数理解析研究所講究録
1128 巻 2000 年 54-58

経済学におけるLotka-Volterra方程式の応用

名古屋学院大学経済学部
吉田博之 (Hiroyuki Yoshida)

1 はじめに

本稿では，Goodwin(1967) のモデルを紹介し，それに関する若干の注意点を述べることを主眼にする．Goodwin のモデルは，数理経済学で用いられる Lotka-Volterra 方程式と同値形式である．まず，Lotka-Volterra 方程式について整理しておこう．Lotka-Volterra 方程式は x を被食者の数，y を捕食者の数として次のように構成される．

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ただし，$a, b, c, d > 0$ である．

この方程式系の生物的解釈については省略するが，数学的性質についていくつかの点について触れておく．

まず，この方程式の定常点は原点 $(0,0)$ と $E(x^*, y^*) = (c/d, a/b)$ との 2 点が存在する．原点において，Jacobi 行列は

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$$

となるので，原点は鞍点であることが分かる．さらに，点 E の近傍においては，Jacobi 行列として

$$\begin{bmatrix} 0 & -(bc)/d \\ (ad)/b & 0 \end{bmatrix}$$

が求められる．これは，線型化による特性根が共役な純虚根であることを示す．したがって，Hartman-Grobman の定理に注意すれば，定常点 E の性質は断定できないことになる．そこで関数

$$H(x,y) = d(x - x^*) + b(y - y^*) - c\log\frac{x}{x^*} - a\log\frac{y}{y^*} \tag{2}$$

を定義する．これに対して，Liapunov の安定性定理を適用することにより，定常点 E は安定である（漸近安定ではない）ことが分かる．

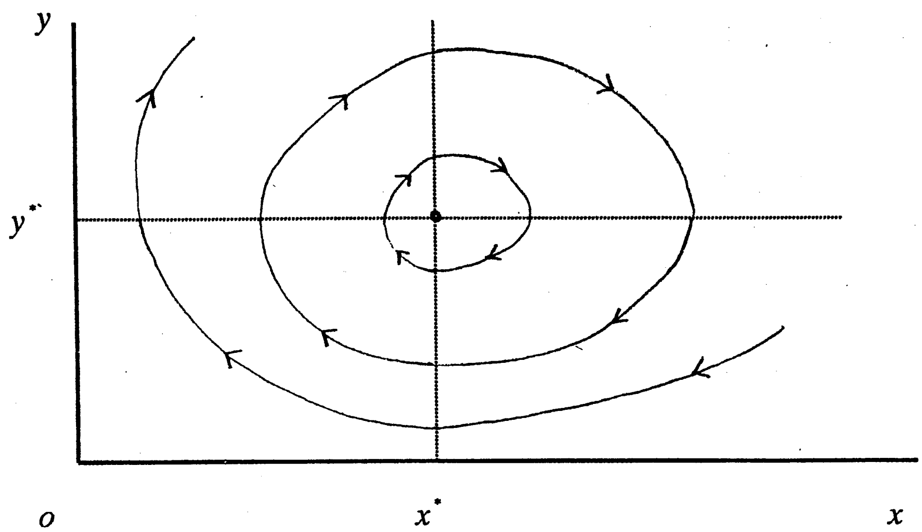

図 1: Lotka-Volterra 方程式の位相図

また，(x, y) が Lotka-Volterra 方程式上の点，つまり，その解であることに注意して，これを時間 t に関して微分すると，

$$\frac{dH(x(t), y(t))}{dt} = 0$$

が得られる．計算過程から，Lotka-Volterra 方程式のいかなる解に対しても関数 H は一定値をとることが分かる．このとき，関数 H は第 1 積分と呼ばれ，第 1 積分を持つ系は「保存系」といわれる．

軌道の大域の性質について，次の 3 つのことが言える．

性質 (1) limit cycle は存在しない．

性質 (2) すべての軌道は閉軌道である．ただし，定常点と座標軸は除く．

性質 (3) 解の 1 周期の平均値は，初期点にかかわらず，定常点 E に等しい一定値をとる．

上述のそれぞれの性質については，スメール&ハーシュ(1976) が詳しいので，正確な証明に関してはこれを参照のこと．Lotka-Volterra 方程式の位相図は図 1) 示される．

また，Lotka-Volterra 方程式の定常点 E が渦心点であったことから，Lotka-Volterra 方程式は構造安定系ではないことがわかる．Lotka-Volterra 方程式に摂動を与えれば，位相的構造は大きく変わってしまうのである．したがって，Lotka-Volterra 方程式の性質として，

性質 (4) Lotka-Volterra 方程式は構造安定系ではない．

も特筆すべき性質であろう．

2 Goodwin (1967) モデル

本節では，先に述べたLotka-Volterra方程式が経済モデルに適用可能であることを示す．以下で使用する記号をあらかじめあげておく．

q：産出，　k：資本，　w：実質賃金率，　a：平均労働生産性，　n：労働供給，　l：労働需要，σ 資本-産出係数，$u = w/a$：労働分配率，$v = l/n$：雇用率

Goodwinモデルにおいて，主要な仮定は以下の7つである．

仮定 (1)　恒常的技術進歩．

$$a(t) = a(0)\exp(\alpha t)$$

仮定 (2)　労働力の恒常的成長．

$$n(t) = n(0)\exp(\beta t)$$

仮定 (3)　2つの生産要素，労働と資本はともに同質的．

仮定 (4)　数量はすべて実質的かつ純量．

仮定 (5)　賃金はすべて消費され，利潤はすべて貯蓄され投資される．

$$(1-u)q = \dot{k}$$

仮定 (6)　資本－産出比率は不変．

$$k = \sigma q$$

仮定 (7)　実質賃金は完全雇用の近傍で上昇，ただし，線型であることを仮定する．これはPhillips曲線と呼ばれるものである．

$$\dot{w}/w = -\gamma + \rho v$$

この7つの仮定のうち，仮定 (5)-(7) について経済学的な補足説明をしておく．仮定 (5) はSayの法則を前提していることと同値である．つまり，このモデルでは，財市場における実現問題は捨象されており，生産されたものは常にすべて販売されつくしてしまうのである．この想定は，設備の完全稼動を意味する仮定 (6) とともに，モデルの古典派的性格を強く特徴づけるものである．また，仮定 (7) は労働市場において失業の存在を許容し，雇用者数の増大は，労働者の賃金交渉力を強めることになるので，賃金の上昇率が雇用率の増加関数となっている．このようなモデルの前提により，このモデルは，産業予備軍と階級闘争が資本制経済における景気の周期的交替の要因であるとするMarxの仮説を定式化したものと解釈ができる．

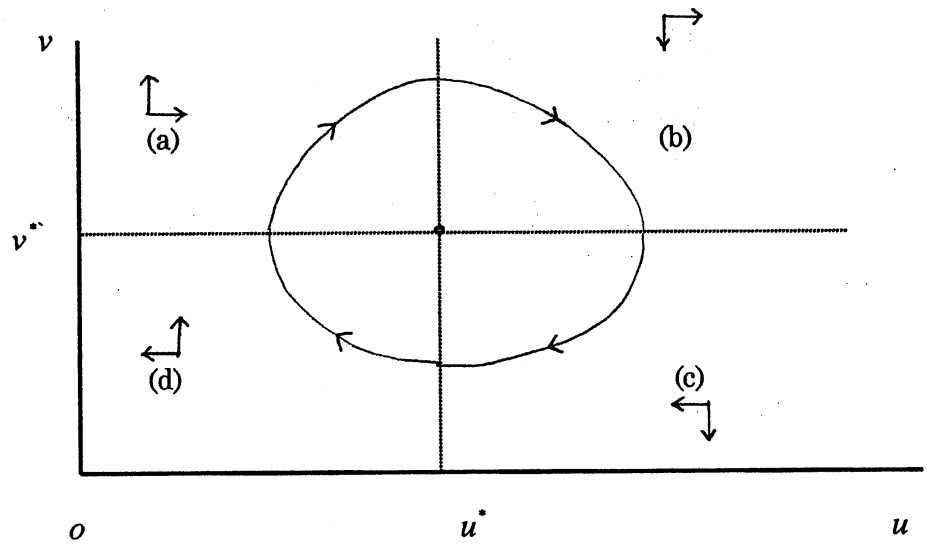

図 2: Goodwin モデルの位相図

以上の仮定をまとめれば，次の 2 本にまとめられた微分方程式体系を得る．

$$\left.\begin{aligned} \dot{u} &= [-(\alpha+\gamma)+\rho v]u \\ \dot{v} &= \left\{\left[\tfrac{1}{\sigma}-(\alpha+\beta)\right]-\tfrac{1}{\sigma}u\right\}v \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ここで，$1/\sigma-(\alpha+\beta)>0$ を仮定すれば，この体系は Lotka-Volterra 方程式にほかならない．非自明な定常点 $E(u^*, v^*)$ は $((\alpha+\gamma)/\rho, \sigma[1/\delta-(\alpha+\beta)])$ となる．この位相図は図 2 に表わされる．

循環の局面を 4 つに分類すれば，定常点 $\dot{u}>0, \dot{v}>0$ となる局面 (a)，$\dot{u}>0, \dot{v}<0$ となる局面 (b)，$\dot{u}<0, \dot{v}<0$ となる局面 (c)，$\dot{u}<0, \dot{v}>0$ となる局面 (d) となるだろう．循環の局面とそのメカニズムについては次のように説明できるだろう．局面 (a) は，好況末期である．雇用率の増大により実質賃金率が上昇し，賃金分配率も大きくなっている．したがって，利潤率は減少し，投資率は下降する．局面 (b) は，不況初期の段階である．利潤圧縮が資本蓄積に及ぼす負の効果があらわれ，雇用率は減少している．局面 (c) は不況末期であり，雇用率の低下により，実質賃金率，賃金分配率ともに減少している．その結果，利潤率が回復してくる．局面 (d) は，好況初期で，利潤率の回復が，資本蓄積の増大を招き，雇用率は増大している．

3　結語

以上，労働者と資本家の対立を厳密に数理分析した Goodwin モデルを概観してきたが，最後に，数学的取り扱いに若干の問題点があることを指摘しておこう．それは，変数の定義域に付随する問題点であり，Goodwin のモデルで考慮される「雇用率」と「労働分配率」は経済学的観点から 0 から 1 の間に取り得る値が限定されなければならないということであ

る．しかしながら，Goodwin モデルでは，この点が考慮されておらず，1 以上の値を取り得る．これは，経済学的観点から見て，不適切であると言わざるを得ないだろう（もちろん，Goodwin の非線型動学に関する先見性や彼の功績を否定するものではない）．この問題を明示的に考えるためには，例えば，Phillips 曲線の定義域を正確に定義し，さらに，その両端点での経済運動を明確にすることがこの問題を解消するための第一段階であろう．ただし，このような変更点によって，Lotka-Volterra 方程式の適用が不可能となることが予想されるので，2 変数における Poincare-Bendixson の定理もしくは，Hopf 分岐の定理の援用が必要になるであろう．このような方向での Goodwin モデルの拡張の一つとして，Flaschel (1988) が挙げられるだろうが，この点の十分満足のいく完全な解決は，将来の残された課題である．

参考文献

1. Flaschel, P. (1988), Fiscal policy in an accelerator-augmented classical growth cycle, in *Recent Approaches to Economic Dynamics*, P.Flaschel and M.Krüger, Peter Lang: Frankfurt
2. Goodwin, R.M. (1967), A growth cycle, in C.H.Feinstein (ed.),*Socialism,Capitalism and Economic Growth*, Cambrige University Press: Cambridge
3. Hirsh, M.W. & S. Smale (1974), *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press: New York (田村・水谷・新井訳『力学系入門』岩波書店)