

H-J 法を用いた 3 次元渦電流計算

九大 機械 金山 寛 (Hiroshi Kanayama)

東大 数理 菊地 文雄 (Fumio Kikuchi)

1. はじめに

ここでは我々が考案に寄与した 3 次元渦電流計算の 1 つの手法に関心がある。通常 3 次元渦電流計算では、未知関数の選択として、 $A-\phi$ 法を採用する。ここに A は磁気ベクトルポテンシャルで ϕ は電位を表す。これとは別に磁場 H と渦電流 J_e 自身を未知関数とする H-J 法を $A-\phi$ 法と同様の考え方で考案したが、最後に紹介するような数値計算結果を示すのにずいぶん時間がかかった。ここでは H-J 法による 3 次元渦電流の計算方法を示し、最後にその計算例を示す。なお、本稿での渦電流問題は、Maxwell 方程式で電束密度の時間微分(変位電流と言う)が十分小さく無視できる場合のみを考える。この仮定は一般に低い周波数領域でのみ許されることを注意しておく。変位電流は長らく無視された後に、Maxwell 自身によって付加された項である。

ここに示す 3 次元渦電流の有限要素法計算に際し、非対

称行列を係数に持つ大次元の疎な連立1次方程式を効率よく解く反復法が望まれている。我々は GMRES (the Generalized Minimum RESidual method) [1]に焦点を絞り、その有効性を調べた。

本稿では、ライブラリ PETSc[2]を用いた非対称係数行列のテスト問題として、約2000自由度の3次元渦電流解析モデルを H-J 法 [3], [4]で計算した結果を掲載している。

2. H-J 法による3次元渦電流問題の定式化

H-J 法による渦電流問題の定式化は、Maxwell 方程式から出発し、変位電流を無視し、多面体領域 Ω 全体での磁場の方程式と導体部分のみの電場の方程式を適切に考慮することにより、次式のように書ける。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_o + \mathbf{J}_e \quad \text{in } \mathbf{R} \times (0, T), \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_o \quad \text{in } \mathbf{S} \times (0, T), \quad (2)$$

$$\text{div } (\mu \mathbf{H}) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (3)$$

$$\text{rot}((1/\sigma) \mathbf{J}_e) = -\partial / \partial t (\mu \mathbf{H}) \quad \text{in } \mathbf{R} \times (0, T), \quad (4)$$

$$\text{div } \mathbf{J}_e = 0 \quad \text{in } \mathbf{R} \times (0, T), \quad (5)$$

$$[(\mu \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}] \int_{\mathbf{R}} = 0 \quad \text{on } \Gamma \times (0, T), \quad (6)$$

$$[\mathbf{H} \times \mathbf{n}] \int_{\mathbf{R}} = 0 \quad \text{on } \Gamma \times (0, T), \quad (7)$$

$$\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma \times (0, T), \quad (8)$$

$$(\mu \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \partial \Omega \times (0, T). \quad (9)$$

初期条件の記述は省略。

ここに多面体領域 Ω は導体領域 R と不導体領域 S から成り、2つの領域の境界 Γ で境界条件(6)–(8)を満たす。

[] \int_R は領域 S の境界値から領域 R の境界値を引くことを意味する。 $\partial \Omega$ は Ω の境界を表し、そこで境界条件(9)を考える。 H は磁場、 J_o, J_e は強制電流密度、渦電流密度を表し、 J_e は H とともに未知関数である。 μ は透磁率 (簡単のため区分的正定数関数とする)、 σ は導電率 (正定数とする)、 $(0, T)$ の T は時間の上限を表す。また \mathbf{n} は境界における外向き単位法線ベクトルを表す。

ここでは正弦波状の交流場に関心があるので、時間微分 $\partial / \partial t$ を $-i\omega$ (ω は角周波数、 i は虚数単位) で置きかえ、複素数表示による定式化を考える。

$$\text{rot } H_r = J_{o_r} + J_{e_r} \quad \text{in } R, \quad (10)$$

$$\text{rot } H_i = J_{o_i} + J_{e_i} \quad \text{in } R, \quad (11)$$

$$\text{rot } H_r = J_{o_r} \quad \text{in } S, \quad (12)$$

$$\text{rot } H_i = J_{o_i} \quad \text{in } S, \quad (13)$$

$$\text{div } (\mu H_r) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (14)$$

$$\text{div } (\mu H_i) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (15)$$

$$\text{rot}((1/\sigma)J_{e_r}) = -\omega \mu H_i \quad \text{in } R, \quad (16)$$

$$\operatorname{rot}((1/\sigma) \mathbf{J}e_i) = \omega \mu \mathbf{H}_r \quad \text{in } R, \quad (17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}e_r = 0 \quad \text{in } R, \quad (18)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}e_i = 0 \quad \text{in } R, \quad (19)$$

$$[(\mu \mathbf{H}_r) \cdot \mathbf{n}] \int_R = 0 \quad \text{on } \Gamma, \quad (20)$$

$$[(\mu \mathbf{H}_i) \cdot \mathbf{n}] \int_R = 0 \quad \text{on } \Gamma, \quad (21)$$

$$[\mathbf{H}_r \times \mathbf{n}] \int_R = 0 \quad \text{on } \Gamma, \quad (22)$$

$$[\mathbf{H}_i \times \mathbf{n}] \int_R = 0 \quad \text{on } \Gamma, \quad (23)$$

$$\mathbf{J}e_r \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma, \quad (24)$$

$$\mathbf{J}e_i \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma, \quad (25)$$

$$(\mu \mathbf{H}_r) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \partial \Omega, \quad (26)$$

$$(\mu \mathbf{H}_i) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \partial \Omega. \quad (27)$$

さらに実部、虚部それぞれの弱形式を考え、静磁場と同様の方法で計算する。

ここで弱形式の記述に必要な関数空間を準備する。 $L_2(\Omega)$ で実2乗可積分空間、 $\| \cdot \|_\Omega$ でそのノルムを表す。すなわち、 $(\cdot, \cdot)_\Omega$ で $L_2(\Omega)$ の内積を表すとき、 $\|v\|_\Omega^2 = (v, v)_\Omega$ と書ける。また、位置ベクトル x の3成分を $x=(x_1, x_2, x_3)$ と表す。

$L_2(\Omega, \mu) = \{v \in L_2(\Omega)\}$ equipped with

the norm $\|v\|_\mu = \|\mu^{1/2} v\|_\Omega,$

$H(\operatorname{rot}; \Omega, \mu) = \{v \in L_2(\Omega, \mu)^3; \operatorname{rot} v \in L_2(\Omega)^3\},$

$H(\operatorname{rot}; \Omega) = H(\operatorname{rot}; \Omega, 1),$

$$H^1(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega); \partial v / \partial x_i \in L_2(\Omega)\},$$

$$T = H(\text{rot}; R), U = H^1(R), V = H(\text{rot}; \Omega, \mu), W = H^1(\Omega).$$

準備ができたので、 $Jo_r \in L_2(\Omega)^3$, $Jo_i \in L_2(\Omega)^3$ を仮定して弱形式を書く。

Find $Je_r \in T$, $Je_i \in T$, $q_r \in U$, $q_i \in U$, $H_r \in V$, $H_i \in V$, $p_r \in W$ and $p_i \in W$ such that

$$\begin{aligned} & (\text{rot } H_r, \text{rot } H_r^*)_{\Omega} + (\text{grad } p_r, \mu H_r^*)_{\Omega} \\ & \quad = (Jo_r, \text{rot } H_r^*)_{\Omega} + (Je_r, \text{rot } H_r^*)_R \\ & \quad \quad \quad \text{for any } H_r^* \in V, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & (\text{rot } H_i, \text{rot } H_i^*)_{\Omega} + (\text{grad } p_i, \mu H_i^*)_{\Omega} \\ & \quad = (Jo_i, \text{rot } H_i^*)_{\Omega} + (Je_i, \text{rot } H_i^*)_R \\ & \quad \quad \quad \text{for any } H_i^* \in V, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & (\mu H_r, \text{grad } p_r^*)_{\Omega} - \tau_p(p_r, p_r^*)_{\Omega} = 0 \\ & \quad \quad \quad \text{for any } p_r^* \in W, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & (\mu H_i, \text{grad } p_i^*)_{\Omega} - \tau_p(p_i, p_i^*)_{\Omega} = 0 \\ & \quad \quad \quad \text{for any } p_i^* \in W, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & (\text{rot}((1/\sigma)Je_r), \text{rot } Je_r^*)_R + (\text{grad } q_r, Je_r^*)_R \\ & \quad = (-\omega \mu H_r, \text{rot } Je_r^*)_R \\ & \quad \quad \quad \text{for any } Je_r^* \in T, \end{aligned} \quad (32)$$

$$(\text{rot}((1/\sigma)Je_i), \text{rot } Je_i^*)_R + (\text{grad } q_i, Je_i^*)_R$$

$$=(\omega \mu H_r, \text{rot } J e_i^*)_R$$

$$\text{for any } J e_i^* \in T, \quad (33)$$

$$(J e_r, \text{grad } q_r^*)_R - \tau_q(q_r, q_r^*)_R = 0$$

$$\text{for any } q_r^* \in U, \quad (34)$$

$$\text{and } (J e_i, \text{grad } q_i^*)_R - \tau_q(q_i, q_i^*)_R = 0$$

$$\text{for any } q_i^* \in U. \quad (35)$$

上記の弱形式において、非負のパラメータ τ_p, τ_q の導入により Lagrange の未定乗数 p_r, p_i, q_r, q_i はいずれも恒等的に 0 とみなせる。実際、 p_r, p_i については、(28), (29)式にそれぞれ $H_r^* = \text{grad } p_r, H_i^* = \text{grad } p_i$ を代入し、さらに(30), (31)式で $p_r^* = p_i^* = 1$ と置くことにより確認できる。 q_r, q_i についても同様に(32), (33)式にそれぞれ $J e_r^* = \text{grad } q_r, J e_i^* = \text{grad } q_i$ を代入し、(34), (35)式で $q_r^* = q_i^* = 1$ と置くことにより確認できる。

有限要素法近似においては、 H_r, H_i 並びに $J e_r, J e_i$ は Nedelec の 4 面体 1 次要素で近似し、(3)式を制約条件とすることにより現れる Lagrange の未定乗数 p_r, p_i 並びに(5)式を制約条件とすることにより現れる Lagrange の未定乗数 q_r, q_i は通常 の 4 面体 1 次要素で近似する。いつものように添え字 h で有限要素法近似を表すことにする。

Find $Je_{rh} \in T_h$, $Je_{ih} \in T_h$, $q_{rh} \in U_h$, $q_{ih} \in U_h$, $H_{rh} \in V_h$, $H_{ih} \in V_h$, $p_{rh} \in W_h$ and $p_{ih} \in W_h$ such that

$$\begin{aligned} & (\text{rot } H_{rh}, \text{rot } H_{rh}^*)_{\Omega} + (\text{grad } p_{rh}, \mu H_{rh}^*)_{\Omega} \\ & = (Jo_r, \text{rot } H_{rh}^*)_{\Omega} + (Je_{rh}, \text{rot } H_{rh}^*)_R \\ & \quad \text{for any } H_{rh}^* \in V_h, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & (\text{rot } H_{ih}, \text{rot } H_{ih}^*)_{\Omega} + (\text{grad } p_{ih}, \mu H_{ih}^*)_{\Omega} \\ & = (Jo_i, \text{rot } H_{ih}^*)_{\Omega} + (Je_{ih}, \text{rot } H_{ih}^*)_R \\ & \quad \text{for any } H_{ih}^* \in V_h, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & (\mu H_{rh}, \text{grad } p_{rh}^*)_{\Omega} - \tau_p(p_{rh}, p_{rh}^*)_{\Omega} = 0 \\ & \quad \text{for any } p_{rh}^* \in W_h, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & (\mu H_{ih}, \text{grad } p_{ih}^*)_{\Omega} - \tau_p(p_{ih}, p_{ih}^*)_{\Omega} = 0 \\ & \quad \text{for any } p_{ih}^* \in W_h, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & (\text{rot}((1/\sigma)Je_{rh}), \text{rot } Je_{rh}^*)_R + (\text{grad } q_{rh}, Je_{rh}^*)_R \\ & = (-\omega \mu H_{ih}, \text{rot } Je_{rh}^*)_R \\ & \quad \text{for any } Je_{rh}^* \in T_h, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & (\text{rot}((1/\sigma)Je_{ih}), \text{rot } Je_{ih}^*)_R + (\text{grad } q_{ih}, Je_{ih}^*)_R \\ & = (\omega \mu H_{rh}, \text{rot } Je_{ih}^*)_R \\ & \quad \text{for any } Je_{ih}^* \in T_h, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & (Je_{rh}, \text{grad } q_{rh}^*)_R - \tau_q(q_{rh}, q_{rh}^*)_R = 0 \\ & \quad \text{for any } q_{rh}^* \in U_h, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\text{and } (Je_{ih}, \text{grad } q_{ih}^*)_R - \tau_q(q_{ih}, q_{ih}^*)_R = 0$$

$$\text{for any } q_{ih}^* \in U_h. \quad (43)$$

弱形式の場合と全く同様な議論で、Lagrange の未定乗数 $p_{rh}, p_{ih}, q_{rh}, q_{ih}$ はいずれも恒等的に 0 とみなせる。

3. モデルの説明

本モデルは、参考文献 [5] 216～219 頁のモデルを 3 次元問題としたものである。

図 1 はソレノイド中に置かれた半径 a の無限長導体を示している。現象はすべて正弦波状に変化するものとする。

このモデルに対し、図 2 に示すように中心角 20° の扇形領域を要素分割した。総自由度は 2180 である。基本境界条件については、上面、下面及び円柱側面に相当する面で $H_{rh} \times n = 0, p_{rh} = 0, H_{ih} \times n = 0, p_{ih} = 0$ とし、導体の両側面で $J_{e_{rh}} \times n = 0, q_{rh} = 0, J_{e_{ih}} \times n = 0, q_{ih} = 0$ とした。その他の境界では自然境界条件を課した。物性値については、透磁率 $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] (全領域)、導電率 $\sigma = 7.7 \times 10^6$ [S/m]、周波数 $f = 60$ [Hz] ($\omega = 2\pi f$)、強制電流密度 $|J_{0r}| = 50$ [A/m²], $|J_{0i}| = 0$ [A/m²] を与えた。

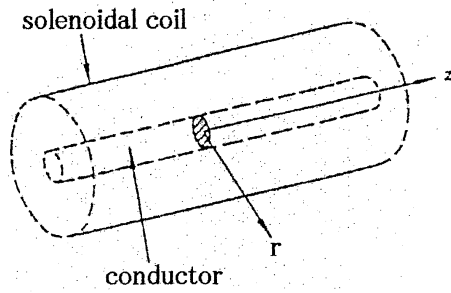


図1 無限長ソレノイド中の導体

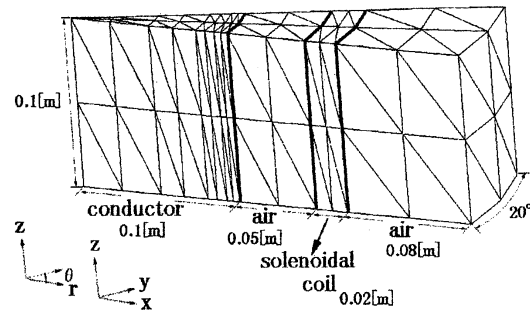


図2 要素分割図

4. 結果

以下に示す図3～図5は $\tau_p = \tau_q = 10^4$ とし、非対称係数行列の連立1次方程式をLU前処理付きGMRES(30)を用いて計算した結果得られたものである(反復4回)。LU前処理を使ったのは、今回のモデルはH-J法のプログラムのデバッグ的な意味を含んでいるため、まずは確実に計算結果を得たかったからである。

図3は導体部分($\theta = 10^\circ$, $z = 0.05$ mの位置)における磁場 H_h の z 方向成分の実部 (H_{zrh}) と虚部 (H_{zih}) を半径方向に表したグラフである。文献[5]の理論解と一致している。文献[3], [4]によれば、H-J法はA- ϕ 法よりも数値計算結果を出すのに工夫がいるが、今回小さいモデルではあるが我々としては初めて結果を出すことができた。図4は H_{rh} と H_{ih} のベクトル図である。図5は渦電流の実部 (Je_{rh}) と虚部 (Je_{ih}) のベクトル

ル図である。

5. おわりに

H-J法とほぼ同様の結果を与える A- ϕ 法を簡単に比較してみる。有限要素法近似の段階で比較すると H-J法では R 領域の J_e の自由度分だけ未知数が増加する。利点は $J_e = -\sigma \partial A / \partial t - \sigma \text{grad } \phi$ が $\text{grad } \phi$ のような空間微分を含まずに直接求められることである。他方、文献[6]の数値計算結果から大雑把な各項のオーダー評価をしてみると、A- ϕ 法が対角優位な状況で離散化されているのに比べ、(40), (41)が、制約条件として扱われる(42), (43)に比べて、相対的に値が小さくなる状態で離散化されていることが予想される。これは H-J法では最終的な大次元の疎な非対称連立1次方程式を解く際により慎重な対応が必要なことを示唆していると思われる。実際、文献[7]の発表当時、特別な工夫をしないで計算したところ、理解に苦しむ数値計算結果が出てきたことを記憶している。

本稿では約 2000 自由度のモデルを扱っているが、現在より高自由度の問題に取り組んでいる。

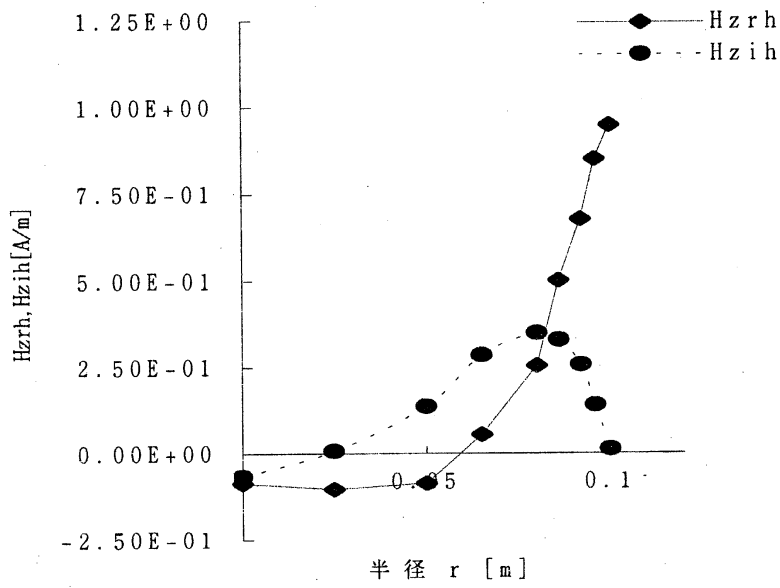


図3 磁場の z 方向成分の実部と虚部

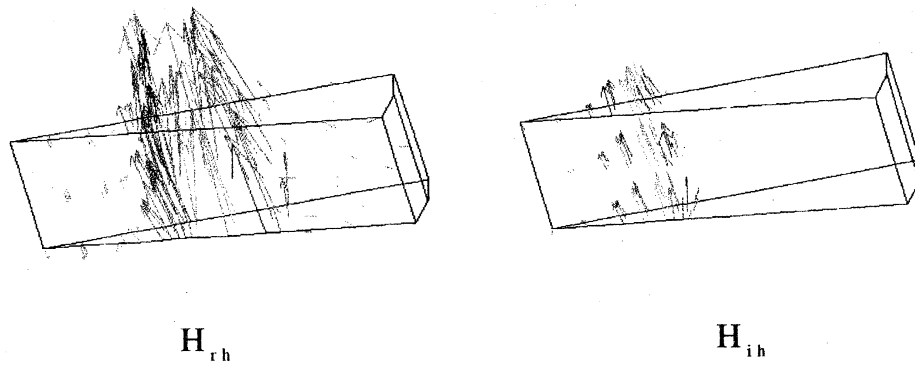


図4 磁場の実部 (H_{rh}) と虚部 (H_{ih})

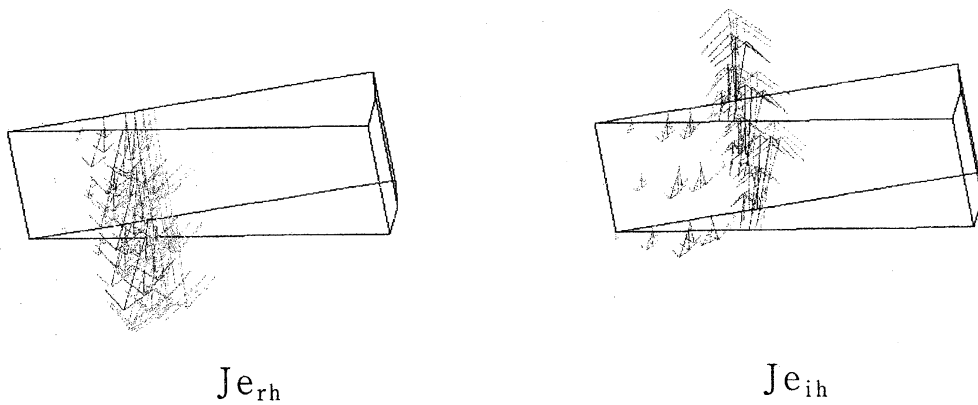


図5 渦電流の実部 ($J_{e_{rh}}$) と虚部 ($J_{e_{ih}}$)

参考文献

- [1] 金山寛, 上村昌己, A. V. Dorupa; 大次元の疎な非対称連立1次方程式の反復解法の試み, 計算力学講演会論文集第3巻第1号, pp.39-42, 1998年5月.
- [2] S.Balay, W.Gropp, L.C.McInnes and B.Smith; PETSc 2.0 Users Manual, <http://www.mcs.anl.gov/petsc>.
- [3] 金山寛, 菊地文雄; 3次元渦電流解析における未知関数の選択について, 日本シミュレーション学会第18回計算・電気電子工学シンポジウム論文集, pp.137-140, 1997年11月.
- [3a] 金山寛, 塩谷隆二, 名切健, 斎藤雅浩, 荻野正雄; 磁場解析における非対称行列用反復法の適用, 日本シミュレーション学会第19回計算電気・電子工学シンポジウム論文集, pp.195-198, 1998年11月.
- [4] H.Kanayama and F.Kikuchi; Some considerations of 3-D eddy current analysis using the Nedelec elements, Computational Mechanics, New Trends and Applications, S.R.Idelsohn, E.Onate and E.N.Dvorkin (Eds.), CIMNE, PART VIII, Section 2,5, pp.1-9, May 1998.
- [4a] H.Kanayama and F.Kikuchi; 3-D eddy current computation using the Nedelec elements, INFORMATION,

Vol.2, No.1, pp.37-45, January 1999.

- [5] 中田高義, 高橋則雄; 電気工学の有限要素法 第2版, 森北出版, pp.216-219.
- [6] H. Kanayama, S. Ikeguchi and F. Kikuchi; 3-D eddy current analysis using the Nedelec elements, Proceedings of ICES'97, pp.277-282, 1997.
- [7] 金山 寛, 本山 浩, 菊地 文雄; Nedelec 要素を用いた三次元磁界解析, 数理解析研究所講究録 717—数値解析と科学計算—, pp.118-126, 1990.
- [8] 菊地文雄; 有限要素法の数理 —数学的基礎と誤差解析—, 培風館, 1994.