数的な θ に対してようやく示し、また 最近 Rio [Rio ??] が、任意の $f \in L^1$ に対して a.e. θ に対して (LLN) が成り立つという、almost sure version of LLN を示した。全ての θ と Lebesgue 可積分な f に対して (LLN) が成り立つか否かはまだ分かっていない。

このように θ が整数の場合と非整数の場合では扱いの困難さが違うのが Riesz-Raikov 和の特徴とも言える。これは θ が整数の場合は Lebesgue 確率空間上の良い混合性を持つ変換の orbit の解析と思えるのに対し、θ が非整数の場合はそのような議論が有効ではないからであると思われる。

以上は一次元 torus 上の結果であるが、多次元の場合にも Fan [Fan 95] や Lesigne [Les 98] 等の結果が得られている。

2. Riesz-Raikov 和の中心極限定理

まず Kac [Kac 46] の示した中心極限定理を紹介しよう。$\theta = 2, 3, \ldots$, f は有界変動または Hölder 連続な周期 1, 平均 $\int_0^1 f = 0$ を持つ函数とする。このとき Lebesgue 確率空間 $\big([0,1), d\omega\big)$ 上で中心極限定理

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{m} f(\theta^{j-1}\omega) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2) \tag{CLT}$$

が成り立つ。ここで極限分散 σ^2 は

$$\sigma^2 = Ef^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} Ef(\,\cdot\,)f(\theta^n\,\cdot\,)$$

と与えられる。後に Ibragimov [Ibr 60] も独立に同様の結果を得ている。

非整数の θ についての中心極限定理は完成するのに幾分時間がかかった。

まず Takahashi [Tak 62] は θ が有理数の巾根でない場合に $\mathbf{R}$ 上の相対測度の下で (CLT) が $\sigma^2 = Ef^2$ として成り立つことを示した。

Berkes [Berk 76a], [Berk 76b] は Lebesgue 確率空間上で (CLT) が全ての $\theta > 1$ に対して成り立つことを示したが、極限分散 σ^2 は確定できなかった。

Kaufman [Kauf 80] は代数的かつ有理数の巾根ではない θ に対して、また、ほとんど全ての $\theta > 1$ に対して (CLT) が $\sigma^2 = Ef^2$ として成り立つことを示した。

Petit [Pet 92] は θ が有理数の巾根である場合、$\theta^r \in \mathbf{Q}$ となる最小の $r \in \mathbf{N}$ について $\theta^r = a/b$ $(a, b \in \mathbf{N})$ とおくと、(CLT) が成り立ち、極限分散が

$$\sigma^2 = Ef^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} Ef(a^n \cdot)f(b^n \cdot)$$

と与えられることを示した。

Fukuyama [Fuk 94a] は θ が有理数の巾根ではない場合に (CLT) が $\sigma^2 = Ef^2$ として成立することを示して、この問題を解決した。

以上の結果では函数の連続率についてさまざまな仮定がなされているが、それについては有界連続性や Hölder 連続性を含むより弱い条件がそれぞれ仮定されていることだけ注意し、詳細を省略する。

また、局所中心極限定理も Calderoni-Campanino-Capocaccia [CCC 85] や Petit [Pet 96] によって示されているが、全ての θ について解決しているわけではない。

3. Riesz-Raikov 和の中心極限定理に於ける無理数回転の従属性

我々は正規化した Riesz-Raikov 和

$$\frac{S_m}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^{m} f(\theta^{j-1}\omega)$$

が $m \to \infty$ として正規分布に収束することを前節で見た。ここでは最初の問題に戻り、この $S_m/\sqrt{m}$ に無理数回転を施して得られる列 $\{X_n^{(m,\alpha)}(\omega) = S_m(\omega + (n-1)\alpha)/\sqrt{m}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ の従属性について考える。Rademacher 函数系の場合と同様にこの定常列はほとんど全ての α に対して gaussian i.i.d. に収束することが示され、また、そうならないような α も Haussdorf 次元 1 を持ち、十分たくさんあることが分かる。以上は単なる結果の拡張にすぎないが、gap theorem の技法を用いた解析により、次のようなことも分かる。[Fuk 96]

即ち、定常列の列 $\{X_n^{(m,\alpha)}\}_{m\in\mathbf{N}}$ は相対 compact であって、どのような列 $\{m_i\}$ に対しても定常列の列 $\{X_n^{(m,\alpha)}\}_{m_{i_k}\in\mathbf{N}}$ がある列の分布に収束するような部分列 $\{m_{i_k}\}$ をとることができる。そしてそこに現れる極限は gaussian 定常列であり、それ以外の分布は現れない。

最初に述べた Rademacher の場合の結果は gaussian i.i.d. に収束する場合以外の情報は皆無であったが、この結果を用いると部分列をとれば必ずある gaussian 定常列に収束させうることが分かる。

無理数回転の従属性の消滅の現象は Riesz-Raikov 和全般に現れる普遍的なものであることが分かったわけである。これが、他の変換や他の type の和についても成り立つか否かという問題は今後の課題であるが、次節で述べるような Riesz-Raikov 和の変形のようなものについてはある程度の結果が得られる。

4. Baker の列の中心極限定理と無理数回転の従属性

ここでいう Baker の列とは次のようなものである。$\tau \in \mathbf{N}$ とし、$q_1, \dots, q_\tau$ は互いに素な正の整数列とする。集合 $\{q_1^{i_1} \dots q_\tau^{i_\tau} \mid i_1, \dots, i_\tau \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ を増大順に並べた列を $\{n_j\}$ と書き、Baker の列と呼ぶのである。

Marstrand [Mar 70] はこの列に対し次の大数の法則を証明した。任意の周期 1 を持つ有界可測函数 f に対し

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f(n_j\omega) \to \int_0^1 f(x)\,dx \qquad \text{a.s.}$$

というものである。Nair [Nai 90] は仮定の有界性を局所 Lebesgue 可積分性に弱めた。この結果は $\tau = 1$ とすると、ちょうど 1 節に述べた Raikov の定理になる。

この列は数論的興味からさまざまな研究がなされて来たものであり、特に中心極限定理としては Philipp [Phi 94] が $f = \cos$ の場合に示している。

Fukuyama-Petit [FukP ??] はこの Baker の列に関しても Riesz-Raikov 和の場合と同様に中心極限定理が成り立つことを示した。即ち、 f が周期 1, 平均 $\int_0^1 f = 0$ を持ち、よい連続性を持つなら

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{m} f(n_j \omega) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2)$$

が成り立つというものである。ここで極限分散は

$$\sigma^2 = \sum_{j,k \in \mathbf{N}: \gcd(n_j, n_k) = 1} E f(n_j \cdot) f(n_k \cdot)$$

で与えられる。

この列に関して無理数回転を作用させて得られる定常列の従属性についてであるが、これも今までと同様ほとんど全ての α に対して漸近消滅することが示される。これら一連のことの証明には Murai [Mur 87] の間隙三角級数に対する中心極限定理を一般係数をもつ配列に書き換えた version を用いる。このことは Riesz-Raikov 和の中心極限定理の証明に於いても Salem-Zygmund [SalZ 47] にある通常の列に対する中心極限定理ではなく、Salem-Zygmund [SalZ 48] にある配列に対する中心極限定理を用いることに対応している。

5. Riesz-Raikov 和の non-conventional average の中心極限定理

最後に今までの問題とは離れるが、やはり数論的興味から研究されている non-conventional average と Riesz-Raikov 和の関係について述べておこう。

この問題は数論に於ける Erdős-Turán の予想に端を発する。Erdős-Turán の予想とは、「$\mathbf{N}$ の部分集合 A の上密度 $\limsup_{n\to\infty} \#(A \cap [1, n])/n$ が正なら、A は任意の長さの等差数列を含む。」というもので、これは Szemerédi により証明されたので、現在は Szemerédi の定理と呼ばれているものである。

Furstenberg-Katznelson-Ornstein [FurKO 82]: はこの定理の確率論的証明を与えるのだが、その副産物として示されるのが、non-conventional average の ergode 定理と呼ばれるものである。詳しくは Furstenberg-Weiss [FurW 96] を参照されたい。

この結果の中から最も典型的なものを我々の興味のある Riesz-Raikov 和の場合に書き換えると $\theta = 2, 3, \ldots$ に対して

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f(\theta^{p(j-1)}\omega)g(\theta^{q(j-1)}\omega) \to \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 g(x)\,dx$$

といったものになる。ここで p, q は無限遠で正に発散する多項式で $p-q$ が定数でないものである。

これについて [Fuk ??a] は中心極限定理を示した。即ち、 f, g が周期 1, 平均 0 を持つ十分に連続率の高い函数ならば

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^{m} f(\theta^{p(j-1)}\omega)g(\theta^{q(j-1)}\omega) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,\sigma^2)$$

ここで極限分散は次のように与えられる。p, q のいずれかが 2 次以上ならば

$$\sigma^2 = Ef^2Eg^2$$

ともに 1 次の場合、$p(x) = ax + b$, $q(x) = cx + d$ とおくと、θ^a, θ^b の少なくとも一方が有理数の巾根でない場合には極限分散はやはり上と同様に与えられる。そうでない場合は θ^{an}, θ^{bn} がともに有理数になる最小の自然数 n をとり、 $\theta^{an} = p/q$, $\theta^{bn} = r/s$ とかくとき、

$$\sigma^2 = Ef^2Eg^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} Ef(p^n\,\cdot)f(q^n\,\cdot)Eg(r^n\,\cdot)g(s^n\,\cdot)$$

ときれいな形で与えられる。

参考文献

[Berg 86] V. Bergelson, *Weakly mixing PET*, Ergod. Th. Dyn. Sys., **7** (1987) 337–349

[Berk 76a] I. Berkes, *On the asymptotic behavior of* $\sum f(n_k x)$, *Main theorems*, Zeit. Wahr. verw. Geb., **34** (1976) 319–345.

[Berk 76b] I. Berkes, *On the asymptotic behavior of* $\sum f(n_k x)$, *Applications*, Z. Wahr. verw. Geb., **34** (1976) 347–365.

[Bour 90] J. Bourgain, *The Riesz-Raikov theorem for algebraic numbers*, Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday: Part II (Papers in analysis, number theory and automorphic L-functions), Workshop on L-functions, number theory, harmonic analysis, Tel-Aviv, Israel 1989, Israel mathematical conference proceedings, **3** (1990) 1–45.

[CCC 85] P. Calderoni, M. Campanino, D. Capocaccia, *A local limit theorem for a sequence of interval transformations*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **5** (1985) 185–201.

[Erd 49] P. Erdős, *On the strong law of large numbers*, Trans. Amer. Math. Soc., **67** (1949) 51-56.

[Fan 95] A. H. Fan, *Almost everywhere convergence of Riesz-Raikov series*, Coll. Math., **68** (1995) 241–248.

[Fuk 94a] K. Fukuyama, *The central limit theorem for Riesz-Raikov sums*, Prob. Theory Related Fields, **100** (1994) 57–75

[Fuk 94b] K. Fukuyama, *The central limit theorem for Rademacher system*, Proc. Japan Acad. Ser. A, **70** (1994) 253–256.

[Fuk 96] K. Fukuyama, *Riesz-Raikov sums and Weyl automorphism*, Monte Carlo Methods Appl., **2** (1996) 271–293.

[Fuk ??a] K. Fukuyama, *The central limit theorem for* $\sum f(\theta^n x)g(\theta^{n^2}x)$, Ergod. Th. Dynam. Sys., to appear

[Fuk ??b] K. Fukuyama, *The central limit theorem for for non-conventional average*, preprint

[FukP ??] K. Fukuyama, B. Petit, *Le théorème limite central pour les suites de R.C. Baker*, preprint.

[FurW 96] H. Furstenberg, B. Weiss, *A mean ergodic theorem for* $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(T^n x)g(T^{n^2}x)$, Convergence in ergodic theory and probability, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., de Gruyter, Berlin, **5** (1996) 193–227.

[FurKO 82] H. Furstenberg, Y. Katznelson, D. Ornstein: *The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem*, Bull. Amer. Math. Soc., **7** (1982) 527–552.

[Ibr 60] I. A. Ibragimov, *Asymptotic distribution of values of certain sums*, Vestn. Leningr. Univ. **1** (1960) 55–69.

[Izu 51] S. Izumi, On the strong law of large numbers, Tôhoku Math. J. Ser. 2, **3** (1951) 298-305.

[Kac 46] M. Kac, *On the distribution of values of sums of type* $\sum f(2^k t)$, Ann. Math. **47** (1946) 33–49.

[KacSZ 48] M. Kac, R. Salem, A. Zygmund, *A gap theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., **63** (1948) 235-243.

[Kauf 80] R. Kaufman, *On the approximation of lacunary series by Brownian motion*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **35** (1980) 61–66

[Les 98] E. Lesigne, *Loi des grands nombres pour des sommes de Riesz-*

Raikov multidimensionnelles, , Compos. Math., **110** (1998) 39–49

[Mar 70] J. M. Marstrand, *On Khinchin's conjecture about strong uniform distribution*, Proc. London Math. Soc., **21** (1970) 540–556.

[Mur 87] T. Murai, *The central limit theorem for trigonometric series*, Nagoya Math. J., **87** (1982) 79-94.

[Nai 90] R. Nair, *On strong uniform distribution*, Acta. Arith., **56** (1990) 183–193.

[Pet 92] B. Petit, *Le théorème limite central pour des sommes de Riesz-Raikov*, Probab. Theory Relat. Fields, **93** (1992) 407–438

[Pet 96] B. Petit, *θ-transformations, θ-shifts and limit theorems for some Riesz-Raikov sums*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **16** (1996) 335–364

[Phi 94] W. Philipp, *Emiprical distribution functions and strong appoximation theorems for dependent random variables. A problem of Baker in probabilistic number theory*, Trans. Amer. Math. Soc., **345** (1994) 705–727.

[Raik 36] D. Raikov, On some arithmetical properties of summable functions, Rec. Math. Moscow, **1** (1936) 377–383.

[Ries 45] Riesz, F.: Sur la théorie ergodique, Comment. Math. Helv., **17** (1945) 221–239.

[Rio ??] E. Rio, *Lois fortes des grands nombres presque sûres pour les sommes de Riesz-Raikov*, preprint.

[SalZ 47] R. Salem, A. Zygmund, *On lacunary trigonometric series I*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **33** (1947) 333–338.

[SalZ 48] R. Salem, A. Zygmund, *On lacunary trigonometric series II*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **33** (1948) 54–62.

[Sug 95] H. Sugita, *Pseudo-random number generator by means of irrational rotation*, Monte Carlo methods and Appl., **1** (1995) 35-57.

[SugT 99] H. Sugita & S. Takanobu, *Limit theorem for symmetric statistics with respect to Weyl transformation: Disappearance of dependency*, J. Math. Kyoto Univ., **38** (1999) 653–671.

[Tak 62] S. Takahashi, *On the distribution of values of the type* $\sum f(q^k t)$, Tôhoku Math. J. **14** (1962) 233–243.