

RANDOM WALKS ON FUSION ALGEBRAS

林 倫弘 (TOMOHIRO HAYASHI)

東北大学大学院理学研究科数学専攻

本講演は論文 [H] の内容に関することです。

$A$  を  $\text{II}_1$ -factor,  $\mathcal{C}$  を finite index  $A$ - $A$  bimodule のなす tensor category とする (irreducible decomposition, direct sum, relative tensor product, unitary equivalence, conjugation で閉じているとする).  $\mathcal{C}$  に属する irreducible bimodule の unitary equivalence class 全体を  $S$  とすると自由加群  $\mathbb{C}[S]$  は  $A$ -relative tensor product により積が定まり fusion algebra ([HI]) をなす. 本講演ではこのような bimodule のなす tensor category からできる fusion algebra 上での random walk について考察する. 記号の詳しい定義については [H] ([HY], [HI]) を参照して下さい.

**Definition 1.** Let  $\mathbb{C}[S]$  be a fusion algebra with the multiplicative unit  $I \in S$ . Take two probability measures  $\mu, \nu$  on  $S$  and fix them. For a function  $f \in l^\infty(S)$ ,

- (1)  $f$  is  $(\mu, \nu)$ -harmonic if for  $s \in S$ ,

$$f(s) = \sum_{t \in S} \mu * \delta_s * \nu(t) f(t).$$

- (2)  $f$  is left  $\mu$ -harmonic if it is  $(\mu, \delta_I)$ -harmonic.
- (3)  $f$  is right  $\mu$ -harmonic if it is  $(\delta_I, \mu)$ -harmonic.

The vector space consisting of all  $(\mu, \nu)$ -harmonic functions is a closed subspace of  $l^\infty(S)$ , which is referred to as the  $(\mu, \nu)$ -harmonic function space. Similarly we define left or right harmonic function spaces.

*Notations.*

- (1) Let  $\mathcal{C}$  be a  $C^*$ -tensor category and  $\mathbb{C}[S]$  be the associated fusion algebra. For each  $X, Y \in \text{Object}(\mathcal{C})$ , we write

$$XY = X \otimes Y,$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \text{Hom}(Y, X),$$

$$N_X^Y = \dim \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \dim \text{Hom}(Y, X),$$

$$\delta_X = d(X)^{-1} \sum_{s \in S} N_X^s d(s) \delta_s.$$

- (2) For a von Neumann algebra  $M$ , we denote its center by  $Z(M)$ .

$S$  上の probability measure  $\mu$  に対し, [HY] で用いた構成法を使い, 各 bimodule  $X$  に対し von Neumann algebra  $A_\infty(X)$  及び bimodule  $X_\infty$  を作る. すると  $Z(A_\infty(X))$  ( $A_\infty(X)$  の center) と left  $\mu$ -harmonic function が次の関係で一対一に対応する.

There exists a one to one correspondence between the left  $\mu$ -harmonic function space and the center of  $A_\infty(X)$  such that

$$E_{A_n(X)}(x) = \sum_{s \in S} f(s) I_{A_n^s(X)},$$

where  $x \in Z(A_\infty(X))$  (the center of  $A_\infty(X)$ ) and  $f$  is a left  $\mu$ -harmonic function. (“ $E$ ” means the trace-preserving conditional expectation.)

したがって left  $\mu$ -harmonic function space を調べるには  $Z(A_\infty)$  の構造を見ればよい.

まず, 次のことがわかる.

**Proposition 2.** *Let  $X$  be an object in  $\mathcal{C}$ . If  $XX^*$  generates the category  $\mathcal{C}$ , then the inclusion  $A_\infty \subset A_\infty(X)$  is connected, i.e.,*

$$Z(A_\infty) \cap Z(A_\infty(X)) = \mathbb{C}.$$

この命題と inclusion  $A_\infty \subset A_\infty(X)$  の Pimsner-Popa index が有限であることから次がでる. 証明は Jones tower

$$N \subset M \subset M_1 \subset \cdots \subset M_\infty$$

に対し  $Z(N' \cap M_\infty)$  が atomic 又は diffuse であることを示すのと全く同じ方法でできる.

**Proposition 3.** *Assume that the tensor category  $\mathcal{C}$  is finitely generated. Then the left  $\mu$ -harmonic function space is either atomic or diffuse.*

[HY] の commuting square 構成法を ふたつの probability measure に拡張することで次がいえる.

**Proposition 4.** *The  $(\mu, \mu)$ -harmonic function space consists of only constant functions.*

このことから 特に次がいえる.

**Corollary 5.** *If  $\mathbb{C}[S]$  is commutative,  $\mu$  is always ergodic.*

したがって  $\mathbb{C}[S]$  が可換の時, 自動的に weakly amenable となる ([HI][G] 参照). 次も Proposition 4 の簡単な系である. この系は Theorem 7 の証明で必要になる.

**Corollary 6.** *For any left  $\mu$ -harmonic functions  $f$  and  $g$ , we have*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s, t \in S} f(s) g(t) \mu^n(s) \delta_s * \mu^k(t) = f(I) g(I).$$

最後に fusion algebra が amenable の時を考察する. S. Popa は [P] において次のことを証明した.

**Theorem (Popa [P]).** *Let  $N \subset M$  be an amenable inclusion of  $II_1$ -factors with finite index. Then almost ergodicity implies ergodicity.*

$N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_\infty$  を Jones tower とする. 上の定理は  $N \subset M$  が amenable ならば  $Z(N' \cap M_\infty)$  は一次元又は無限次元のいずれかであることを主張している. この定理は一般の probability measure  $\mu$  に拡張することができる. 次の定理が主要結果である.

**Theorem 7.** *Assume that  $\mathcal{C}$  is amenable. Let  $\mu$  be a symmetric generating probability measure on  $S$  such that  $I \in \text{support}(\mu)$ . Then the left  $\mu$ -harmonic function space is either trivial or infinite dimensional.*

証明はやはり [HY] の構成法を利用する. 我々の証明は subfactor の場合に制限しても Popa のそれとは全く異なり, 別証明になっている.

以下この定理の証明の概略を述べる.  $\mathcal{C}$  ( $\mathcal{C}[S]$ ) が amenable であるとし  $\dim Z(A_\infty) < \infty$  ならば  $Z(A_\infty) = \mathbb{C}$  を示せばよい.  $Z(A_\infty)$  の minimal projection による  $I$  の partition を  $\{p_i\}_{i=1}^{n_0}$  とし 各  $p_i$  に対応する left  $\mu$ -harmonic function を  $f_i$  とおく. すると  $\tau(p_i) = f_i(I)$  が成立している.

**Definition 8.** For each  $X \in \text{Object}(\mathcal{C})$ , we define  $n_0 \times n_0$  matrices as follows:

$$\begin{aligned} M(X)(i, j) &= d_{(A_\infty p_i p_i X_\infty p_j A_\infty p_j)}, \\ \Delta(X)(i, j) &= [A_\infty p_i p_i X_\infty p_j A_\infty p_j]^{1/2}, \\ L(X)(i, j) &= \dim_{A_\infty p_i p_i X_\infty p_j}, \\ R(X)(i, j) &= \dim_{p_i X_\infty p_j A_\infty p_j}, \end{aligned}$$

where  $d(\cdot)$  denotes the quantum dimension (the square root of the minimal index),  $[\cdot]$  means Jones index, and “dim” is the coupling constant. Here we recall that the Jones index  $[X]$  of an  $A$ - $B$  bimodule  $X$  is given by

$$[X] = (\dim_A X) \cdot (\dim X_B).$$

$L(X)$  は次の形をしている.

**Lemma 9.** For each  $X \in \text{Object}(\mathcal{C})$ ,

$$L(X)(i, j) = \frac{d(X)}{\tau(p_i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s, t \in S} f_j(s) f_i(t) \mu^n(s) \delta_s * \delta_{X^*}(t).$$

matrix  $M(X)$ ,  $\Delta(X)$ ,  $L(X)$ ,  $R(X)$  はその定義から次の性質をみたすことがただちにわかる.

**Lemma 10.** For each  $X, Y \in \text{Object}(\mathcal{C})$ , the following statements hold:

- (1)  $M(X \oplus Y) = M(X) + M(Y)$ .
- (2)  $M(XY) = M(X)M(Y)$ .
- (3)  $M(X^*) = {}^t M(X)$ .
- (4)  $\Delta(XY)(i, j) \geq (\Delta(X)\Delta(Y))(i, j)$ .
- (5)  $\Delta(X)(i, j) \geq M(X)(i, j)$ .
- (6)  $\Delta(X)(i, j) = (L(X)(i, j)R(X)(i, j))^{1/2}$ .
- (7)  $R(X)(i, j) = L(X^*)(j, i)$ .

また Perron-Frobenius の定理を用いると次がいええる.

**Lemma 11.** For each  $X \in \text{Object}(\mathcal{C})$  such that  $XX^*$  is a generator, the following inequality holds:

$$\|L_{XX^*}\| \leq \|M(XX^*)\| \leq \|\Delta(XX^*)\| \leq d(X)^2$$

where  $L_{XX^*}$  is the left regular representation of  $XX^*$  on  $l^2(S)$  (see the definition of amenability of fusion algebras in [HY, Definition 2.1]), i.e.,

$$L_{XX^*}\delta_s = \sum_{t \in S} N_{XX^*}^t \delta_t.$$

いま amenability を仮定しているので  $\|L_{XX^*}\| = d(X)^2$  が成立している。このことと上の補題から次が従う。

**Corollary 12.** For each  $X \in \text{Object}(\mathcal{C})$ , we have

$$\Delta(X) = M(X).$$

したがって

$$d_{(A_\infty p_i p_i X_\infty p_j A_\infty p_j)} = [A_\infty p_i p_i X_\infty p_j A_\infty p_j]^{1/2}$$

となる。これは inclusion  $A_\infty p_i \subset \text{End}(p_i X_\infty p_j A_\infty p_j)$  が extremal になることを意味し次が成立する。

**Lemma 13.** The number

$$\alpha_{i,j} = \frac{R(X)(i,j)}{L(X)(i,j)}$$

does not depend on the choice of  $X$  whenever  $L(X)(i,j) \neq 0$  and satisfies

$$\alpha_{i,j} \cdot \alpha_{j,k} = \alpha_{i,k}, \quad \alpha_{i,j}^{-1} = \alpha_{j,i}.$$

一方再び  $\|L_{XX^*}\| = d(X)^2$  を用いると次がわかる。

**Lemma 14.**

- (1) The family of matrices  $\{\Delta(X)\}_{X \in \text{Object}(\mathcal{C})}$  has a common Perron-Frobenius eigenvector

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n_0})$$

( $\gamma_i > 0$ ) such that

$$\Delta(X)\gamma = d(X)\gamma.$$

- (2) For each  $X \in \text{Object}(\mathcal{C})$ ,

$$\|\Delta(X)\| = d(X).$$

*Theorem 7* の証明. We have only to prove that, if the left  $\mu$ -harmonic function space is finite dimensional, it is one-dimensional. We continue to use the notations as above. Recall that  $p_i \in Z(A_\infty)$  corresponds to a left  $\mu$ -harmonic function  $f_i$ . For each probability measure  $\nu$  on  $S$ , define an  $n_0 \times n_0$  matrix  $L_\nu$  by

$$L_\nu(i, j) = \sum_{s \in S} \frac{\nu(s)}{d(s)} L(s)(i, j).$$

Although the notation is not explicit, we remark that  $L(s)(i, j)$  depends on  $\mu$ . By Lemma 9, we get

$$\begin{aligned} L_\nu(i, j) &= \frac{1}{\tau(p_i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s, t, u \in S} \nu(s) f_j(t) f_i(u) \mu^n(t) \delta_t * \delta_s(u) \\ &= \frac{1}{\tau(p_i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t, u \in S} f_j(t) f_i(u) \mu^n(t) \delta_t * \nu(u). \end{aligned}$$

This expression, together with the relation  $L_{\nu^k} = (L_\nu)^k$ , enables us to show that

$$\begin{aligned} L_\mu^k(i, j) &= L_{\mu^k}(i, j) \\ &= \frac{1}{\tau(p_i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t, u \in S} f_j(t) f_i(u) \mu^n(t) \delta_t * \mu^k(u) \\ &\rightarrow \tau(p_j) \end{aligned}$$

as  $k \rightarrow \infty$ . (Here we use Corollary 6.) For each probability measure  $\nu$  on  $S$ , define

$$\Delta_\nu(i, j) = \sum_{s \in S} \frac{\nu(s)}{d(s)} \Delta(s)(i, j).$$

Then we compute

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^k(i, j) &= \sum_{s \in S} \frac{\mu^k(s)}{d(s)} \Delta(s)(i, j) \\ &= \sum_{s \in S} \frac{\mu^k(s)}{d(s)} \alpha_{i,j}^{\frac{1}{2}} L(s)(i, j) = \alpha_{i,j}^{\frac{1}{2}} L_\mu^k(i, j). \end{aligned}$$

Thus  $\Delta_\mu^k(i, j)$  tends to  $\alpha_{i,j}^{\frac{1}{2}} \tau(p_j)$  as  $k \rightarrow \infty$ . On the other hand, by the definition of  $\alpha_{i,j}$ , we have

$$\alpha_{i,j} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L_\mu^k(j, i)}{L_\mu^k(i, j)} = \frac{\tau(p_i)}{\tau(p_j)}$$

and hence

$$\Delta_\mu^k(i, j) \rightarrow (\tau(p_i) \tau(p_j))^{\frac{1}{2}}.$$

This implies that the common Perron-Frobenius eigenvector  $\gamma$  obtained in Lemma 14 is proportional to  $(\tau(p_1)^{\frac{1}{2}}, \dots, \tau(p_{n_0})^{\frac{1}{2}})$ . Therefore, for each  $s \in S$ ,

$$\begin{aligned} d(s)\tau(p_i)^{\frac{1}{2}} &= \sum_j \Delta(s)(i, j)\tau(p_j)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_j \alpha_{i,j}^{\frac{1}{2}} L(s)(i, j)\tau(p_j)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_j \left(\frac{\tau(p_i)}{\tau(p_j)}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{d(s)}{\tau(p_i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t, u \in S} f_j(t) f_i(u) \mu^n(t) \delta_t * \delta_{s^*}(u) \right\} \tau(p_j)^{\frac{1}{2}} \\ &= d(s) \frac{f_i(s^*)}{\tau(p_i)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

and we have  $\tau(p_i) = f_i(s^*)$ . This is equivalent to the relation  $f_i(I) = f_i(s^*)$ . Since  $s$  is arbitrary, each  $f_i$  must be a constant function, showing that  $\mu$  is ergodic.  $\square$

*Remark.*

- (1) 群の場合, left  $\mu$ -harmonic function space は amenability とは無関係に常に trivial 又は diffuse となる (これは [K] で証明されている. 我々の方法で別証を与えることもできる. [H] 参照). しかし一般の bimodule からできる fusion algebra の場合, 2次元になる例が U. Haagerup により得られている ([Ha]). もちろんこの時は non-amenable である.
- (2) left  $\mu$ -harmonic function space (特に  $Z(N' \cap M_\infty)$ ) が無限次元かつ atomic であるような例があるかは (筆者の知るかぎり) まだわかっていない.
- (3) fusion algebra の中には bimodule からこないタイプのものも存在する. このような fusion algebra にはいままでの議論は使えない.

## REFERENCES

- [G] M. O. Gebuhrer, *Remarks on amenability of discrete hypergroups*, in "Harmonic Analysis and Discrete Potential Theory", ed. M. A. Picardello, Plenum Press, New York, 1992, pp. 131-143.
- [Ha] U. Haagerup, talk at conferences "Operator Algebras and Applications", Geneva, 1994.
- [H] T. Hayashi, *Harmonic function spaces of probability measures on fusion algebras*, preprint.
- [HY] T. Hayashi and S. Yamagami, *Amenable tensor category and their realizations as AFD bimodules*, to appear in Jour. Funct. Anal.
- [HI] F. Hiai and M. Izumi, *Amenability and strong amenability for fusion algebras with applications to subfactor theory*, Internat. Jour. Math. **9** (1998), 669-722.
- [K] V. Kaimanovich, *The Poisson boundary of covering Markov operators*, Israel J. Math. **89** (1995), 77-134.
- [P] S. Popa, *Some properties of the symmetric enveloping algebra of a subfactor, with applications to amenability and property T*, preprint.

SENDAI, 980-77, JAPAN

E-mail address: 94m12@math.tohoku.ac.jp