数理解析研究所講究録
1134巻 2000年 117-122

ON THE SPECTRUM IN RANDOMLY CURVED QUANTUM WAVEGUIDES

野村　祐司

東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻

1. Introduction.

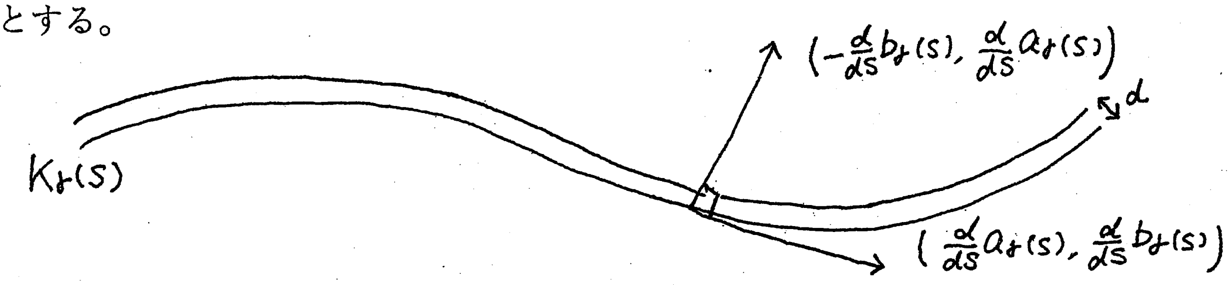
ランダムに曲がった帯状領域 (量子細線)上で Dirichlet 境界条件をもつ ラプラシアンを考え、そのスペクトルを局在化を中心に調べよう。 まず帯状領域を設定しよう。$\mathbb{R}^2$ における曲線はその曲率で 決定されるので、 $\gamma \in C^2(\mathbb{R})$ を曲率とする曲線 $K_\gamma(s)$ は以下のように表示できる。

$$
\begin{aligned}
K_\gamma(s) &\equiv (a_\gamma(s), b_\gamma(s)) \quad (s \in \mathbb{R}) \\
a_\gamma(s) &\equiv \int_0^s \cos\left(-\int_0^t \gamma(\tau)d\tau\right) dt \qquad (1.1)\\
b_\gamma(s) &\equiv \int_0^s \sin\left(-\int_0^t \gamma(\tau)d\tau\right) dt
\end{aligned}
$$

実際、$\left(\frac{da_\gamma(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{db_\gamma(s)}{ds}\right)^2 = 1$ だからこの表示は弧長で径数表示されているので、そのときの 曲率は $\frac{da^2_\gamma(s)}{ds^2}\frac{db_\gamma(s)}{ds} - \frac{db^2_\gamma(s)}{ds^2}\frac{da_\gamma(s)}{ds}$ で与えられ、これは簡単な計算で γ になることがわかる からである。$d > 0$ にたいして帯状領域を

$$
\Omega_{d,\gamma} \equiv \left\{ \left(a_\gamma(s) - u\frac{db_\gamma(s)}{ds}, b_\gamma(s) + u\frac{da_\gamma(s)}{ds}\right) \middle| (s,u) \in \mathbb{R} \times (0,d) \right\} \qquad (1.2)
$$

とする。



このとき問題としたいのは（少し正確さを欠くが）

$$-\Delta \text{ on } L^2(\Omega_{d,\gamma}) \text{ with Dirichlet boundary conditions}$$

のスペクトルである。

$\gamma(s) \equiv 0$ の時には $\Omega_{d,\gamma} = \mathbb{R} \times (0, d)$ だから、$\sigma(-\Delta) = \left[\frac{\pi^2}{d^2}, \infty\right)$ （以下、σ はスペクトル を表わす）となり、絶対連続スペクトルのみが現れる。

P.Exner と P.Šeba は [1] で$0 \not\equiv \gamma$ (とその微分）の 遠方での適当な減衰条件の下では $\sigma_{ess}(-\Delta) = \left[\frac{\pi^2}{d^2}, \infty\right)$ （σ_{ess}は essential spectrum を表わす）であり、$0 < d$ が十分小ならば $\left[0, \frac{\pi^2}{d^2}\right)$ に 少なくとも一つの固有値が現われることを示した。

K.Yoshitomi は[2]で周期的に曲がった帯状領域の場合、即ち γ が 周期関数である場合を調べた。この場合は Bloch解析が適用でき、スペクトル はバンド構造を持つことが示される。さらに[2]では、$\gamma \not\equiv$ const. の時 $d > 0$が十分小ならばスペクトルの gap の存在が示されている。

さて、次にランダムに曲がった帯状領域の場合 を考えよう。特に以下では γ が周期関数からのランダムな摂動の場合を扱う。 [1],[2] では$\Omega_{d,\gamma}$ が自己交差をしない、即ち写像

$$\mathbb{R} \times (0, d) \ni (s, u) \longmapsto \left(a_\gamma(s) - u\frac{db_\gamma(s)}{ds}, b_\gamma(s) + u\frac{da_\gamma(s)}{ds}\right) \in \Omega_{d,\gamma}$$

が injective になるように設定されているが、ランダムな場合には一般には 自己交差をする可能性が排除できない（実際、以下で我々が扱っている場合 には必ず自己交差をする）。 しかし quantum waveguides を考察していることを思えば、$(s, u) \neq (s', u')$ ならば違う点とみなしたい。従って以下のように設定し直すことにしよう。

$M = \mathbb{R} \times (0, d) \ni (s, u)$ に以下のように Riemann 計量を入れる。

$$\begin{aligned} &\rho(s, u)^2 ds^2 + du^2 \\ &\rho(s, u) \equiv 1 + u\gamma(s) \ \ (> 0) \end{aligned} \tag{1.3}$$

このとき M 上の Dirichlet 境界条件をもつ Laplace-Beltrami 作用素は

$$-\Delta_M \equiv -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial u}\rho\frac{\partial}{\partial u}\right) \text{ on } L^2(\mathbb{R} \times (0, d), \rho(s, u)dsdu) \tag{1.4}$$

となる。ここで $L^2(\mathbb{R} \times (0, d), \rho(s, u)dsdu)$ は $\mathbb{R} \times (0, d)$ 上の可測関数で測度 $\rho(s, u)dsdu$ に関して 二乗可積分なものの全体のなす Hilbert 空間とする。

さらに

$$(1.5)\qquad \begin{aligned} U: L^2(\mathbb{R}\times(0,d),\rho(s,u)dsdu) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}\times(0,d),dsdu)\\ f(s,u) &\longmapsto \sqrt{\rho(s,u)}f(s,u)\end{aligned}$$

というユニタリー変換によって

$$(1.6)\quad H\equiv U(-\Delta_M)U^* = -\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial s}-\frac{\partial^2}{\partial u^2}+V(s,u)\ \text{ on }\ L^2(\mathbb{R}\times(0,d))$$

with Dirichlet boundary conditions に変換される。ここで

$$V(s,u)\equiv\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}u\gamma''(s)-\frac{5}{4}\frac{1}{\rho^4}u^2\gamma'(s)^2-\frac{1}{4}\frac{1}{\rho^2}\gamma(s)^2$$

で与えられる。(1.6) の自己共役作用素のスペクトルが考察すべき対象である。

2. 曲率のrandomness.

以下の仮定を置く。

Assumption

(A.1) $\gamma_0\in C^2(\mathbb{R})$ を周期 l (>0) をもつ 実数値周期関数とし、$\gamma_{0,\min}\equiv\min_{s\in\mathbb{R}}\gamma_0(s)$ とすると

$$(2.1)\qquad \gamma_{0,\min}>0$$

を満たす。($C^2(\mathbb{R})$ は2階連続微分可能な関数の全体)

(A.2) $0\le f\in C_0^2(\mathbb{R})$ であり、

$$F(s)\equiv\sum_{i\in\mathbb{Z}}f(s-il),\quad F_{\min}\equiv\min_{s\in\mathbb{R}}F(s)$$

とすると

$$(2.2)\qquad F_{\min}>0$$

を満たす。($C_0^2(\mathbb{R})$ はコンパクトな台をもつ 2階連続微分可能な関数の全体)

(A.3) $\{q_i(\omega)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ をある確率空間 $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 上の独立同分布な確率変数の族で、分布は $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上の一様分布とする。

(A.4)　g は disorder parameter で、

$$0 \le g < g_0,\quad \text{但し}\ g_0 \equiv \frac{2}{\max_{s\in\mathbb{R}} F(s)}$$

とする。

以上の下で、曲率 γ にrandomness を導入しよう。 random な曲率を 周期関数からの摂動として

$$\gamma_{g,\omega}(s) \equiv \gamma_0(s)\left(1 + g\sum_{i\in\mathbb{Z}} q_i(\omega) f(s-il)\right) \tag{2.3}$$

と定義しよう。 $g=0$ のときは、曲率は周期関数 γ_0 であり、disorder の parameter g が増加していくに従い曲率 $\gamma_{g,\omega}$ の randomness が増えていくと解釈できる。考察すべき作用素は以下の ramdom な係数をもつ二階楕円型編微分作用素である。

$$H_{g,\omega} \equiv -\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{\rho_{g,\omega}^2}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} + V_{g,\omega}\ \text{ on }\ L^2(\mathbb{R}\times(0,d)) \tag{2.4}$$

with Dirichlet boundary conditions, 但し

$$\rho_{g,\omega}(s,u) \equiv 1 + u\gamma_{g,\omega}(s)$$
$$V_{g,\omega}(s,u) \equiv \frac{1}{2}\frac{1}{\rho_{g,\omega}^2}u\gamma_{g,\omega}''(s) - \frac{5}{4}\frac{1}{\rho_{g,\omega}^4}u^2\gamma_{g,\omega}'(s)^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{\rho_{g,\omega}^2}\gamma_{g,\omega}(s)^2$$

である。

(A.5) (gap の存在)　(a,b) は $\sigma(H_{0,\omega})$ の gap である。

3. Localization.

最初に $H_{g,\omega}$ のもつある ergodicity から $\Sigma^g, \Sigma^g_{ac}, \Sigma^g_{sc}, \Sigma^g_{pp} \subset \mathbb{R}$ が存在して

$$\sigma(H_{g,\omega}) = \Sigma^g\ \ P-\text{a.s.},\quad \sigma_{ac}(H_{g,\omega}) = \Sigma^g_{ac}\ \ P-\text{a.s.},$$

$$\sigma_{sc}(H_{g,\omega}) = \Sigma^g_{sc}\ \ P-\text{a.s.},\quad \sigma_{pp}(H_{g,\omega}) = \Sigma^g_{pp}\ \ P-\text{a.s.}$$

が成り立つことを注意しておく。ただし、$\sigma_{ac}, \sigma_{sc}, \sigma_{pp}$ はそれぞれ絶対連続スペクトル、特異連続スペクトル、 pure point スペクトルを表わす。

次が主結果である。

Theorem 1. *(A.1)–(A.3)* を仮定する。ならば、 d_0 が存在して、$0 < d < d_0$ に対し *(A.5)* が成立していれば、 $0 < g' < g_0$ を満たす g' と $[0, g']$ 上で単調増加、*Lipschitz* 連続関数 $a(g)$, $[0, g']$ 上で単調減少、*Lipschitz* 連続関数 $b(g)$ が存在して以下を満たす。

(i) 定数$0 < c_1 < c_2, 0 < c_1' < c_2'$が存在して

$$a + c_1 g \leq a(g) \leq a + c_2 g < b - c_2' g \leq b(g) \leq b - c_1' g$$

(ii) $\sigma(H_{g,\omega}) \cap [a, b] = [a, a(g)] \cup [b(g), b] \quad P - a.s. \quad (g \in [0, g'])$

(iii) $a_1(g)$と$b_1(g)$ $(g \in (0, g'])$が存在して

$$a \leq a_1(g) < a(g) < b(g) < b_1(g) \leq b$$

を満たし $[a_1(g), a(g)] \cup [b(g), b_1(g)]$ で局在する, すなわち、*pure point spectrum* で, 対応する固有関数は指数関数的に 減衰する.

4. 証明の概略 .

証明の概略を述べよう。いくつかの記号と概念を用意する。 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (0, d)$, $L > 0$ に対して

$$\Lambda_L(x) \equiv \left\{ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times (0, d) \,\middle|\, |y_1 - x_1| < \frac{L}{2} \right\}$$

$$\tilde{\Lambda}_L(x) \equiv \left\{ y = (y_1, y_2) \in \Lambda_L(x) \,\middle|\, |y_1 - x_1| > \frac{L}{2} - l \right\}$$

$$H^{\Lambda_L(x)} \equiv H|_{L^2(\Lambda_L(x))} \text{ with Dirichlet boundary conditions}$$

$$R_{g,\omega}^{\Lambda_L(x)}(z) \equiv (H_{g,\omega}^{\Lambda_L(x)} - z)^{-1}$$

とする。また、領域 Λ に対してX_Λ は Λ の 定義関数とする。

Definition 1. $m > 0, E \in \mathbb{R}, x = (x_1, x_2), x_1 \in l\mathbb{Z}, 4l \leq L \in 2l\mathbb{N}$ に対し、$\Lambda_L(x)$ が $(m, E) - regular$ であるとは $E \notin \sigma(H_{g,\omega}^{\Lambda_L(x)})$ かつ

$$\left\| X_{\tilde{\Lambda}_L(x)} R_{g,\omega}^{\Lambda_L(x)}(E) X_{\Lambda_l(x)} \right\|_{\Lambda_L(x)} \leq e^{-\frac{mL}{2}}$$

が成立することとする。ただし$\|\cdot\|_{\Lambda_L(x)}$ は は作用素ノルムとする。

Definition 2. $m > 0, E_0 > -c_0 \equiv \inf V_{g,\omega}, p > 1, m_0 > 0, 0 < \beta < 1, q > 4p+6, L_0 \in 2l\mathbb{N}$に対して, 条件 (P1), (P2) を以下の様に定める。

$$(P1)\quad \mathbb{P}\{\Lambda_{L_0}(0) \text{ が } (m_0, E_0) - regular\} \geq 1 - L_0^{-p}$$

$$(P2)\quad -c_0 < E\text{を満たす任意の}E\text{と任意の}L_0 \leq L \in 2l\mathbb{N}\text{に対し}$$

$$\mathbb{P}\{d(E, \sigma(H_\omega^{\Lambda_L(0)})) < e^{-L^\beta}\} \leq (E + c_0)L^{-q}$$

次の定理が示される。

Theorem 2. $0 < m < m_0$ に対し $B = B(m_0, m, \beta, p, q) > 0$ が存在して $L_0 \geq B$について *(P.1),(P,2)* が成り立てば、$\delta > 0$ が存在して $[E_0 - \delta, E_0 + \delta]$ で $H_{g\omega}$ は確率 1 で *pure point spectrum* をもち、その固有関数は $mass - m$ で指数関数的に減衰する。

よって、gap の中のスペクトルの先端 $a(g), b(g)$ の近傍で定理 2 の仮定が 成り立つことを示せば定理 1 が示される。

(P,2) は次の命題から従う。

Proposition 1(Wegner type estimate). $c > 0$が存在して $-c_0 < E, 0 < \eta \leq E + c_0$ ならば

$$P\{d(E, \sigma(H_{g,\omega}^{\Lambda_L(0)})) < \eta\} \leq c(E + c_0)\eta|\Lambda_L(0)|^2$$

が成り立つ。

(P,1) は multiscale analysis (induction) の第 1 段階の仮定であり(P,2)を援用しつつ multiscale analysis を遂行していく。そのとき key となるのが 次の(繰り込み群的) 不等式である.。 $l << L' << L$ とすると, $y' \in \tilde{\Lambda}_{L'}(y)$ が存在して

$$\left\|X_{\tilde{\Lambda}_L(x)} R_{g,\omega}^{\Lambda_L(x)}(z) X_{\Lambda_l(y)}\right\|_{\Lambda_L(x)} \leq c_z \left\|X_{\tilde{\Lambda}_{L'}(y)} R_{g,\omega}^{\Lambda_{L'}(y)}(z) X_{\Lambda_l(y)}\right\|_{\Lambda_{L'}(y)} \times \left\|X_{\tilde{\Lambda}_L(x)} R_{g,\omega}^{\Lambda_L(x)}(z) X_{\Lambda_l(y')}\right\|_{\Lambda_L(x)}$$

が成り立つ。

REFERENCES

1. P. Exner and P. Šeba: Bound states in curved quantum waveguides, J. Math. Phys. **30** (1989), 2574-2580.
2. K. Yoshitomi: Band gap of the spectrum in periodically curved quantum waveguides, J. Diff. Equat. **142** (1998), 123-166.