

## 2個の遅れを持つロトカ・ヴォルテラ型差分方程式系の 大域的安定性とパーマネンス

大阪府立大学工学部 齋藤 保久 (Yasuhisa Saito)  
大阪府立大学工学部 馬 万彪 (Wanbiao Ma)  
大阪府立大学工学部 原 惟行 (Tadayuki Hara)

### 1. Introduction

2個の遅れ  $k, l$  をもつ Lotka-Volterra 型差分方程式系

$$\begin{aligned} x(n+1) &= x(n) \exp\{r_1[1 - x(n) - \mu_1 y(n-k)]\} \\ y(n+1) &= y(n) \exp\{r_2[1 - \mu_2 x(n-l) - y(n)]\} \end{aligned} \tag{1}$$

の大域的安定性とパーマネンス (*permanence*) について考察する. 初期条件は

$$\begin{aligned} x(-m) &\geq 0, m = 0, 1, \dots, \max\{k, l\}; x(0) > 0 \\ y(-m) &\geq 0, m = 0, 1, \dots, \max\{k, l\}; y(0) > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

である. ここで  $r_1, r_2, \mu_1, \mu_2$  は  $r_1 > 0, r_2 > 0, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$  なる定数であり, 遅れ  $k, l$  は負でない整数とする. また (1) が正の平衡点  $(x^*, y^*)$  をただ1つもつと仮定して考える. すなわち

$$x^* = \frac{1 - \mu_1}{1 - \mu_1 \mu_2} > 0, \quad y^* = \frac{1 - \mu_2}{1 - \mu_1 \mu_2} > 0$$

とする. このことから  $\mu_1, \mu_2$  は

$$\mu_1 < 1 \text{ かつ } \mu_2 < 1 \quad \text{もしくは} \quad \mu_1 > 1 \text{ かつ } \mu_2 > 1 \tag{3}$$

のいずれかの場合しかなくなることを注意しておく.

(1) が大域的安定であるとは,  $(x^*, y^*)$  が大域的漸近安定であることを意味する. また (1) がパーマネント (*permanent*) であるとは, 第1象限  $R_+^2$  の内部にあるコンパクトな領域  $D$  が存在し, (1) の全ての解が終局的に  $D$  の中に留まることを言う. したがって  $(x^*, y^*)$  が大域的漸近安定であれば, 必然的に (1) は *permanent* である.

方程式系 (1) は, 2 個の遅れ  $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$  をもつ Lotka-Volterra 型微分方程式系

$$\begin{aligned} x'(t) &= r_1 x(t)[1 - x(t) - \mu_1 y(t - \tau_1)] \\ y'(t) &= r_2 y(t)[1 - \mu_2 x(t - \tau_2) - y(t)] \end{aligned} \quad (4)$$

の差分版といえる (cf. [4]). 方程式系 (4) がただ 1 つの正の平衡点をもつという仮定の下で, 大域的安定性と *permanence* に関して次の定理が成立する (cf. [3]):

**Theorem A.**

(4) において, 任意の  $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$  に対し次の 3 つは同値である:

- (I)  $\mu_1 < 1$  かつ  $\mu_2 < 1$ .
- (II) 正の平衡点が大域的漸近安定である.
- (III) (4) が *permanent* である.

我々の目標は, (1) の大域的安定性と *permanence* に関し, Theorem A に相当する次の Conjecture を考察することである:

**Conjecture.**

(1) において,  $0 < r_i \leq 2$  ( $i = 1, 2$ ) のもとで任意の  $k, l$  に対し次の 3 つは同値である:

- (I)  $\mu_1 < 1$  かつ  $\mu_2 < 1$ .
- (II)  $(x^*, y^*)$  が大域的漸近安定である.
- (III) (1) が *permanent* である.

この問題は完全には解決できていないが, 次の 3 つの定理を得ることができた:

**Theorem 1.**

$0 < r_i \leq 1$  ( $i = 1, 2$ ) のもとで, 任意の  $k, l$  に対し次の命題が成立する:

$$(x^*, y^*) \text{ が大域的漸近安定である} \iff \mu_1 < 1 \text{ かつ } \mu_2 < 1.$$

**Theorem 2.**

$0 < r_i \leq 2$  ( $i = 1, 2$ ) のもとで, 任意の  $k, l$  に対し次の命題が成立する:

$$(1) \text{ が } \textit{permanent} \text{ である} \iff \mu_1 < 1 \text{ かつ } \mu_2 < 1.$$

**Theorem 3.**

$$\mu_1 > 1 \text{ かつ } \mu_2 > 1$$

$\implies$  任意の  $k, l$  に対し (1) は *permanent* でない.

Theorem 1 の証明は 1999 年度秋期総合分科会において詳しく説明を行った. 本論文においては証明は省略する. *permanence* を示すための方法として (4) に対しては, Liapunov 関数を用い, 解の時間変数に関する連続性をうまく使った手法が知られている (cf. [3]). しかしながら, (4) は離散時間の力学系であるため, そのような手法は有効でない. 方法論的に差分方程式と微分方程式の間にはかなりの類似点があると認められてはいるが, (1) と (4) の *permanence* に対しては例外であると考えられる. Theorem 2 の証明は, 離散力学系に関する Hutson and Moran [2] の結果 (次節の Lemma 2) を適用して行う.

Theorem 3 は  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) に無関係に成立することに注意してほしい. このことから (3) に注意すれば, Theorem 1 と Theorem 2 の必要性 ( $\implies$ ) に関しては  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) に無関係に成り立つ. Theorem 3 の証明は, ある境界平衡点における線形部分の固有値解析に加えて, 局所不変安定多様体の存在性をうまく使うことによって行う.

**2. Lemmas**

(1) の *permanence* を考えるためにまず, 次の補題を用意する:

**Lemma 1.**

ある 2 つの正の定数  $B_1, B_2$  が存在し, (1) と (2) を満たす任意の解  $(x(n), y(n))$  に対して

$$0 < x(n) \leq B_1, \quad 0 < y(n) \leq B_2$$

が  $n \geq 1$  で成り立つ.

**Proof.** (1) と (2) から,  $n \geq 0$  に対し  $x(n) > 0$  かつ  $y(n) > 0$  は明らかである.  $B_1, B_2$  を決めてやろう. (1), (2) と  $n \geq 0$  に対し  $x(n) > 0, y(n) > 0$  より

$$\begin{aligned} x(n+1) &\leq x(n) \exp r_1 [1 - x(n)], \\ y(n+1) &\leq y(n) \exp r_2 [1 - y(n)] \end{aligned} \tag{5}$$

が  $n \geq 0$  で成り立つ.  $r$  を正の定数として  $f(x) = x \exp r(1 - x)$  と定義してやると

$$\max_{0 \leq x < \infty} f(x) = \frac{1}{r} \exp(r - 1)$$

となることがわかる。したがって (5) から,  $n \geq 0$  に対し

$$\begin{aligned} x(n+1) &\leq \frac{1}{r_1} \exp(r_1 - 1) = B_1, \\ y(n+1) &\leq \frac{1}{r_2} \exp(r_2 - 1) = B_2 \end{aligned}$$

を得る。ゆえに,  $n \geq 1$  に対し

$$0 < x(n) \leq B_1, \quad 0 < y(n) \leq B_2$$

が成立する。

(証明終)

**Remark.** 領域  $M$  を

$$M = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq B_1, 0 \leq y \leq B_2\}$$

と定義すれば, (1) の形と Lemma 1 の証明における  $B_1, B_2$  の定め方から,  $M$  は正の不変集合であることに注意する。

(1) の *permanence* を云うために, 次の補題が必要になる:

**Lemma 2.** ([Hutson and Moran [2]])

$X$  をコンパクト距離空間,  $S$  を  $X$  のコンパクトな部分集合,  $T$  を  $X \rightarrow X$  なる連続写像とし, 次の2つの条件が成立するとする:

- (i)  $X \setminus S$  と  $S$  は  $T$  に対する正の不変集合である.
- (ii) ある連続関数  $P: X \rightarrow R^+$  が存在し,
  - (a)  $P(z) = 0$  ならば  $z \in S$ , 逆も成り立つ.
  - (b) ある  $m > 0$  に対し

$$\liminf_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in X \setminus S}} \frac{P(T^m w)}{P(w)} > 0, \quad z \in S,$$

$$\liminf_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in X \setminus S}} \frac{P(T^m w)}{P(w)} > 1, \quad z \in \omega(S) \text{ ( } S \text{ の正極限集合 )}.$$

このとき  $S$  は repeller である。

$S$  が repeller であるとは,  $S$  のある近傍  $U$  があって, 任意の  $z \in X \setminus S$  に対してある正の整数  $m_0(z)$  が存在し,  $m \geq m_0(z)$  に対し  $T^m z \in U'$  ( $U$  の補集合) が成立することを言う。

## 3. Proof of Theorems

**Theorem 2.**

$0 < r_i \leq 2$  ( $i = 1, 2$ ) のもとで, 任意の  $k, l$  に対し次の命題が成立する :

$$(1) \text{ が permanent である} \iff \mu_1 < 1 \text{ かつ } \mu_2 < 1.$$

**Proof.** 十分性 ( $\Leftarrow$ ).

$$x(n-1) = u_1(n), \quad y(n-1) = v_1(n),$$

$$x(n-2) = u_2(n), \quad y(n-2) = v_2(n),$$

...

$$x(n-l) = u_l(n), \quad y(n-k) = v_k(n)$$

と変数変換すれば, 方程式系 (1) は

$$x(n+1) = x(n) \exp\{r_1[1 - x(n) - \mu_1 v_k(n)]\}$$

$$u_1(n+1) = x(n)$$

$$u_2(n+1) = u_1(n)$$

...

$$u_l(n+1) = u_{l-1}(n)$$

$$y(n+1) = y(n) \exp\{r_2[1 - \mu_2 u_l(n) - y(n)]\}$$

$$v_1(n+1) = y(n)$$

$$v_2(n+1) = v_1(n)$$

...

$$v_k(n+1) = v_{k-1}(n)$$

(6)

に変換される. この方程式系 (6) は,

$$T \begin{bmatrix} x \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_l \\ y \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \exp[r_1(1 - x - \mu_1 v_k)] \\ x \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{l-1} \\ y \exp[r_2(1 - \mu_2 u_l - y)] \\ y \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \end{bmatrix}$$

なる写像  $T$  を導入することにより, 次の離散力学系

$$\begin{bmatrix} x \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_l \\ y \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \mapsto T \begin{bmatrix} x \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_l \\ y \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}$$

とみなすことができる. 明らかに  $T$  は連続写像である.

$z = (x, u_1, u_2, \dots, u_l, y, v_1, v_2, \dots, v_k)$  とし

$$X = \left\{ z \in R^{k+l+2} \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq B_1, 0 \leq u_i \leq B_1 \ (i = 1, 2, \dots, l), \\ 0 \leq y \leq B_2, 0 \leq v_j \leq B_2 \ (j = 1, 2, \dots, k) \end{array} \right\},$$

$$S = \{ z \in X \mid xy = 0 \}$$

と定義しよう (ここで  $B_1$  と  $B_2$  は Lemma 1 で与えられるものである). すると (6) と Lemma 1 から, (6) の全ての解は終局的に  $X$  の中に留まり, また (6) と Remark から,  $X$  は (6) における正の不変集合である. したがって, (6) の解の終局的な状態を調べるという我々の立場から, 上述で定義した連続写像  $T$  の  $X$  への制限  $T|_X : X \rightarrow X$  を (6) の力学系として考えれば十分である. 以下,  $T|_X$  を改めて  $T$  と書くことにすれば, Lemma 2 における  $X, S, T$  が揃う.

(6) の形から,  $X \setminus S$  と  $S$  が  $T$  に対する正の不変集合であることは容易にわかる. よって条件 (i) が成立する.

連続関数  $P : X \rightarrow R^+$  を

$$P(z) = xy$$

と定義する. 明らかに  $P(z) = 0$  ならば  $z \in S$ , 逆も成り立つ. さらに  $z \in S$  に対し

$$\liminf_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in X \setminus S}} \frac{P(Tw)}{P(w)} = \exp[r_1(1 - x - \mu_1 v_k) + r_2(1 - \mu_2 u_l - y)] \quad (7)$$

を得る. これは正である.

次に

$$\liminf_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in X \setminus S}} \frac{P(Tw)}{P(w)} > 1, \quad z \in \omega(S) \quad (8)$$

を示そう.  $\omega(S)$  がどんな集合か調べる.  $0 < r_i \leq 2$  ( $i = 1, 2$ ) なので, Fisher and Goh [1] から,  $\omega(S)$  は次の3つの要素のみから成ることがわかる:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_l \\ y \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(8) を云うためには, (7) に上式の1つ目, 2つ目, 3つ目をそれぞれ代入すればよくて,

$$\liminf_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in X \setminus S}} \frac{P(Tw)}{P(w)} = \exp(r_1 + r_2), \exp[r_2(1 - \mu_2)], \exp[r_1(1 - \mu_1)]$$

をそれぞれ得る. よって (8) が示され, 条件 (ii) が成立する. ゆえに Lemma 2 により  $S$  は repeller となる.  $S$  の定め方から (1) は *permanent* であることが云える.

必要性 ( $\Rightarrow$ ). 必要性の証明は, 次の Theorem 3 を証明することで必然的に帰結される.

(証明終)

**Theorem 3.**

$$\mu_1 > 1 \text{ かつ } \mu_2 > 1$$

$\Rightarrow$  任意の  $k, l$  に対し (1) は *permanent* でない.

**Proof.** (1) と同値な方程式系 (6) を考え, 任意の  $k$  と  $l$  に対して  $S$  が repeller でないことを示せばよい. そのために点  $z_0 \in S$ :

$$z_0 = \begin{bmatrix} x \\ u_1 \\ \vdots \\ u_l \\ y \\ v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

の近くの (6) の解の様子を調べよう. (6) に対し,  $z_0$  での Jacobian 行列を求めると

$$J(z_0) = \begin{bmatrix} 1-r_1 & & & & & & & & -r_1\mu_1 \\ & 1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & \exp[r_2(1-\mu_2)] & & & \\ & & & & & 1 & & 0 & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となり (空白の成分は 0 を表す), 固有方程式

$$\lambda^{k+l}[\lambda - (1-r_1)]\{\lambda - \exp[r_2(1-\mu_2)]\} = 0$$

を得る. よって固有値は

$$0 \text{ (} k+l \text{ 重根), } 1-r_1, \exp[r_2(1-\mu_2)].$$

仮定より  $\mu_2 > 1$  なので,  $1-r_1$  以外の固有値は ( $r_1$  がどんな値であれ) 絶対値は 1 より小さい. もし  $0 < r_1 < 2$  ならば,  $|1-r_1| < 1$  となり,  $J(z_0)$  の固有値は全て絶対値が 1 より小さくなる. したがって  $z_0$  は (6) に対し局所漸近安定となり,  $S$  は repeller でないことが容易に結論づけられる.

それでは,  $r_1 \geq 2$  の場合はどうか? この場合, 線形部分の解析ではもとの非線形系の安定性は判定できない. そこで固有値 0 ( $k+l$  重根) に対応する  $J(z_0)$  の  $k+l$  個の一般化固有ベクトルと固有値  $\exp[r_2(1-\mu_2)]$  に対応する  $J(z_0)$  の固有ベクトルの張る空間に着目する. この空間は  $z_0$  の安定集合と呼ばれる. これを  $E(z_0)$  と書くことにする.

Wiggins [5, pp.21-23] により, 点  $z_0$  のところで  $E(z_0)$  に接する局所不変安定多様体が存在することがわかる. この局所不変安定多様体を  $W_{loc}(z_0)$  と表すことにしよう. もしも  $W_{loc}(z_0)$  における  $z_0$  の近傍で  $X \setminus S$  と共通部分を持つものが存在すれば, その共通部分内の点を初期値とする (6) の解は  $W_{loc}(z_0)$  に沿って  $z_0$  に漸近する. したがって  $W_{loc}(z_0)$  における  $z_0$  の近傍で  $X \setminus S$  と共通部分を持つものが存在することを示すことさえできれば,  $S$  が repeller でないことが云えてしまうのである.

さて, その近傍の存在を示そう.  $W_{loc}(z_0)$  は  $E(z_0)$  に,  $z_0$  のところで接しているため,  $E(z_0)$  が  $X \setminus S$  と  $z_0$  のところで局所的に共通部分を持つことを示せばよい. これが「 $E(z_0)$  に着目する」ゆえんである. 固有値 0 ( $k+l$  重根) に対応する  $J(z_0)$  の  $k+l$  個の一般化固有ベクトルを  $e_1, e_2, \dots, e_{k+l}$  とし, 固有値  $\exp[r_2(1-\mu_2)]$  に対応する  $J(z_0)$  の固有ベクトルを  $e_{k+l+1}$  とすれば

$$E(z_0) = z_0 + \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{k+l}, e_{k+l+1}\}$$



であるが,

$$E(z_0) \supset z_0 + \text{span}\{e_{k+l+1}\}$$

に注意すれば,  $z_0 + \text{span}\{e_{k+l+1}\}$  が  $X \setminus S$  と  $z_0$  のところで局所的に共通部分を持つことを示せばよいことになる.  $e_{k+l+1}$  を求めると

$$e_{k+l+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp[r_2(\mu_2 - 1)] \\ \vdots \\ \exp[lr_2(\mu_2 - 1)] \\ \frac{1-r_1-\exp[r_2(1-\mu_2)]}{r_1\mu_1 \exp[kr_2(\mu_2-1)]} \\ \frac{1-r_1-\exp[r_2(1-\mu_2)]}{r_1\mu_1 \exp[(k-1)r_2(\mu_2-1)]} \\ \vdots \\ \frac{1-r_1-\exp[r_2(1-\mu_2)]}{r_1\mu_1} \end{bmatrix}$$

となる. 上式の第1成分から第  $l+1$  成分はすべて正, 今  $1-r_1 < 0$  なので第  $l+2$  成分から第  $k+l+2$  成分はすべて負である.  $L$  を

$$L > \max\{\exp[r_2(\mu_2 - 1)], \dots, \exp[lr_2(\mu_2 - 1)]\}$$

を満たすようにとれば,  $-1/L < t < 0$  に対して

$$z_0 + te_{k+l+1} \in X \setminus S$$

が成り立つ. ゆえに  $S$  は repeller でない.

(証明終)

## References

- [1] M. E. Fisher and B. S. Goh, Stability results for delayed-recruitment models in population dynamics, *J. Math. Biol.* **19** (1984), 147-156.
- [2] V. Hutson and W. Moran, Persistence of species obeying difference equations, *J. Math. Biol.* **15** (1982), 203-213.
- [3] Z. Lu and Y. Takeuchi, Permanence and global attractivity for competitive Lotka-Volterra systems with delay, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* **22** (1994), 847-856.
- [4] W. Wang and Z. Lu, Global stability of discrete models of Lotka-Volterra type, *Nonlinear Anal.* **35** (1999), 1019-1030.
- [5] S. Wiggins, "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos," Springer, New York, 1990.