

RG 方程式の RG —無限次の相転移の分類に向けて—

日大理工 糸井千岳 (Chigak Itoi) itoi@phys.cst.nihon-u.ac.jp
埼玉医大 向田寿光 (Hisamitsu Mukaida) mukaida@saitama-med.ac.jp

1 導入

スピン系などの格子模型の中には、ハミルトニアンのもつパラメタ (結合定数) を 1 変数 T で変化させ、 $T \downarrow T_c$ のとき、その相関長 $\xi(T)$ が

$$\xi(T) \sim \exp \left\{ \frac{A}{(T - T_c)^\sigma} \right\} \quad (1)$$

の様に発散するものが知られている。これは、通常の 2 次相転移を示す模型の発散

$$\xi(T) \sim \frac{A}{(T - T_c)^\nu} \quad (2)$$

に比べ非常に弱い発散であることから、無限次の相転移と呼ばれる。式 (1) の臨界指数 σ を与える代数的手法を見出すことが、本研究の目的である [1]。

一般に相関長の臨界指数は、くりこみ変換に対する結合定数の挙動を調べることによって得られる。ハミルトニアンが n 個の結合定数 $g = (g_1, \dots, g_n)$ を持ち、くりこみ変換に対する結合定数の応答は次のくりこみ群方程式 (RG 方程式)

$$\frac{dg_i}{dt} = V_i(g), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3)$$

によって与えられるものとする。ここで t は、くりこみ変換の粗視化のスケールに関連した実数であるが、ここでは「時間」と呼ぶことにする。多くの場合 $V(g)$ は摂動展開により、

$$V_i(g) = \sum_j A_{ij} g_j + \sum_{jk} C_{ijk} g_j g_k + \dots \quad (4)$$

の形に求められる。

式 (4) は原点に零点を持つ。従って、(3) の解の流れは原点に近づくほど遅くなる。系が有限な相関長を持つとき、 T が T_c に近づくにつれて、解曲線も原点近傍を通過し長い時間をかけて原点から遠ざかる。

摂動展開 (4) が良いと思われる原点近傍で、微分方程式 (3) の初期値を 1 変数 T で変化させる。初期値が解曲線に沿って、原点を中心とする半径 1 の球面に到達するまでの時間を $t_1(T)$ とすると、

$$\xi(T) = \text{定数} \times e^{t_1(T)} \quad (5)$$

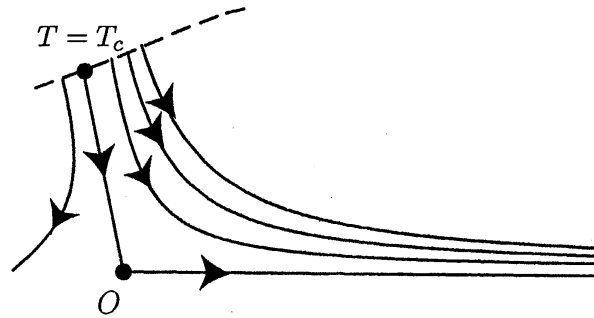


図 1: RG 方程式の原点近傍の流れ。破線は 1 変数 T で変化させたときの初期値の軌跡

が成り立つことが知られている。これより、臨界指数 σ を $t_1(T)$ の発散の様子から求めることができる。

t_1 は、原点近傍を通過する際に大きくなるので、発散の仕方は、摂動展開 (4) の最初の項から決定される。2 次相転移の場合、臨界指数 ν と V の対応はよく知られている。つまり、上式の行列 A_{ij} がただ一つの正の固有値 λ をもつとき、

$$\nu = \frac{1}{\lambda} \quad (6)$$

と与えられる。ところが、無限次の相転移を示すモデルでは、すべての i, j に対し $A_{ij} = 0$ となっているために、このような関係は成り立たない。最も有名な例は 2 次元古典 XY 模型の RG 方程式で

$$\begin{aligned} V_1 &= -g_2^2 \\ V_2 &= -g_1 g_2 \end{aligned} \quad (7)$$

で与えられる。あるいはスピン 1 の 1 次元量子スピン模型では、次のような RG 方程式が知られている。

$$\begin{aligned} V_1 &= g_1(3g_1 + 2g_2) \\ V_2 &= g_2(2g_1 + 3g_2) \end{aligned} \quad (8)$$

いずれも $A_{ij} = 0$ となっていることがわかる。

これらの RG 方程式に対し σ の値はそれぞれ

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_{\text{spin } 1} = \frac{3}{5} \quad (9)$$

と求められているが、その求め方は RG 方程式を直接積分し、固定点の回りで十分時間を費やしたときの解の漸近的挙動を調べることによる [2]。上の二つの例で

は比較的簡単に一般解が求まるが、スピン 3/2 の 1 次元量子スピン系に関連する次のような例

$$\begin{aligned} V_0 &= -g_0^2 + \frac{3}{5}g_0g_1 + \frac{3}{25}g_1^2 + \frac{1}{2}g_0g_2 + \frac{9}{10}g_1g_2 - \frac{3}{2}g_2^2 \\ V_1 &= \frac{1}{2}g_0g_1 - \frac{11}{10}g_1^2 + \frac{1}{2}g_1g_2 \\ V_2 &= \frac{3}{10}g_0g_1 - \frac{3}{10}g_1^2 - \frac{1}{2}g_0g_2 - \frac{3}{2}g_2^2 \end{aligned} \quad (10)$$

では、一般解を求めて σ を導くことは不可能に思える。

そこで我々はこの漸近的挙動を調べるため、RG 方程式 (3) に対し、微分方程式系の漸近解析に用いられるくりこみ群の方法を適用し [3]、式 (6) と類似の関係式を得た [1]。以下にその概要を示す。

2 RG 方程式の RG

我々の研究する RG 方程式は (3) において

$$V_i(g) = \sum_{jk} C_{ijk} g_j g_k \quad (11)$$

与えられる系である。この方程式は次のようなスケール対称性を持つ。即ち、 $t=0$ で $g=a$ を出る解を $g(t, a)$ とすれば、 $e^\tau g(e^\tau t, a)$ も (3) の解である。この対称性を用いて、RG 方程式の初期値空間にはたらくくりこみ変換を定義する。

原点を中心とする半径 a_0 ($a_0 < 1$) の球を S として、これを RG 方程式の初期値空間とみなす。 S のある点を出発し、単調に原点へ近づき、それから単調に原点から離れ、半径 1 の球面に向かって流れて行く解を想定する。最も原点に接近した点 (転回点) を \bar{g} とし、 $\bar{\tau}$ を $e^{\bar{\tau}}|\bar{g}| = a_0$ によって定義する。 S 上の点を出てから転回点に至るまでの解を分岐 1 と呼び、転回点から半径 1 の球面上に至るまでを分岐 2 と呼ぶ。また、 $e^{\tau_R} = a_0$ で τ_R を定義する。

くりこみ変換 $S \rightarrow S$ を次のように定める。

1. まず、 $[0, \bar{\tau}]$ から τ をひとつ選び、分岐 1 上の点から $|g^{(1)}|e^\tau = a_0$ をみたく $g^{(1)}$ を選ぶ。
2. $g^{(1)}e^\tau \equiv a^{(1)}(\tau) \equiv R_\tau^{(1)}a$ とする。
3. 分岐 2 上の点から、 $|g^{(2)}|e^\tau = a_0$ をみたく $g^{(2)}$ を選び、 $R_\tau^{(2)}a \equiv a^{(2)}(\tau)$ とする。(分岐 2 上では、 $\tau \in [\tau_R, \bar{\tau}]$ である。)

先に述べたスケール対称性を考慮すると、 $R_\tau^{(p)}$ が半群であること

$$R_{\tau_1 + \tau_2}^{(p)} = R_{\tau_1}^{(p)} \circ R_{\tau_2}^{(p)}, \quad p = 1, 2 \quad (12)$$

を示すことが出来る。 $R_\tau^{(p)}$ のことを RG 方程式のくりこみ変換と呼ぶ。以下特に $a^{(1)}(\tau)$ と $a^{(2)}(\tau)$ を区別する必要が無い場合は $a(\tau)$ と略記する。

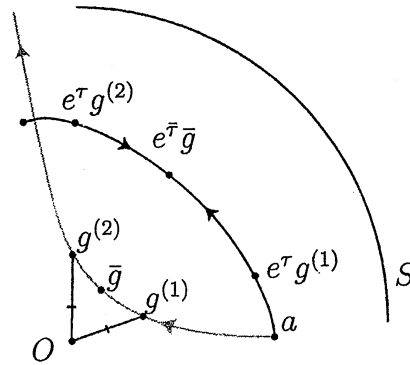


図 2: R_τ の定義。灰色の曲線が $g(t, a)$ をあらわし、黒い曲線が $a^{(1)}(\tau)$ と $a^{(2)}(\tau)$ をあらわす。

3 RG 方程式の RG 方程式

R_τ の無限小変換から、次の微分方程式を得る。

$$\beta \equiv \frac{da}{d\tau} = -\frac{a^2}{a(\tau) \cdot V(a(\tau))} P(a(\tau)) V(a(\tau)) \quad (13)$$

ここで、 $P(a)$ は $n \times n$ 行列で $a \in S$ の接平面への射影子である。

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{a_i a_j}{a^2} \quad (14)$$

式 (13) を S の極座標で表示したものを RG 方程式の RG 方程式と呼ぶ。

注 1 速度ベクトル $V(a^*)$ が a^* と平行な場合、 $\left. \frac{da}{d\tau} \right|_{a=a^*} = 0$ となる。また、 $V(a)$ が同次式であることを考慮すると、 a^* と原点を結ぶ半直線が、(3) の解のとき、 $\left. \frac{da}{d\tau} \right|_{a=a^*} = 0$ となることがわかる。この固定点が臨界指数 σ を求める上で重要な役割を果たす。

注 2 転回点では $a(\tau) \cdot V(a(\tau)) = 0$ となるので速度ベクトル (13) は発散するが、転回点に対応する $a(\tau)$ はうまく定義され、 $e^\tau \bar{g}$ に等しい。

例 式 (8) で与えられる RG 方程式の RG 方程式を示す。まず、

$$a(\tau) = (a_0 \sin \theta(\tau), a_0 \cos \theta(\tau)) \quad (15)$$

と極座標表示して式 (13) に代入すると、

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{10 \cos \theta \sin \theta (\cos \theta + \sin \theta)}{(\cos \theta - \sin \theta) (6 + 5 \sin 2\theta)} \quad (16)$$

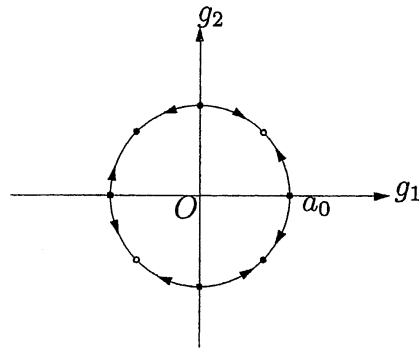


図 3: 新しい RG 方程式 (16) の流れ。黒丸は固定点、白丸は右辺が発散する点

が得られる。これを用いて $-\pi \leq \theta \leq \pi$ で $a(\tau)$ 向きを表すと、図 3 のようになる。

黒丸は式 (16) の固定点を表し、白丸は右辺が発散する点を表す。従って元の RG 方程式 (8) は黒丸と原点を結ぶ直線解を持ち、白丸と原点を結ぶ直線上で転回する解を持つ。図 4 は、数値的に求めた (8) の解曲線であるが、定性的な様子は新しい RG 方程式から期待される描像と一致している。

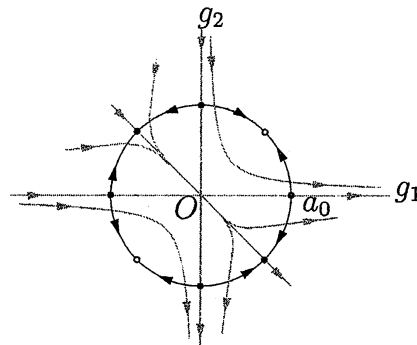


図 4: RG 方程式 (8) の解曲線 (灰色)。直線解が新しい RG 方程式 (16) の固定点
に、転回点が発散する点に対応する。

4 臨界指数の値

ここでは、(13) より得られる新しい RG 方程式の解を用いて、相関長の発散の様子を調べる。まず、式 (5) より、 $a \in S$ を出た (3) の解が半径 1 の球面上に到達するまでの時間 t_1 を $a(\tau)$ を用いてあらわす。

2章で考察したような、分岐 1 と分岐 2 よりなる解曲線を想定する。分岐 1 上の点 $g^{(1)}$ に到達するまでに要する時間を $s(\tau)$ と書くと、

$$a^{(1)}(\tau) = e^\tau g(s(\tau), a) \quad (17)$$

が成り立つ。両辺を微分し、 $a^{(1)}(\tau) \in S$ であることに注意すると、

$$\frac{ds}{d\tau} = -\frac{e^\tau a_0^2}{a^{(1)}(\tau) \cdot V(a^{(1)}(\tau))} \quad (18)$$

が得られる。したがって a を出て転回点 \bar{g} まで到達する時間は

$$\int_0^{\bar{\tau}} d\tau \frac{ds}{d\tau} = -\int_0^{\bar{\tau}} d\tau \frac{e^\tau a_0^2}{a^{(1)}(\tau) \cdot V(a^{(1)}(\tau))} \quad (19)$$

分岐 2 でも同様に考えて、

$$t_1 = -\int_0^{\bar{\tau}} d\tau \frac{e^\tau a_0^2}{a^{(1)}(\tau) \cdot V(a^{(1)}(\tau))} - \int_{\bar{\tau}}^{\tau_R} d\tau \frac{e^\tau a_0^2}{a^{(2)}(\tau) \cdot V(a^{(2)}(\tau))} \quad (20)$$

上の積分でどの部分が発散に寄与するか考察する。転回点を通過するとき、被積分関数の分母はゼロになるが、このときは τ の増分 $d\tau$ もゼロとなり、転回点の周りで積分は発散しないことが分かる。したがってこの積分で発散に寄与するのは、 $\bar{\tau}$ が十分大きくなったときの被積分関数 e^τ である。即ち、初期値 a を 1 変数で変化させ、解曲線の転回点が次第に原点に近づくとつれて、 t_1 は大きくなることがわかる。従って、発散にもっとも寄与する項は被積分関数の e^τ 以外の項を定数で置き換えることにより評価でき、

$$t_1 \sim e^{\bar{\tau}} \quad (21)$$

となることが分かる。よって t_1 の発散の様子は $\bar{\tau}$ の発散の様子から知ることが出来る。

$\bar{\tau}$ の発散の様子は、(13) より得られる新しい RG 方程式の固定点の周りで、 $a(\tau)$ の動きを調べることにより、評価することが出来る。固定点 a^* を極座標で示したときの座標の値が $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_{n-1}^*)$ であったとして、速度ベクトル β の極座標表示 $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ を θ^* の周りで線形化する。

$$\beta_\alpha(\theta) = \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{\partial \beta_\alpha}{\partial \theta_\gamma}(\theta^*) (\theta_\gamma - \theta_\gamma^*) + \dots \equiv \sum_{\gamma=1}^{n-1} \tilde{A}_{\alpha\gamma}(\theta^*) (\theta_\gamma - \theta_\gamma^*) + \dots \quad (22)$$

行列 $\tilde{A}(\theta^*)$ の固有値が、 $\bar{\tau}$ の発散の様子を決める。具体的には

「 \tilde{A} がただ一つ正の固有値 b を持つとする。初期値 $a \in S$ を 1 変数 T で変化させたとき、 $\bar{\tau}$ は、

$$\bar{\tau} \simeq \log(T - T_c)^{1/b}, \quad T \downarrow T_c \quad (23)$$

に従って発散する。」

ゆえに、(5), (21) とあわせると、

$$\ln \xi(T) \simeq t_1 \simeq e^{\bar{\tau}} \simeq (T - T_c)^{-1/b} \quad (24)$$

即ち

$$\sigma = 1/b \quad (25)$$

例 RG 方程式 (8) の場合に臨界指数 σ を求めてみる。この方程式の RG 方程式は式 (16) に与えられている。図 3 に示した黒丸が固定点であるが、原点に近づく直線解に相当するのは、極表示 (15) において $\theta = 0$ および $\theta = -\pi/2$ である。(16) の右辺をこれらの点のまわりで線形化し、(22) で定義した行列 A (この場合はただの数) を求めると、

$$A(0) = A\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{3} \quad (26)$$

となる。即ち、いずれの場合も

$$\sigma = \frac{3}{5} \quad (27)$$

であることがわかる。これは RG 方程式 (3), (8) を直接積分して得られる結果に等しい。

例 我々の結果 (25) は、直接積分が困難な (10) で与えられる RG 方程式にも適用できる。この場合の結果は¹

$$\sigma = \frac{3}{5} \quad \text{あるいは} \quad \frac{8}{-4 + \sqrt{631}} \quad (28)$$

となる。 σ として二通りの値が得られるが、どちらが実現するかは、初期値がどの領域から臨界点に近づくかに依存する。

5 まとめ

我々は無限次の相転移を示す系の臨界指数 σ を代数的に求める方法を示した。結果は式 (25) で与えられる。

二次相転移を示す系の RG 方程式は、固定点のまわりの線形化が容易であったために臨界指数を求める問題は直ちに線形問題に帰着できた。ところが、無限次の相転移の場合は、直接固定点のまわりで RG 方程式を線形化できないところに困難があった。我々はこの RG 方程式にくりこみ変換を導入し、新たな RG 方程式を求めた。この RG 方程式は固定点のまわりで線形化でき、これによって、臨界指数を求めることが線形問題に帰着できた。

ここでは、元の RG 方程式の解曲線が、最初に単調に原点に近づき、再び単調に遠ざかるような解を想定した。この仮定はある程度ゆるめることができる。しかし、式 (3), (11) で与えられる同次微分方程式の解曲線の形については、定性的にさえ明らかになっていないように思われる。この点に関してわれわれの導いたくりこみ変換が新たな知見を与えてくれるかも知れない。

¹詳細は文献 [1] を参照。

参考文献

- [1] C. Itoi and H. Mukaida, Phys. Rev. E **60** 3688 (1999), cond-mat/9711308
- [2] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C **6** 1181 (1973);
C. Itoi and M. -H. Kato, Phys. Rev. B **55**, 8295 (1997);
C. Itzykson and J. M. Drouffe, *Statistical field theory*, vol.1, pp213-218, Cambridge University Press, 1989
- [3] J. Bricmont and A. Kupiainen, Commun. Math. Phys. **150** 193 (1992);
J. Bricmont, A. Kupiainen and G. Lin, Commun. Pure Appl. Math. **47**, 893 (1994);
L.-Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono, Phys. Rev. E **54** 376 (1996);
T. Koike, T. Hara and S. Adachi, Phys. Rev. Lett. **74** 5170 (1995);
田崎晴明, パリテイ, 6月号, 11(1996).