数理解析研究所講究録
1130巻 2000年 58-71

物理学から数学へ：Hamilton-Jacobi 理論の誕生

東工大　社会理工　　中根美知代（Michiyo NAKANE）[1]

1. はじめに

数学史の書物では「力学の最速降下線の問題から派生した変分法」，「熱伝導の研究と密接な関係の中ではぐくまれていった３角級数論」というように，物理学が契機になって導かれた数学の理論の例がいくつも挙げられている．また，ラプラス方程式・熱伝導方程式・波動方程式といった，自然現象の解析の過程で導かれた方程式も多数紹介されている．今日の数学や物理学の知識から考えると，その経過は自然と思われるので，私達は「この理論あるいはこの方程式は物理学から出てきた」という議論を抵抗なく受け入れている．Hamilton-Jacobi と称せられる１階非線形偏微分方程式をめぐる理論の起源もそのようなものの一つである．

Hamilton-Jacobi 理論は，今日，解析力学の重要な理論の一部として学ばれている．数学で用いるのは，それとほぼ類似の理論であるから，この理論は物理から出てきたと言われれば，それ以上の議論の余地はないように思われるかもしれない．実際 William Rowan Hamilton (1805-65) は，光学形式や力学形式を整備していくなかで，今日私達が言う Hamilton-Jacobi 形の偏微分方程式に出会った．しかし，「光学あるいは力学から出てきた」といえば，その起源を明らかにしたことになるのだろうか．その理論の原点が物理学にあるならば，それを導いた Hamilton や Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-51) がどのような問題意識を持って現象を解析し，物理学上はどのような成果を得，その結果からいかにして数学の理論のアイデアが生み出していったかを明確に論じなければ，その形成過程を分析したことにはならないだろう．

さらに問題となるのは，物理学から生まれた「アイデア」が，数学の理論として成立するまでの過程である．自然現象の分析を主眼として得られた理論が，直ちに数学の理論になりうるのだろうか．一般的・抽象的な数学の理論として確立されるために，物理学上の考察からは導き得ない重要な手続きが必要とは考えられないだろうか．

Hamilton-Jacobi 理論に関しては，そこまで踏み込んで分析した数学史の著作はない．この報告の目的は，Hamilton，Jacobi らの原典を直接あたり，上に示したことを明らかにすることにある．

こうした問題を論じるときは，何をもって数学といい，物理学というかが問題になるだろう．本報告では，「ある現象を解析・記述しようとしてなされた行為」を物理学的な考察といい，「現象とはとりあえず無関係で，数式や理論を体系化したり整備するためになされた行為」を数学と呼んで，一応の区別としたいと思う．

2. Lagrange の Hamilton への影響

Lagrange の『解析力学』

[1] 東京工業大学大学院社会理工学研究科経営工学専攻技術構造分析講座教務補佐員・成城大学経済学部非常勤講師　e-mail:michiyo.nakane@nifty.ne.jp

Hamilton が「科学の詩」と讃え，彼の幾何光学や力学の研究に最も重要な影響を与えたのは，Joseph Louis Lagrange (1736-1813) が 1788 年に出版した『解析力学』であった．「力学から幾何学的描像を排除し，代数的な手法のみで理論を展開する」と明確に解析力学の理念を打ち出したその著作は，以降の力学研究を方向づけてしまったといっても過言ではないだろう．

Lagrange は，その点でのグラジエントベクトルがそこに働く力を与えるという「力の関数」の概念を確立した．これは，今日のポテンシャルエネルギーに負の記号をつけたものに相当する．力の関数の導入により，先に述べた解析力学の理念が具体化できたのだった．Lagrange は一般座標を導入し，仮想速度の原理を基礎にして，Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, \cdots, n) \qquad (2-1)$$

力学的エネルギー保存則，最小作用の原理

$$\delta \int \sum m_i v_i ds_i = 0 \qquad (2-2)$$

といった，いわゆる Lagrange 形式の基本的な定理や概念を導いた．ここで・は時間微分，T は運動エネルギー，U は力の関数，$(q_1, \cdots, q_n)$ は一般座標，m_i は質点の質量，v_i は速度，ds_i は線要素である．Lagrange の体系では，力の関数は位置のみの関数になっており，保存系に限定して議論が進められている．今日の Lagrange 形式に見るような，$T + U$（今日的には $L = T - U$）が時間を陽に含む場合まで含めた理論が展開されているわけではない．

『解析力学』は力学史上重要な要素をこれ以外にも含んでいるが，とりあえず以上のことを念頭に置いて，議論を進めていくことにする．

正準方程式の起源

Hamilton-Jacobi 理論の重要な道具立てのひとつである，正準方程式の起源についても検討しておこう．Hamilton が正準方程式を導いたときに，参照したものとして，Siméon-Denis Poisson (1781-1840) と Lagrange の論文が挙げられている．実際 Poisson は，摂動関数 Ω を含む Lagrange の運動方程式を定数変化法によって解こうとした際，

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{da'_i}, \qquad \frac{da'_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{da} \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (2-3)$$

という形をした方程式に達していた．ここで (a_1, a_2, a_3) は初期位置，(a'_1, a'_2, a'_3) は初期速度である．ただし，Poisson 自身はこの方程式はさほど重要でないと述べ，それ以上踏み込んだ議論をすることはなかった．この方程式を導いた経過も示していない．([1809])

Poisson がこの論文で Poisson 括弧式を導入したことは指摘されているが，同じ論文で正準形をした方程式が導かれていることは見逃されがちである．正準方程式を導く手続きまで示した Lagrange の論文の方が，Poisson のものより早く出版されているからである．([1809]) しかし論文が口頭発表された日付を見ると，Poisson のもののほうが早い．この

ことから，Lagrange は， Poisson のこの結果を聞き，正準形をした方程式に興味を持ったという経緯が察せられる．Lagrange は Poisson とは異なり，この方程式を重要視した．彼は，この方程式のもつ対称性・単純さが有効であろうと考えたのである．『解析力学』第２版出版の折りには，この形をした方程式の証明と使い方の一例を付け加え，その重要性を再度主張したのだった．

正準形をした方程式の第１発見者は Poisson であるが，それを普及せしめた Lagrange の寄与もまた見落とすことが出来ないだろう．

3. W.R.Hamilton の光学-力学研究

Hamilton の光学研究

力学の Hamilton 形式が導かれる過程を論じるとき，すべての研究者が注目することは，彼の力学形式が光学研究を経て得られた過程であろう．Hamilton 形式は物質粒子の波動性を問題にする量子力学の数学的方法として重要な役割を果たした．このことと Hamilton 形式の形成過程が何らかの関係があると察せられるからである．この報告でも，Hamilton の光学研究から検討していきたい．

Hamilton は，1828 年から 37 年にかけて，“光線系の理論”と題する一連の著作を発表した．Hamilton が「光線系」と名付けたのは，１点から発した発した光線の集まり，されにそれらが鏡で反射されてできた光線の集まりといった，ある共通の性質をもつ光線の集まりのことである．より厳密に言えば，光線の集まりが直交するような面や曲面が存在するような場合を扱っている．すなわち個別の光線を一つ一つではなく，無数の光線群をシステムとして扱い，その幾何学的性質を論じていくのである．

「光線系」の幾何学的性質については，すでにフランスの Étienne Louis Malus (1775-1812) が問題にしていた．([1811]) これに対する Hamilton の研究の新しさは，光線系のあらゆる幾何学的性質を包含する「特性関数」と名付けた関数を導入したことであった．これにより光線系の幾何学的性質を代数的に記述することが可能になり，光学現象の分析が代数的な操作に帰着されるようになる．Hamilton は『解析力学』の理念を幾何光学にも適用したのだった．

特性関数の導入に先だって Hamilton は，光線の軌跡が

$$\delta \int \nu ds = 0 \qquad (3-1)$$

により規定できることを反射・屈折の法則に基づいて証明している．今日 Fermat の原理と呼ばれているものであるが，Hamilton の場合は，光学の基礎原理とは位置づけてはいない．([1828]) 大気中の光線の振る舞いのように，屈折率が連続的に変化するような現象を問題にする場合は，反射・屈折の法則よりもこの形式のほうが使いやすい．以降，Hamilton は (3-1) 式を用いて幾何光学の理論を整備していくことになる．

続いて Hamilton は，反射・屈折の法則から直接「特性関数」を定義した後，(3-1) 式を使って整理し，最終的には，光線系に対する光学の特性関数を

$$I = \int \nu ds \qquad (3-2)$$

と定義した．([not dated-1]) ある点での光線の方向が関数 I のその点での微分係数によりわかることから，Hamilton は関数 I から問題にしている光線系のあらゆる性質が導かれるとしている．この関数 I は偏微分方程式

$$\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)^2 = \nu^2 \tag{3-3}$$

を解くことにより求められる．すなわち，光線系の性質を探求することは，偏微分方程式 (3-3) を解くことに帰着されるのである．求める関数 I を直接含まない 1 階非線形偏微分方程式，すなわち今日の Hamilton-Jacobi 方程式の原型がここで登場したのであった．

Hamilton の手続きによれば，変分原理 (3-1) によって規定されている光線の振る舞いは，特性関数から導かれ，特性関数は偏微分方程式を解くことにより求められるのであった．数学的な視点から見れば，変分の極値を求める問題を偏微分方程式に帰着するという関係が特性関数を媒介として現われてくるのである．当時変分問題は，Euler-Lagrange 方程式と呼ばれる常微分方程式を解いて求められていた．変分問題と偏微分方程式を結びつける新しい研究方向が，幾何光学の探求から見いだされたといえるだろう．

Hamilton の特性関数の理論がもっとも注目されたのは，彼がこれを波動論の立場から解釈することにより「円錐屈折」を予言し，それが検証されたことである．([1837]) この成果は，当時の英国における光の粒子・波動論争に大きな影響を与えた．しかし，今回はこの方面には立ち入らず，Hamilton が光学の成果からいかにして新しい力学形式を導いたかについて論じていこう．

光学と力学の橋渡し

Lagrange の成果を含めると，光学現象と力学現象およびそれらを記述するいくつかの数学形式の間に類似があることに気づく．Hamilton はこれに注目した．とりわけ 1833 年に，力学の作用積分と光学の特性関数がみたす偏微分方程式の類似に気づいた Hamilton は，作用積分がその力学系のすべての性質を記述する「特性関数」になりうるのではないかと予想したのであった．([1833])

＜光学と力学の類似性＞

光学	**力学**
光線	質点の軌跡
Fermat の原理	最小作用の原理
$\delta I = \delta \int \nu ds = 0$	$\delta \int mv ds = 0$
光学の特性関数	力学の作用積分
$I = \int \nu ds$	$V = \int mv ds$

Hamilton が力学の特性関数の理論を発表するに先だって，作用関数を特性関数とみなし，太陽・木星・土星からなる系の３体問題の解析に適用していたことが，残された彼のノートからあとづけられる．[not dated-2] この系の作用積分 V の微分形を計算し，V のみたす偏微分方程式を導き，これを近似的に解こうとする過程で，Hamilton は思いがけない関係式

$$t = \frac{\partial V}{\partial H} \tag{3-4}$$

（H は全エネルギー）

を発見した．太陽と木星からなる２体問題であれば，木星の全エネルギー h_1 は一定であるが，この場合は土星の影響を受けている木星の全エネルギーは位置の関数として変化する．土星の質量を太陽・木星に比べて十分小さいとすれば，h_1 はこの系の全エネルギー H にほぼ等しいと見なすことができる．このような考察から Hamilton は (3-4) 式に達したのであった．

Hamilton は３体問題の考察から全エネルギーを関数として捉える発想に達した．これが今日のハミルトニアンの起源である．保存系の場合には，この関数が定数関数になる．全エネルギーを関数として捉えるという概念に対応するものは幾何光学には現われない．Hamilton の力学形式が導かれるにあたっては，幾何光学で現われる数学形式の類似とともに，３体問題の考察からの成果が大きな要素となった．これまでの歴史的な研究では，この事実はほとんど指摘されていなかった．

力学研究

力学の特性関数　上に述べたような考察に基づいて，Hamilton は 1834 年に“動力学の一般的方法”を発表し，保存系に対する新しい力学体系を発表した．([1834]) そこでは力学の特性関数を

$$V = \int \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i dx_i + \dot{y}_i dy_i + \dot{z}_i dz_i) = \int_0^t 2T dt. \tag{3-5}$$

と定義し，これを質点の位置で微分することにより，Newton の運動方程式の解が得られることが示されている．Hamilton の力学体系では，この関数こそ問題にしている系のあらゆる性質を包含する，運動方程式に代わりうるものであった．そしてこの関数もまた１階非線形偏微分方程式を解くことにより得られるのである．

Hamilton はこの論文の最後で，特性関数を手直し，ほぼ同じ性質を持つ「補助関数」

$$S = V - tH \tag{3-6}$$

を導入した．1835 年の“動力学の一般的方法第２論文”では S を「主関数」と名付け，正準形式の理論を展開している．以降今日まで，Hamilton の力学は特性関数よりも主関数を軸にして構成した形で紹介されているので，こちらを検討することにより Hamilton の力学形式の性質を見ていくことにしよう．

Hamilton 形式の整備　1835 年論文では，いわゆる Hamilton 形式で必要な道具立てが提示されている．([1835])　ここでも，保存系に限定して，議論が進められている．まず，Hamilton は Newton の運動方程式から Lagrange の運動方程式を導き，さらにこれを変形して，いわゆる Hamilton の正準方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, \ldots, 3n) \tag{3-7}$$

を導いた．ここで，$(q_1 \cdots, q_{3n})$ は一般座標，$\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ である．

Hamilton がどのような目的でいわゆる正準座標を導入し，運動方程式をこの形でかいたのか，彼自身による明確な記述はない．ただし，前述した Poisson と Lagrange の摂動関数に関する結果を一般化するとの言明が序文にあることから，Hamilton は運動方程式を正準形でかくことを目的とし，そのために正準座標を導入したのではないかと推定できる．

つぎに Hamilton は，正準方程式に対しても特性関数に相当するものを構成する．補助関数は運動エネルギーと力の関数の和という物理的な量を積分したものであったから，Hamilton はこの量を正準座標でかき換え，主関数

$$S = V - tH = \int_0^t \left(\sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right) dt = \int_0^t (T + U) dt \tag{3-8}$$

を導入した．主関数 S は，1 階非線形偏微分方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_{3n}}, q_1, q_2, \cdots q_{3n}\right) = U(q_1, q_2, \cdots q_{3n}), \tag{3-9}$$

を解くことによって得られる．主関数 S から

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad p_i^0 = \frac{\partial S}{\partial q_i^0}. \tag{3-10}$$

を計算することにより，正準方程式の解が得られる．以上が Hamilton の議論である．

今回は立ち入る余裕がないが，Hamilton 自身が導いた力学の特性関数・主関数のみたす偏微分方程式は初期値に対しても与えられており，連立方程式になっている．ただし，保存系の場合には 1 つめの方程式の解が自動的に 2 つめをみたすので矛盾は生じないといった，不可解な理論構成になっている．また，Hamilton は (3-10) 式が正準方程式の解になることを示す証明の方針を示しているだけで，実際に証明を付してはいない．Hamilton のこれらの不備は，のちに Jacobi が修正し，補っている．

主関数を具体的な問題に応用する前に Hamilton は，重要な注意をした．それは

$$\delta S = \delta \int_0^t (T + U) dt = 0 \tag{3-11}$$

という関係から，Lagrange の運動方程式が得られることである．これが今日の Hamilton の原理の原型である．「原理」と名付けられていることから，Hamilton 自身の力学形式の

基礎原理と思われている場合も多いようであるが，そうではない．彼の力学研究のなかでは副産物であった．

特性関数や主関数を用いて力学の問題をどのように定式化するかについては，Hamilton自身，いくつもの例を挙げて示している．しかし，彼自身が偏微分方程式を解いたのは，1834 年および 35 年の論文を通じて 1 回かぎり，34 年論文で 2 体問題に対する特性関数を求めた時だけである．しかも，Hamilton が求めているのは，今日力学の教科書で強調されている「完全解」ではない．完全解のなかのパラメーターが部分的に消去され，しかも初期条件を満たすようになっている，完全解とも特殊解ともつかない解である．Hamiltonの読んだとされているテキスト類からは，彼は Lagrange が確立した完全解・一般解・特殊解の概念を知っていたと推定されるが，現在言われるような，「完全解」の重要性の認識には達していなかった．

Hamilton にしたがって偏微分方程式を解き，2 体問題の解を求めてみると，実際の計算は，直接 Newton 方程式を解くほうが容易であることがわかる．Hamilton の仕事の意義は，力学の問題の解決にあたって，実用上有効な方法を与えたことではない．運動方程式にかわって，与えられた力学系のすべての性質を演繹できる「特性関数」あるいは「主関数」という概念を提示し，これらを軸にした全く新しい力学体系を構築したことであった．

「特性関数」あるいは「主関数」が導入されることにより，力学の問題は，常微分方程式系で記述される運動方程式の積分を求めることから，1 階偏微分方程式を解いてこれらの関数を求めることに移されていく．数学的な観点からみれば，このことは常微分方程式の解が偏微分方程式を解くことによって得られることを示唆しているのである．18 世紀末から 19 世紀初頭にかけて，Lagrange，Monge (1746-1818)，Pfaff (1765-1825)，Cauchy (1789-1857) らは偏微分方程式をいかにして常微分方程式系に帰着するかを論じてきた．Hamilton は力学の問題の考察を通じて，これとは逆の発想を提示したことになる．また，Hamilton の原理から運動方程式が導かれるというのであれば，力学からもまた，変分問題と偏微分方程式の関係が示唆されることになる．

そうではあっても，Hamilton が構成したのはあくまでも力学の理論であるから，運動エネルギー T は $\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n$ の斉次 2 次関数といった力学上の条件が使われている．数学の理論にするためには，これらの条件をはずしていかなければならない．また，実際問題として，偏微分方程式を解く方が常微分方程式を解くより困難であったとすれば，後者を前者に帰着することはさほど重要な意味を持たなかったであろう．以下，Jacobi によって，これらの課題が解決されていく過程を見ていこう．

4. C.G.J. Jacobi による Hamilton の成果の受容と展開

ロンドン王立学会の機関誌 *Philosophical Transaction* に掲載された Hamilton の力学の論文は，Royal Irish Academy の紀要やダブリン大学の紀要に発表された光学の論文と異なり，広く読まれた．Arthur Cayley (1821-1895) の報告からは，Jacobi，Liouville (1809-82)，Poisson らが Hamilton の結果に対して直ちに反応し，それを修正・拡張して

いったことがうかがわれる．([1857]，[1862]) その中で，力学体系の整備という点でもっとも重要なのは Jacobi の仕事であろう．1837 年論文で示唆されている整備・拡張の方向は，最終的には 1842 年から 43 年にかけて，Königsberg 大学での講義で完成された．[1837a] ここに至るまでの Jacobi の成果を順を追って見ていこう．

3体問題の積分の発見と力の関数の拡張

1836 年前半，Jacobi は，ある特別な場合の 3 体問題の積分を求めることに成功した．太陽・惑星・彗星から系を考える．太陽は座標原点で静止している．彗星の位置を (x, y, z) で表す．惑星は太陽を中心として半径 a_1 の円を描きながら角速度 n' で運動するものとする．この 2 体はお互いに引きつけあい，かつ彗星にも影響を及ぼしている．これに対し彗星は，太陽と惑星から引きつけられてはいるが，それらには影響を及ぼさないとする．Jacobi は，この彗星の積分を求める際に，惑星からの力の関数が時間に依存するものと見なした．この場合エネルギー保存則はなりたたないが，これと角運動量保存則を組み合わせることにより，

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}-n'\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$$
$$=\frac{M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+m'\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2a_1(x\cos n't+y\sin n't)+a_1^2}}-\frac{x\cos n't+y\sin n't}{a_1^2}\right\}$$
$$+const. \qquad (4-1)$$

となる積分が得られることを導いた．([1836]) この問題を通じて，Jacobi は「時間に陽に依存する力の関数」に出会ったのである．

この結果をベルリンやパリのアカデミーで報告した後，Hamilton の結果を知った Jacobi は，それが力の関数が時間を陽に含む場合にも拡張できることを見いだし，直ちにそれに取りかかった．([1837b]) 同時に彼は，Hamilton の導いた偏微分方程式の完全解の重要性を指摘する．すなわち，1 階偏微分方程式

$$U=\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right], \qquad (4-2)$$

の任意定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{3n}$ を含む完全解 S から，

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=\beta_1, \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=\beta_2, \cdots, \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n}}=\beta_{3n}, \qquad (4-3)$$

を計算することにより，運動方程式の解が求まることを示しているのである．ここで $\beta_1, \cdots, \beta_{3n}$ は新しい任意定数である．なお，この時点では，正準形式は導入されておらず，Newton の運動方程式と Decartes 座標が用いられていた．

正準方程式

同年，Jacobi は，Poisson と Lagrange の摂動関数の方程式と Hamilton の運動方程式

を見比べた上で，これらの方程式の形を “Canonique” と名付けた．([1837c]) フランス語で「法規にかなった」という意味である．この報告では便宜上，今日「正準」と称される形をした方程式が登場した時点から正準方程式と呼んできたが，そのように呼ばれるようになったのは実は Jacobi 以降である．

この論文ではまた，方程式の正準形を保つ変数変換に関する定理も証明なしで付されている．ただしそこには，このような変換が Hamilton-Jacobi の偏微分方程式の完全解によってもたらされるといった発想は全く見られない．正準形を保つ変換と Hamilton-Jacobi 方程式の関係が明らかになったのは Poincaré 以降であった．

『力学講義』

Jacobi の遺稿の中には，37 年から 42 年にかかれたと察せられる Hamilton の結果の拡張・修正に関する論文がほかにも見られるが，今回はそれらには触れず，42-43 年の講義について検討していこう．この講義は Jacobi の死後，Clebsch (1833-72) によって『力学講義』として出版されており，今日でも読むことができる．([1866])

<u>変分問題と正準形式</u>　『力学講義』では，いわゆる正準形式の理論が全面的に展開されているが，Hamilton の導いた力学形式を純粋に数学的な変分問題にも適用できるように拡張して理論構成されている．しかし，Hamilton の成果をそのまま力学の問題に適用することはできない．力学の問題と変分問題では以下に示すような違いがあるからである．

＜ Hamilton の力学の理論と数学での変分問題との対比＞

Hamilton の成果	一般の変分問題
$\delta \int_0^t (T+U)dt = 0$	$\delta V = \delta \int_0^t \varphi(t, q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n)dt = 0$
T は $\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n$ の斉次 2 次関数,	$q_i = q_i(t)$
U は $q_1, \cdots, q_n$ の関数	φは（2回）連続微分可能な関数

Jacobi はこれを埋めるため，つぎのような手続きをとった．まず Hamilton の原理を力学の基礎原理として位置づけ，これから直接 Newton の運動方程式と Lagrange の運動方程式，さらに後者から Hamilton の運動方程式を導く．Hamiton の原理を基礎原理とおくことにより，力学の問題が変分問題の一環として定式化できることを示したのである．こうすることにより，時間を陽に含むような力の関数に対する運動方程式も自然に導くことができた．

つぎに，力学の場合は運動エネルギーと力の関数の差であった被積分関数を一般の微分可能な関数にまで拡張しなくてはならない．力学の場合は，T が全エネルギー，すなわち $\dot{q}_1^2, \cdots, \dot{q}_n^2$ の関数という条件があった．Descartes 座標による Jacobi の 1837 年の論文も，正準座標による Hamilton の 1835 年の論文もこの仮定を用いて，偏微分方程式を導いている．しかし，一般の変分問題に対してこのことは仮定できない．そこで Jacobi は，正

準座標の概念を

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_i} = p_i \tag{4-4}$$

のように拡張した．こうすることにより，曲線が極値をとるための条件を正準方程式でかくことができ，単なる微分の計算から，変分問題に対する偏微分方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi\left(t, q_1, \cdots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0 \tag{4-5}$$

が導かれたのであった．ここで

$$\psi(t, q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n) = \sum p_i \dot{q}_i - \varphi(t, q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n)$$

である．こうして，力学の正準形式は変分問題にも適用できるよう拡張された．

Hamilton の正準形式をここまで拡張した上で，Jacobi は偏微分方程式 (4-4) の完全解をパラメーターで微分することによって正準方程式の解が求められることを示している．

Jacobi は，力学の問題を扱う時は，Hamilton の導入した p_i の定義を用いており，(4-4) 式で定義された p_i を用いるのは変分問題の定式化を示した時だけあった．ただし，今日の力学の教科書で紹介されている正準形式は，Jacobi が構成した変分問題に対する正準形式である．今日物理学で学ばれる力学形式は，さまざまな物理現象を記述しようとして導かれたものではなく，純粋に数学的な問題関心から導かれたものであった．

<u>常微分方程式を偏微分方程式に帰着させることの利点の指摘</u>　Hamilton-Jacobi の方法の有効性が認識されたのは，Jacobi が実際に偏微分方程式を解き，直接常微分方程式を解くよりも容易に運動方程式の解が求まる例を示したからであろう．そのなかには，それまでの方法では完全に解くことができなかった２つの固定中心による引力の問題も含まれている．

偏微分方程式の変数が完全に分離する場合には，偏微分方程式の解は求積法で求めることができる．Jacobi 自身述べているように，任意の偏微分方程式に対して適当な座標変換を見いだす法則はないので，その逆，すなわちその座標変換を施すと変数が完全に分離するようになる偏微分方程式を探して，それを解くという手順をとることになる．Jacobi は上の問題に対する Hamilton-Jacobi 方程式が，楕円座標を導入することにより，変数が完全に分離できるようになることを見抜いたのであった．そして彼らの方法で，その問題の完全な解を求めることができた．Jacobi はこのほかにもさまざま座標を導入することにより，変数が完全に分離するようになる方程式の例を挙げ，彼らの方法の有効性を示している．

偏微分方程式を常微分方程式に帰着することは一見して問題を複雑にするように思えるが，そうすることによって問題が容易に解けるようになる場合が実際にある．Hamilton-Jacobi 理論が定着していく過程のなかで，Jacobi の例示はかかせないものであった．

5. おわりに：物理学と数学の関係を考える

これまでの議論に基づいて，Hamilton-Jacobi 理論が形成にあたって，物理学的な問題の考察から得られた数学理論の発想をまとめておこう．

それまでは常微分方程式系に帰着するしかなかった変分問題を，偏微分方程式に帰着するというアイデアは，Hamilton の幾何光学の研究から得られた．また，常微分方程式を偏微分方程式に帰着して解くという発想も，Hamilton が「主関数」を軸とする新しい力学体系を提示することから生まれた．また，ハミルトニアンと呼ばれる関数は Hamilton が，ポテンシャル関数が時間に陽に依存する非自励系の概念は Jacobi が，各自の3体問題の考察から得たものであった．

ただし，これらのアイデアから直ちに数学の理論が構成されたわけではない．Jacobi が，Hamilton の理論に課されていた力学の理論としての制約をはずして一般化し，純粋に数学的な変分形式を構成するという点から再整理したことは，彼らの発見が数学の理論として確立する上でかかせないものであった．さらに Jacobi が常微分方程式を偏微分方程式に帰着することの意味を具体的に示したことは，Hamilton-Jacobi 理論の普及にあたって重要な役割を果たした．

Hamilton-Jacobi 理論はまた，変分法という数学上の理論として完成された理論が，今日の力学の理論として定式化されている例も示している．数学と物理学の関係は，物理学が新しい数学の理論のアイデアを与えるという一方向だけにとどまらない．現象の発見に先だって整備された数学形式が，物理学上の発見や理論整備に役だったといった状況も想像できよう．

Hamilton-Jacobi 理論に限らず,「物理学から出てきた」という以上の分析をしている著作は，現状ではわずかである．自然現象の解析から生まれた数学理論の形成過程の具体的な分析は，物理学と数学との関係を考える上で，今後とも多くの視点を提示する可能性を秘めたものであろう．

参考文献

原論文

A. Cayley,

[1857] "Report on the Recent Progress of Theoretical Dynamics", *Report of the British Association for the Advancement of Science,* 1857, pp.1-42.

[1862] "Report on the Progress of the Solution of Certain Special Problems of Dynamics," *Report of the British Association for the Advancement of Science,* 1862, pp.184-252. = *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley,* vol.4, pp.513-593.

W. R. Hamilton,
The Mathematical Papers, 3 vols.(Cambridge: At the University Press), vol.1, " Geometrical Optics," ed. A.W.Conway and J.L.Synge, Cunningham Memoir no.13, 1931; vol.2, " Dynamics," ed. A. W. Conway and A. J. McConnel (1940), Cunningham Memoir no.14,(1940).
[1828a] "Theory of Systems of Rays (Part First)," *Trans.Roy. Irish Acad.*,**15**, (1828), pp.69-178.= in *Mathematical Papers*, vol.1, pp.1-87.
[not dated-1] "Theory of Systems of Rays (Part Second)," = in *Mathematical Papers*, vol.1, pp.88-106. この論文は，生前は出版されなかったが，全集には収録されている．
[1830] "Supplement to an Essay on the Theory of Systems of Rays ," *Trans.Roy. Irish Acad.*,**16**, part 1 (1830), pp.1-61.=in *Mathematical Papers*, vol.1, pp.107-144.
[1931] "Second Supplement to an Essay on the Theory of Systems of Rays ," *Trans.Roy. Irish Acad.*,**16**, part 2 (1830), pp.93-125.=in *Mathematical Papers*, vol.1, pp.145-163.
[1833] "On a General Method of Expressing the Paths of Light, and of the Planets, by the Coefficients of a Characteristic Function," *Dublin University Review,* October, (1833), pp.795-826= in *Mathematical Papers*, vol.1, pp.311-332 .
[not dated-2] "Problem of Three Bodies by My Characteristic Function"= in *Mathematical Papers*, vol.2, pp.1-102. Hamilton の研究ノートだが，全集には収録されている．
[1834a] "On a General Method in Dynamics," *Phil.Trans.*, Part 2, (1834), pp.247- 308. = in *Mathematical Papers*, vol.2, pp.103-1-161.
[1834b] "On the Application to Dynamics of a General Mathematical Method Previously Applied to Optics ," *Report of the British Association for the Advancement of Science*,(1834) p.513- 518.= in *Mathematical Papers*, vol.2, pp.212- 216.
[1835] "Second Essay on a General Method in Dynamics," *Phil. Trans.* Part 1,(1835), pp.95-144. = in *Mathematical Papers*, vol.2, pp.162 -211.
[1837] "Third Supplement to an Essay on the Theory of Systems of Rays ," *Trans.Roy. Irish Acad.*,**17**, part 1 (1837), pp.1-144.=in *Mathematical Papers*, vol.1, pp.164-293.

C.G.J. Jacobi,
C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke, K. Weierstrass ed. 8 vols, Berlin, 1881-1891.
[1836b] "Sur le mouvement d'un point et sur un cas particulier du problem des trois corps," Lettre adressée à l'Académie des Sciences de Paris, *Comptes rendus*, **t.3**, pp.59-61.= in *Werke* **4**, pp.37-38.
[1837a] "Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen," *Jl. fur die reine u. angew Math.***17**, (1837), pp.68-82.=in *Werke* **4**, pp.41-55.[29 November 1836]
[1837b] "Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systems gewohnlicher Differentialgleichungen," *Jl. fur die reine u. angew Math.*,**17**, (1837), pp.97-

162.=in *Werke* **4**, pp.57-127.
[1837c] "Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique, *Comptes rendus*, **t.5**, (1837) pp.61-67.=in *Werke* **4**, pp.129-136.
[1866] *Vorlesungen über Dynamik*, (1866), Berlin, Clebsch ed. reprinted by Chelsea in 1969.

J.L. Lagrange
[1788] *Mécanique analytique*, 2 vols. 1788 Paris = Œuvres **11, 12**. The page references are to the 3rd and 4th (Blanchard) 1965.
[1797] *Théorie des fonctions analytiques*, 1797 Paris = Œuvres **9**.
[1806] *Leçons sur le calcul des fonctions*, (Second edtion, 1806) = Œuvres **10**.
[1808] "Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique", *Mémoires de la première Classe de l'Institut de France*, 1808, (read on March 13th 1809), *Œuvres de Lagrange*, vol.6, pp.769-805.
[1809] "Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de la mécanique", *Mémoires de la première Classe de l'Institut de France*, 1809, (read on February 19th 1810), *Œuvres de Lagrange*, vol.6, pp.807-816.

S. D. Poisson,
[1809] "Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de la mécanique", *Journal de l'École Polytechnique*, vol.8, (15. cahier), 1809, (read on October 16, 1809), pp.266-344.

E. L. Malus,
[1811] "Traité d'optique," *Mḿoires présentés à l'Institute des sciences par divers savants*, (1811), pp.214-302.

2次文献

S. S. Demidov,
[1982] "The Study of Partial Differential Equations of the First Order in the 18th and 19th Centuries", *Archive for History of Exact Sciences*, vol.26, 1982, pp.325-350.

R. Dugas,
[1955] *A History of Mechanics*, (1988, First edition 1955) Dover.

C. Fraser,
[1983] "J.L.Lagrange's Early Contributions to the Principles and Methods of Mechanics", *Archive for History of Exact Sciences* **28** (1983) pp.197-241.
[1992] "Isoperimetric Problems in the Variational Calculus of Euler and Lagrange," *His-*

toria Mathematica, **19**, (1992),pp.4-23.

H. H. Goldstine,
[1980] *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, (1980), Springer-Verlag.

T.L. Hankins,
[1980] *Sir William Rowan Hamilton*, (1980), The Johns Hopkins University Press.

J. Lützen,
[1990] *Joseph Liouville 1809-1882*, 1990, Springer-Verlag.
[1995] "Interaction between Mechanics and Differential Geometry in the 19th Century," *Archive for History of Exact Science*, vol.49, No.1 (1995)

M. Nakane, （中根美知代）
[1990] "W. R. Hamilton の光学の特性関数と「最小作用の原理」",『科学史研究』, 第II期第29巻（No.173）, pp.30-36.
[1991] "The Role of Three-Body Problem in Construction of Characteristic Function for Mechanics by W. R. Hamilton," *Historia Scientiarum*, vol.1-1, (1991), pp.27-38.
[1992] "ハミルトン形式の形成過程における C.G.Jacobi の寄与",『津田塾大学紀要』No.24, pp.175-186.
[1998] "19世紀の物理学の数学化の意味について",『科学基礎論研究』, Vol.25 (No.2), (1998), pp.43-48.
[Pre-Print] "C.G.J. Jacobi's Discovery of a New Integration and His Extension of Hamilton's Formalism in Dynamics," Pre-Print.

M. Nakane, C. Fraser,
[to appear] "Celestial Mechanics after Laplace: Hamilton-Jacobi Theory," to appear in *Storia della Scienza.*

Y.Yamamoto （山本義隆）
[1981]『重力と力学的世界－古典としての古典力学』, 1981年, 現代数学社.
[1997]『古典力学の形成－ニュートンからラグランジュへ』, 1997年, 日本評論社.

C. Wilson,
[1994] "The Three-Body Problem", *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematics*, vol.2, Routledge, (1994), pp.1054-1062.