数理解析研究所講究録
1132巻 2000年 51-58

譲渡可能効用を持つ提携形ゲームの均等解の一貫性について

小樽商科大学 商学部 社会情報学科　行方 常幸（Tsuneyuki Namekata）

1. はじめに

本稿において、譲渡可能効用を持つ提携形ゲームの1点解の縮小ゲームによる一貫性について述べる。譲渡可能効用を持つ提携形ゲームに関して、様々な解が提出されている。例えば、(解が1点ではなく集合として定義されている)集合解としては、(ε-、最小）コア、交渉集合、安定集合、(準）カーネル、等がある。一方、1点解としては（準）仁、シャープレイ値、τ-値、(種々の）均等解、等がある。これらの解はそれ独自の意味合いを持ち、他の解と比較可能なように必ずしも定義されているわけではない。そこで、同じ土俵で比較可能なように再定義を試みる研究がなされている。例えば、プレイヤーの総数が固定された集合上で、1点解をいくつかの公理を満たす一意の解として特徴付け、その公理の違いで種々の1点解の違いを解釈しようとする。他方、プレイヤーの総数が可変である集合上で、縮小ゲームによる一貫性を満たすように要求し、縮小ゲームの違いで解の違いを解釈する。本稿で扱うのは後者の縮小ゲームによる一貫性である。

「縮小ゲーム（による一貫）性」: 元のゲームの参加者が元のゲームの解で指定された利得を持ってゲームから退場し、新たなゲーム（縮小ゲーム）ができる。この縮小ゲームにおける残ったプレイヤーの解は元のゲームにおける解と一致すべきである。

縮小ゲームを適切に定義すれば、ある解が上記の縮小ゲーム性（と他の条件）を満たす一意の解として特徴付けられる。このように縮小ゲームの違いで解の違いが解釈できる。本稿では1点解（主に、均等解）の縮小ゲームによる一貫性を考察し、準仁、シャープレイ値、EN^{k}AC-値、等を一意の解として特徴付ける縮小ゲームを紹介する。

本稿の構成は、まず、第2節で種々の解の定義を述べ、第3節で縮小ゲームによる一貫性を定義し、種々の解に一貫性を成立させる縮小ゲームを紹介する。

2. 様々な1点解

譲渡可能効用を持つ提携形ゲーム（transferable utility game, TU-game）はプレイヤーの集合$N:=\{1,2,\ldots,n\}$と**特性関数**$v:2^N\to\mathbb{R}\left(v(\varnothing)=0\right)$の順序対$(N,v)$で与えられる。$N$の部分集合$S$は**提携**と呼ばれ、その**提携値**$v(S)$は$S$のメンバーが協力して得られる利益を表している。ゲーム(N,v)の解は全体提携Nの提携値$v(N)$を各プレイヤーにいかに分

けるかという問題に関係している。TU-ゲームすべての集合を $\boldsymbol{G}$ とする。$\boldsymbol{G}$ 上の 1 点解、**値**とは関数 $\sigma: \boldsymbol{G} \to \mathbb{R}^N$、ただし、$\sigma(N,v) = \left(\sigma_j(N,v)\right)_{j\in N}, \sum_{j\in N}\sigma_j(N,v) = v(N)$ である（Driessen, 1988）。$s:=|S|$（提携 S のメンバーの人数）、特に、n で全体提携 N のメンバーの人数を表す。ここで、本稿で扱う、準仁（Pre-Nucleolus）、シャープレイ値（Shapley Value）、最小二乗値（Least Square Value）、種々の均等解の定義を与える。

利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N, \sum_{j\in N} x_j = v(N)$ に対する提携 S の**不満**を $e^v(S,x) := v(S) - \sum_{j\in S} x_j$ で定義する。この値が大きいほど提携 S は利得ベクトル x に不満を持つ。不満が大きい提携はその利得ベクトルの成立を望まない。2^n 個の不満 $e^v(S,x)\left(S \in 2^N\right)$ を左から非増加の順に並べた、**不満ベクトル** $\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$ を定義する。$\theta(x)$ と $\theta(y)$ の辞書的順序 $\leq_L$ を、$\theta(x)$ と $\theta(y)$ を左の要素から順に比較していって最初に異なる要素の大小で定義する。そして、**準仁** $N^*(N,v)$ をこの辞書的順序 $\leq_L$ における最小値を与える利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N, \sum_{j\in N} x_j = v(N)$ と定義する。すなわち、

$$N^*(N,v) := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, \sum_{j\in N} x_j = v(N), \theta(x) \leq_L \theta(y) \left(\forall y \in \mathbb{R}^N, \sum_{j\in N} y_j = v(N) \right) \right\}$$

準仁は必ず存在しそれは 1 点からなることが知られている。この 1 点を改めて準仁と呼び $\eta^*(N,v)$ で表す。準仁は最大不満の最小化を目指して得られた解である。

シャープレイ値 $Sh(N,v) = \left(Sh_i(N,v)\right)_{i\in N}$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned} Sh_i(N,v) &:= \sum_{S\subset N-\{i\}} \gamma_n(S)\left[v\left(S \cup \{i\}\right) - v(S)\right] \\ &= \frac{1}{n!}\sum_R \left[v\left(S_i \cup \{i\}\right) - v(S_i)\right] \end{aligned}$$

ここで、$\gamma_n(S) := \dfrac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}$（$|S|$は集合 S の要素の個数）であり、R は N の $n!$個の順列を動き、S_i は順列 R において i の左側にいるプレイヤーの集合を表す。2 番目の定義式により、シャープレイ値は次のような意味を持つ。プレイヤーが順列 R に従って順番にある場所へ到着する。プレイヤーi が得る利得はそれまでに形成されていた提携に自分が新たに加わることによる増分 $v\left(S_i \cup \{i\}\right) - v(S)$ である。$n!$個の順列が等確率に発生すると仮定する時の各プレイヤーの得る期待利得がシャープレイ値である。

2 以上の整数 n に対して少なくとも 1 個は 0 ではない n–1 個の非負の重みを $m^n(s)(s=1,\ldots,n-1)$ とする。ただし、$\sum_{s=1}^{n-1}\binom{n-2}{s-1}m^n(s)=1$ となるように規格化しておく。n を 2 以上の整数全部を動かして得られるこれらの重みの集合 M を

$$M:=\left(m^n(s)\right)_{n\geq 2, s=1,\ldots,n-1}$$

とおく。この M に対して次の最小化問題を考察する：

$$\text{Minimize} \sum_{S\subset N, S\neq\varnothing, N} m^n(s)\left[v(S)-\sum_{j\in S}x_j\right]^2$$
$$\text{subject to } x:=\left(x_j\right)_{j\in N}, \sum_{j\in N}x_j=v(N)$$

この最小化問題に対して次のような一意の解が存在する：

$$LS_i^M(N,v):=\frac{1}{n}\left(v(N)-\frac{1}{\alpha^M(n)}\sum_{j\in N}a_j^M(N,v)\right)+\frac{a_i^M(N,v)}{\alpha^M(n)}$$

ただし、$a_i^M(N,v):=\sum_{S\subset N, i\in S, S\neq N} m^n(s)v(S), \alpha^M(n):=\sum_{s=1}^{n-1}\binom{n-2}{s-1}m^n(s)$ である。これが重み M に対する**最小二乗値** $LS^M(N,v)=\left(LS_i^M(N,v)\right)_{i\in N}$ である（Ruiz *et al*, 1998）。

次に、本稿で均等解と呼ぶ値を定義する。

$$ENIC_j(N,v):=IC_j(N,v)+\frac{1}{n}\left[v(N)-\sum_{i\in N}IC_i(N,v)\right]\quad (j\in N) \tag{1}$$

(1)式は次のような意味を持っている。$v(N)$を n 人のプレイヤーに配分するために、まず、各プレイヤー j が自分の寄与分 IC_j を受け取り、次に、残り（不足）を全員で等分する。

ここで、$IC_j(N,v):=v(\{j\})(j\in N)$ であれば、ENIC-値が CIS-（Center of Imputation Set-）値となり、$IC_j(N,v):=v(N)-v(N-\{j\})(j\in N)$ であれば、ENIC-値が ENSC-（Egalitarian Non-Separable Contribution-）値となる。また、

$$IC_j(N,v) := c_j^k(N,v) = \left|\Gamma_k^{j+}\right|^{-1} \sum_{S \in \Gamma_k^{j+}} \left[v(S) - (k-1)\frac{\left(v(N)-v(S)\right)}{n-k} \right] (j \in N)$$

ただし、$\Gamma_k^{j+} := \left\{ S \subset N \| S| = k, j \in S \right\}$

であれば、ENIC-値が EN^{k}AC-値（Egalitarian Non-k-Averaged Contribution-Value）（k=1,…,n−1）となる (Namekata *et al*, 1999)。k=1,n−1 とおけば、EN^{1}AC-値と EN^{n-1}AC-値は各々CIS-値と ENSC-値に一致する。$IC_j(N,v) := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} c_j^k(N,v) (j \in N)$ であれば、ENIC-値がシャープレイ値となる。すなわち、シャープレイ値は均等解とみなせる。

さて、上記に定義したシャープレイ値、最小二乗値、均等解の関係を次の命題にまとめる。

命題 1. 次の(i)、(ii)、(iii)が成り立つ。

(i) $m^n(s) = \frac{1}{n-1}\binom{n-2}{s-1}^{-1}$ ならば、$LS^M(N,v)=Sh(N,v)$となる。

(ii) $m^n(s) = \begin{cases} \binom{n-2}{s-1}^{-1} & s = k \\ 0 & s \neq k \end{cases}$ ならば、$LS^M(N,v)=EN^kAC(N,v)$となる。

(iii) $Sh(N,v) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} EN^k AC(N,v)$ が成立する（Namekata *et al*, 1999)。

この命題 1 によりシャープレイ値と EN^{k}AC-値は最小二乗値とみなせることが分かる。また、シャープレイ値は均等解とみなすことができ、さらに n−1 個の EN^{k}AC-値の平均と表せる。

3. 縮小ゲームによる一貫性

ゲーム(N,v)（$n \geq 2$）に対し、利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ と除かれるプレイヤーi が与えられたときの**縮小ゲーム**$(N-\{i\},v^x)$は次のように与えられる：プレイヤーi は自分の利得 x_i を得て、ゲームから退く。残りのプレイヤー$N-\{i\}$が新しい全体提携となり縮小ゲーム $(N-\{i\},v^x)$ が形成される。この縮小ゲームの特性関数 v^x に関しては $v^x(\varnothing)=0, v^x(N-\{i\})=v(N)-x_i$ だけを仮定する。$v^x(S)\left(S \subset N-\{i\}, S \neq \varnothing, N-\{i\}\right)$ の値は後述の縮小ゲーム性を成立させるために各値ごとに定義される。

縮小ゲーム性： $\boldsymbol{G}$ 上の値σがある縮小ゲームに関してつぎの条件(2)を満たすときそ

の縮小ゲームに対して縮小ゲーム性を満たすという：

$$\sigma_j\left(N-\{i\}, v^{\sigma(N,v)}\right)=\sigma_j(N,v)\left((N,v)\in \boldsymbol{G}, n\geq 2, i\in N, j\in N-\{i\}\right) \tag{2}$$

ある値の縮小ゲーム性は次のことを主張している：元のゲームから1人のプレイヤーがこのゲームの値の自分の取り分を持ってゲームから退く、そのとき、結果として形成される縮小ゲームにおいて、残りのプレイヤーは元のゲームと同じ値を得る。このように縮小ゲーム性は値の一貫性の性質とみなすことができる。

2 人ゲームに対する標準性： $\boldsymbol{G}$ 上の値 σ がつぎの条件(3)を満たすとき 2 人ゲームに対して標準的であるという：

$$\sigma_i\left(\{i,j\},v\right)=v\left(\{i\}\right)+\frac{1}{2}\left[v\left(\{i,j\}\right)-v\left(\{i\}\right)-v\left(\{j\}\right)\right](i\neq j) \tag{3}$$

ここで、7種類の縮小ゲームを定義する。$S\subset N-\{i\}, S\neq\varnothing, N-\{i\}$ に対して、

$$v^x(S):=\max\left[v(S), v(S\cup\{i\})-x_i\right] \tag{4}$$

$$v^x(S):=\frac{|S|}{n-1}\left[v(S)-x_i\right]+\frac{n-|S|-1}{n-1}v(S) \tag{5}$$

$$v^x(S):=\frac{n-|S|-1}{n-1}\left[v(S)-v(N-S)\right]-\frac{|S|}{n-1}x_i \tag{6}$$

$$\begin{aligned} v^x(S):=&\frac{|S|}{n-1}\left[\frac{|S|}{n-2}\left(v\left(S\cup\{i\}\right)-x_i\right)+\frac{1}{n-2}\sum_{l\in N-S\cup\{i\}}v\left(S\cup\{l\}\right)\right]\\ &+\left(1-\frac{|S|}{n-1}\right)\left[\left(1-\frac{|S|-1}{n-2}\right)v(S)+\frac{1}{n-2}\sum_{l\in S}\left(v\left(S\cup\{i\}-\{l\}\right)-x_i\right)\right] \end{aligned} \tag{7}$$

$$v^{M,x}(S):=\frac{m^n(s+1)}{m^n(s+1)+m^n(s)}\left[v(S\cup\{i\})-x_i\right]+\frac{m^n(s)}{m^n(s+1)+m^n(s)}v(S) \tag{8}$$

$$v^x(S):=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|S|-1}{n-2}\right)v(S)+\dfrac{1}{n-2}\displaystyle\sum_{l\in S}\left[v\left(S\cup\{i\}-\{l\}\right)-x_i\right] & \text{if } k\leq|N|-2,\\ v\left(S\cup\{i\}\right)-x_i & \text{if } k=|N|-1.\end{cases} \tag{9}$$

$$v^x(S) := \begin{cases} \dfrac{|S|}{n-2}\left[v\left(S\cup\{i\}\right)-x_i\right]+\dfrac{1}{n-2}\sum_{l\in N-S\cup\{i\}} v\left(S\cup\{l\}\right) & \text{if } k\le |N|-2, \\ v(S) & \text{if } k=|N|-1. \end{cases} \tag{10}$$

以上の縮小ゲームに対して、以下のような命題が成立する。

命題 2. 準仁は 2 人ゲームに対する標準性と(4)の縮小ゲームに関して縮小ゲーム性を満たす唯一の $\boldsymbol{G}$ 上の値である（Sobolev, 1975）。

命題 3. シャープレイ値は 2 人ゲームに対する標準性と(5)または(6)または(7)の縮小ゲームに関して縮小ゲーム性を満たす唯一の $\boldsymbol{G}$ 上の値である（Sobolev, 1973、Driessen, 1991、Namekata et al, 1999）。

この命題 3 より同一の値を特徴付ける複数の縮小ゲームが存在することが分かる。

命題 4. $m^n(s)=m^{n+1}(s)+m^{n+1}(s+1)\ (n\ge 2, s=1,\ldots,n-1)$ ならば、重み M に対する最小二乗値は 2 人ゲームに対する標準性と(8)の縮小ゲームに関して縮小ゲーム性を満たす唯一の $\boldsymbol{G}$ 上の値である（Ruiz *et al*, 1998）。

命題 1 により、重み M を(i)のようにおけば、シャープレイ値を最小二乗値とみなすことができたが、この M は命題 4 の仮定 $m^n(s)=m^{n+1}(s)+m^{n+1}(s+1)\ (n\ge 2, s=1,\ldots,n-1)$ を満足する。この時の縮小ゲーム(8)は(5)と一致する。また、命題 1 において重み M を(ii)のようにおけば、EN^{k}AC-値を最小二乗値とみなすことができたが、この M は k=n−1、すなわち、EN^{n-1}AC-値（ENSC-値）、以外の場合は命題 4 の仮定を満足しない。すなわち、縮小ゲーム(8)では EN^{k}AC-値を特徴付けることができない。しかしながら、EN^{k}AC-値と EN^{n-k}AC-値に関しては次のような命題が成り立つ。

命題 5. EN^{k}AC-値は 2 人ゲームに対する標準性と(9)の縮小ゲームに関して縮小ゲーム性を満たす唯一の $\boldsymbol{G}$ 上の値である（Namekata et al, 1999）。

命題 6. EN^{n-k}AC-値は 2 人ゲームに対する標準性と(10)の縮小ゲームに関して縮小ゲーム性を満たす唯一の $\boldsymbol{G}$ 上の値である（Namekata et al, 1999）。

注 7. われわれは縮小ゲームを形成する時に 1 人のプレイヤーがゲームから退場すると仮定したが、より一般的に複数のプレイヤーが退場すると仮定する立場がある。すなわち、ゲーム(N,v)（$n\ge 2$）に対し、利得ベクトル $x\in\mathbb{R}^N$ と除かれるプレイヤーの集合 N–T $(T\subset N)$ が与えられたときの縮小ゲーム(T,v^x)は次のように与えられる： プレイヤー $i\in N-T$ は自分の利得 x_i を得て、ゲームから退く。残りのプレイヤー T が新しい全体提携となり縮小ゲーム(T,v^x)が形成される。この縮小ゲームの特性関数 v^x に関しては $v^x(\varnothing)=0, v^x(T)=v(N)-\sum_{i\in N-T}x_i$ だけを仮定する。その場合の縮小ゲーム性

は次のように定義される：

$$\sigma_j\left(T, v^{\sigma(N,v)}\right) = \sigma_j(N,v)\ \left((N,v) \in \boldsymbol{G}, n \geq 2, \varnothing \neq T \subset N, j \in T\right)$$

命題2と命題4はこの一般的な仮定のもとでの結果であり、オリジナルな縮小ゲームは、$S \subset T, S \neq \varnothing, T$ に対して

$$v^x(S) := \max\left[v(S \cup R) - \sum_{j \in R} x_j \,\middle|\, R \subset N - T \right] \tag{4'}$$

$$v^{M,x}(S) := \sum_{R \subset N-T} \frac{m^n(s+r)}{\sum_{q=0}^{n-t} \binom{n-t}{q} m^n(s+q)} \left[v(S \cup R) - \sum_{j \in R} x_j \right] \tag{8'}$$

である。

注 8. シャープレイ値に関して命題3と同様のことが成り立つ他の縮小ゲームとして次のようなものがある：

$$v^{\sigma}(S) := v(S \cup \{i\}) - \sigma_i(S \cup \{i\}, v)$$

ここで、縮小ゲームにおける提携値 $v^{\sigma}(S)$ が、特徴付けようとする値の元のゲームにおける利得 $\sigma_i(N,v)$ ではなくゲーム $(S \cup \{i\}, v)$ における利得 $\sigma_i(S \cup \{i\}, v)$ であることに注意する。詳しくは Hart *et al.*（1989）を参照のこと。

4. 終わりに

本稿では、譲渡可能効用を持つ提携形ゲームの1点解に関する縮小ゲームによる一貫性を考察した。主な結果を命題として証明なしで列挙した。証明は参考文献を参照されたい。1点解ではなく集合解であるコアと準カーネルの縮小ゲームによる一貫性に関しては Peleg（1986）が考察している。ゲーム理論に限らず、一貫性に関しては Thomson（1996）が広範に考察している。

参考文献

Driessen, T. S. H. (1988) Cooperative Games, Solutions and Applications. Kluwer Academic Press, Dordrecht, The Netherlands.

Driessen, T.S.H. (1991) A Survey of Consistency Properties in Cooperative Game Theory. *SIAM Review* **33**, 43-59.

Hart, S. and Mas-Colell, A. (1989) Potential, value and consistency. *Econometrica* **57**, 589-614.

Namekata, T. and Driessen, T.S.H. (1999) The Egalitarian Non-k-Averaged Contribution (EN^{k}AC-) value for TU-games. *International Game Theory Review* **1**, 45-61.

Namekata, T. and Driessen, T.S.H. (1999) Reduced Game Property of the Non-k-Averaged Contribution Value and the Shapley Value. Submitted to *International Transactions in Operational Research*.

Peleg, B. (1986) On the reduced game property and its converse. *International Journal of Game Theory* **15**, 187-200; (1987) Correction. *International Journal of Game Theory* **16**, 290.

Ruiz, L.M., Valenciano, F. and Zarzuelo, J.M. (1998) The Family of Least Square Values for Transferable Utility Games. *Games and Economic Behavior* **24**, 109-130.

Sobolev, A.I. (1973) The functional equations that give the payoffs of the players in an n-person game. In *Advances in Game Theory*, E. Vilkas, ed., Izdat. "Mintis," Vilnius, 151-153. (in Russian.)

Sobolev, A.I. (1975) The characterization of optimality principles in cooperative games by functional equations. In *Mathematical Methods in the Social Sciences* **6**, N.N. Vorobev, ed., Vilnius, 94-151. (In Russian.)

Thomson, W. (1996) *Consistent Allocation Rules*. Rochester Center for Economics Research Working Paper No. 418.