数理解析研究所講究録
1136 巻 2000 年 1-8

An ε-Equilibrium Point of the Fractional Game

秋田県立大学　経営システム工学　木村　　寛 (YUTAKA KIMURA)[1]
秋田県立大学　経営システム工学　星野　満博 (MITSUHIRO HOSHINO)[2]
新潟工科大学　情報電子工学　　　田中　謙輔 (KENSUKE TANAKA)[3]

1 Introduction

分数型非協力 n 人ゲーム (GP) を次の集合

$$(N, X, f_i, g_i, G^i) \tag{1.1}$$

で与える. ここで,

1. $N := \{1, 2, \cdots, n\}$ をプレイヤーの集合とし, i 番目のプレイヤーを $i = 1, 2, \cdots, n$ で表す.
2. E をバナッハ空間とし, 各々のプレイヤー $i \in N$ は戦略集合 $X_i \subset E$ から戦略 x_i を選ぶものとする. また $X := \prod_{i=1}^{n} X_i$ とおき, $X \ni x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で n 人の戦略を表し, これを多価戦略 (multistrategies) と呼ぶ.
3. 各 $i \in N$ に対して, $f_i : X \to \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$, $g_i : X \to \boldsymbol{R}_+$ とする. ただし, $\boldsymbol{R}_+ = (0, \infty)$ と定義する.
4. 各 $i \in N$ に対して, $G^i = \frac{f_i}{g_i}$ と定義し, G^i をゲーム (GP) におけるプレイヤー i の損失関数とする.

上記の設定のもとに各プレイヤーの戦略の決定過程がその対応する損失関数によって評価されるとし, i 番目のプレイヤーの行動が損失関数 G^i によって与えられるゲームを考える. つまり, 各プレイヤー $i \in N$ は出来るだけ自分の損失を最小にする戦略を選ぼうとする. そこで, 各プレイヤーが妥協できる解として, ゲームの均衡点がよく知られているが, ここでは, $\varepsilon > 0$ を与え ε-均衡点 (ε-noncooperative equilibrium point) の存在について考える.

[1] 〒 015–0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84–4 E–mail: yutaka@akita-pu.ac.jp
[2] 〒 015–0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84–4 E–mail: hoshino@akita-pu.ac.jp
[3] 〒 945–1195 新潟県柏崎市藤橋 1719 番地 E–mail: tanaka@iee.niit.ac.jp

2 A Noncooperative n-Person Parametric Game

ある $\varepsilon > 0$ を与え, 各 $i \in N$ に対して

$$G^i(\bar{x}) < \inf_{y_i \in X_i} G^i(y_i, \widehat{\bar{x}^i}) + \varepsilon \tag{2.1}$$

となる $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \in X$ の存在を考える.
ただし, 記号 $\widehat{\bar{x}^i}$ は $\widehat{\bar{x}^i} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \cdots, \bar{x}_n)$ を表す.

ここで ε-均衡点の定義を与える.

Definition 2.1 ある $\varepsilon > 0$ に対して, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \in X$ がゲーム (GP) の ε-均衡点 (ε-**n.e.p.**) であるとは, 任意の $i \in N$ に対して,

$$G^i(\bar{x}) < \inf_{y_i \in X_i} G^i(y_i, \widehat{\bar{x}^i}) + \varepsilon \tag{2.2}$$

が成り立つことをいう.

(GP) における ε-**n.e.p.** の解の存在を直接求めるのは困難である. つまり, 一般に, 損失関数に凸 (または, 凹) などの性質があれば比較的このような解を得やすいが, 上で与えた分数型の損失関数を持ったゲームでは, 例え各 $i \in N$ で f_i が凸, g_i が凹であったとしても $\frac{f_i}{g_i}$ は凸, または凹になるとは限らない. そこでこの論文の目的である, この分数型非協力 n 人ゲーム (GP) における ε-**n.e.p.** の存在を示すために, 新たに, (GP) から構成されるあるパラメトリックゲーム (GP_θ) を定義し, (GP_θ) でのアプローチを通して, 解析をおこなった.

よってはじめに, (GP) に対するパラメトリックゲーム (GP_θ) を構成する.

$$(N, X, f_i, g_i, \theta_i, F^i_{\theta_i}) \tag{2.3}$$

ここで,

1. $N := \{1, 2, \cdots, n\}$ をプレイヤーの集合.
2. E をバナッハ空間, $X_i \subset E$ を各プレイヤー $i \in N$ の戦略集合とし, また, $X := \prod_{i=1}^n X_i$ とおく.
3. 各 $i \in N$ に対して, $f_i : X \to \boldsymbol{R}$, $g_i : X \to \boldsymbol{R}_+$ とする.
4. 各 $i \in N$ に対して $\theta_i : \widehat{X^i} \to \boldsymbol{R}_+$ と定義し, $\theta := (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) : \prod_i \widehat{X^i} \to \boldsymbol{R}^n_+$ をゲーム (GP_θ) におけるパラメター関数と呼ぶ. ただし, $\widehat{X^i} := \prod_{j \neq i} X_j$ である.
5. 各 $i \in N$ に対して, $F^i_{\theta_i} := f_i - \theta_i g_i : X \to \boldsymbol{R}$ をゲーム (GP_θ) におけるプレイヤー i の損失関数とする. つまり, 任意の $x \in X$ に対して $F^i_{\theta_i}(x) = f_i(x) - \theta_i(\widehat{x^i}) g_i(x)$ である.

Definition 2.2 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \in X$ がゲーム (GP_θ) の 均衡点 (**n.e.p.**) であるとは, 任意の $i \in N$ に対して,

$$F^i_{\theta_i}(\bar{x}) = \inf_{y_i \in X_i} F^i_{\theta_i}(y_i, \widehat{\bar{x}^i}) \tag{2.4}$$

$$= \inf_{y_i \in X_i} \{f_i(y_i, \widehat{\bar{x}^i}) - \theta_i(\widehat{\bar{x}^i}) g_i(y_i, \widehat{\bar{x}^i})\} \tag{2.5}$$

が成り立つことをいう.

今, 各 $i \in N$ において $\varphi_i : X \times X \to \boldsymbol{R}$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}\varphi_i(x, y) &= F^i_{\theta_i}(x) - F^i_{\theta_i}(y_i, \widehat{x^i}) \\ &= f_i(x) - f_i(y_i, \widehat{x^i}) - \theta_i(\widehat{x^i})(g_i(x) - g_i(y_i, \widehat{x^i})), \qquad \forall (x, y) \in X \times X.\end{aligned}$$

また, $\varphi : X \times X \to \boldsymbol{R}$ を次で定義する.

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x, y), \qquad \forall (x, y) \in X \times X. \tag{2.6}$$

このとき次の Lemma 2.1 が成り立つ.

Lemma 2.1 次の (1),(2) は同値である.

(1) $\bar{x} \in X$ がゲーム (GP_θ) の **n.e.p.** である.

(2) $\varphi(\bar{x}, y) \leq 0, \qquad \forall y \in X.$

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) であることは, $\bar{x} \in X$ がゲームの均衡点であることより, Definition 2.2 と φ の作り方より明らか.

次に (2) $\Rightarrow$ (1) であることは, 任意の $i \in N$ を固定し, $y = (y_i, \widehat{\bar{x}^i})$ をとる. 今, $\varphi(\bar{x}, y) \leq 0$ であることより,

$$\varphi_i(\bar{x}, y) + \sum_{j \neq i} \varphi_j(\bar{x}, y) \leq 0 \tag{2.7}$$

である. ここで,

$$\begin{aligned}\sum_{j \neq i} \varphi_j(\bar{x}, y) &= \sum_{j \neq i} \{f_j(\bar{x}) - f_j(y_j, \widehat{\bar{x}^j}) - \theta_j(\widehat{\bar{x}^j})(g_j(\bar{x}) - g_j(y_j, \widehat{\bar{x}^j}))\} \\ &= \sum_{j \neq i} \{f_j(\bar{x}) - f_j(\bar{x}_j, \widehat{\bar{x}^j}) - \theta_j(\widehat{\bar{x}^j})(g_j(\bar{x}) - g_j(\bar{x}_j, \widehat{\bar{x}^j}))\} \\ &\quad (\text{今 } j \neq i \text{ より}, \bar{x} = (\bar{x}_j, \widehat{\bar{x}^j}) = (y_j, \widehat{\bar{x}^j})) \\ &= \sum_{j \neq i} \{f_j(\bar{x}) - f_j(\bar{x}) - \theta_j(\widehat{\bar{x}^j})(g_j(\bar{x}) - g_j(\bar{x}))\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって以上より $\varphi_i(\bar{x}, y) \leq 0$ であるので, φ_i の作り方から, $\bar{x} \in X$ はゲーム (GP_θ) の **n.e.p.** である. $\square$

Lemma 2.2 **(Ky Fan's Inequality)** X をバナッハ空間, K を X のコンパクトな凸部分集合とし, 実数値関数 $\varphi : X \times X \to \boldsymbol{R}$ は次の条件 (1),(2),(3) を満たすものと仮定する.

(1) $\forall y \in K, \qquad x \mapsto \varphi(x, y)$; 下半連続関数.

(2) $\forall x \in K, \qquad y \mapsto \varphi(x, y)$; 凹関数.

(3) $\forall y \in K, \qquad \varphi(y, y) \leq 0.$

このとき, 次が成り立つ.

$$\exists \bar{x} \in K \qquad s.t. \qquad \forall y \in K, \;\; \varphi(\bar{x}, y) \leq 0. \tag{2.8}$$

この Lemma 2.2 の証明は, 参考論文 [5] を参照.

Theorem 2.1 各 $i \in N$ において, $X_i \subset E$ はコンパクト凸な部分集合, f_i, g_i, θ_i は次の条件 (1),(2),(3) を満たしていると仮定する.

(1) $f_i : X \to \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$, X 上で連続かつ X_i 上で凸関数である.

(2) $g_i : X \to \boldsymbol{R}_+$, X 上で連続かつ X_i 上で凹関数である.

(3) $\theta_i : X^{\widehat{i}} \to \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$, $X^{\widehat{i}}$ 上で連続である.

このとき, ゲーム (GP_θ) の **n.e.p.** $\bar{x} \in X$ が存在する. すなわち, $\bar{x} \in X$ は

$$\forall i \in N, \qquad F^i_{\theta_i}(\bar{x}) = \inf_{y_i \in X_i} F^i_{\theta_i}(y_i, \bar{x}^{\widehat{i}}) \tag{2.9}$$

を満たす.

Proof. 各 $i \in N$ で $X_i \subset E$ はコンパクト凸集合より, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ はコンパクト凸集合. 仮定 (1)(2) より, 任意の $y \in X$ において $\varphi_i(\cdot, y)$ は X 上で連続であるので, $\varphi(\cdot, y)$ も X 上で連続であり, Lemma 2.2 の条件 (1) を満たす. また, f_i, g_i はそれぞれ X_i 上で凸関数, 凹関数であることと, $\theta_i : X^{\widehat{i}} \to \boldsymbol{R}_+$ であることから, 任意の $x \in X$ に対して, $\varphi(x, \cdot)$ は X 上で凹関数となり, Lemma 2.2 の条件 (2) を満たす. 更に, すべての $y \in X$ に対して, $\varphi(y, y) = 0$ であることは明らかなので,

$$\sup_{y \in X} \varphi(y, y) = 0,$$

を得る. よって, 以上より Lemma 2.2 から,

$$\exists \bar{x} \in X \qquad s.t. \qquad \forall y \in K, \;\; \varphi(\bar{x}, y) \leq 0. \tag{2.10}$$

従って, Lemma 2.1 より, この $\bar{x} \in X$ はゲームの均衡点であることがいえる. □

ゲーム (GP_θ) での一般のパラメター関数 θ に対して, 各 $i \in N$ において特に以下で定義する $\bar{\theta}_i$ の適用を試みる.

$$\bar{\theta}_i(x^{\widehat{i}}) := \inf_{y_i \in X_i} G^i(y_i, x^{\widehat{i}}), \qquad \forall x \in X. \tag{2.11}$$

ただし, $G^i(y_i,\widehat{x^i})=\frac{f_i(y_i,\widehat{x^i})}{g_i(y_i,\widehat{x^i})}$. また, $\bar{\theta}:=(\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2,\cdots,\bar{\theta}_n)$ とおく.
上の $\bar{\theta}$ で導入されたゲーム $(GP_{\bar{\theta}})$ における各プレイヤー i の損失関数は,

$$F^i_{\bar{\theta}_i}=f_i-\bar{\theta}_i g_i : X\to \boldsymbol{R} \tag{2.12}$$

である.

Lemma 2.3 次の (1),(2) が成り立つ.

(1) 任意の $i\in N$, $x\in X$ に対して, $\theta^1_i(\widehat{x^i})>\theta^2_i(\widehat{x^i})\geq 0$ ならば, 次が成り立つ.

$$\inf_{y_i\in X_i}F^i_{\theta^1_i}(y_i,\widehat{x^i})\leq \inf_{y_i\in X_i}F^i_{\theta^2_i}(y_i,\widehat{x^i}) \tag{2.13}$$

(2) 任意の $i\in N$, $x\in X$ に対して, 次の (i)(ii) は同値.

(i) $\inf_{y_i\in X_i}F^i_{\theta_i}(y_i,\widehat{x^i})<0$.

(ii) $\theta_i(\widehat{x^i})>\bar{\theta}_i(\widehat{x^i})$.

さらにこの時,

$$\inf_{y_i\in X_i}F^i_{\bar{\theta}_i}(y_i,\widehat{x^i})\geq 0, \tag{2.14}$$

が成り立つ.

Proof. (1) の証明 : 仮定より任意の $y_i\in X_i$ に対して, $\theta^2_i(\widehat{x^i})g_i(y_i,\widehat{x^i})<\theta^1_i(\widehat{x^i})g_i(y_i,\widehat{x^i})$ であるので,

$$\begin{aligned}F^i_{\theta^1_i}(y_i,\widehat{x^i})&=f_i(y_i,\widehat{x^i})-\theta^1_i(\widehat{x^i})g_i(y_i,\widehat{x^i})\\&<f_i(y_i,\widehat{x^i})-\theta^2_i(\widehat{x^i})g_i(y_i,\widehat{x^i})\\&=F^i_{\theta^2_i}(y_i,\widehat{x^i}).\end{aligned}$$

よって,

$$\inf_{y_i\in X_i}F^i_{\theta^1_i}(y_i,\widehat{x^i})\leq \inf_{y_i\in X_i}F^i_{\theta^2_i}(y_i,\widehat{x^i}).$$

(2) の証明 : (i) $\Rightarrow$ (ii) であることは, 仮定より $F^i_{\theta_i}(\bar{y}_i,\widehat{x^i})<0$ となる $\bar{y}_i\in X_i$ が存在する. ゆえに $F^i_{\theta_i}$ の定義と $g_i(\bar{y}_i,\widehat{x^i})>0$ であることから,

$$\theta_i(\widehat{x^i})>\frac{f_i(\bar{y}_i,\widehat{x^i})}{g_i(\bar{y}_i,\widehat{x^i})}\geq \inf_{y_i\in X_i}G^i(y_i,\widehat{x^i})=\bar{\theta}_i(\widehat{x^i}).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) であることは, $\theta_i(\widehat{x^i})>\bar{\theta}_i(\widehat{x^i})=\inf_{y_i\in X_i}G^i(y_i,\widehat{x^i})$ より, $f_i(\bar{y}_i,\widehat{x^i})-\theta_i(\widehat{x^i})g_i(\bar{y}_i,\widehat{x^i})<0$ なる $\bar{y}_i\in X_i$ が存在するので,

$$0>F^i_{\theta_i}(\bar{y}_i,\widehat{x^i})\geq \inf_{y_i\in X_i}F^i_{\theta_i}(y_i,\widehat{x^i}).$$

さらに, (2.14) であることは, $\inf_{y_i\in X_i} F^i_{\bar{\theta}_i}(y_i,\bar{x}^{\hat{i}}) < 0$ なる $\bar{x}^{\hat{i}} \in X^{\hat{i}}$ が存在したと仮定すると, $F^i_{\bar{\theta}_i}(\bar{y}_i,\bar{x}^{\hat{i}}) < 0$ となる $\bar{y}_i \in X_i$ が存在する. ゆえに,

$$\bar{\theta}_i(\bar{x}^{\hat{i}}) > G^i(\bar{y}_i,\bar{x}^{\hat{i}}) = \bar{\theta}_i(\bar{x}^{\hat{i}}),$$

であり, これは矛盾である. よって,

$$\inf_{y_i\in X_i} F_{\bar{\theta}^i_i}(y_i,x^{\hat{i}}) \geq 0.$$

□

3 An ε-Equilibrium Point of The n-Person Fractional Game

以下 (GP_θ) での結果を用いて (GP) における ε-**n.e.p.** の存在を考える.

はじめに $\varepsilon > 0$ を与え, すべての $i \in N$ に対して, $\bar{\theta}^{\varepsilon}_i := \bar{\theta}_i + \varepsilon$ と定義する. つまり,

$$\bar{\theta}^{\varepsilon}_i(x^{\hat{i}}) := \bar{\theta}_i(x^{\hat{i}}) + \varepsilon, \qquad \forall x \in X, \tag{3.1}$$

とし, また, $\bar{\theta}_{\varepsilon} := (\bar{\theta}^{\varepsilon}_1,\cdots,\bar{\theta}^{\varepsilon}_n)$ とおく. 明らかに, すべての $x \in X$ に対して, $\bar{\theta}^{\varepsilon}_i(x^{\hat{i}}) > \bar{\theta}_i(x^{\hat{i}})$ であることから, Lemma 2.3(2) より, $\inf_{y_i\in X_i} F^i_{\bar{\theta}^{\varepsilon}_i}(y_i,x^{\hat{i}}) < 0$ を得る.

Definition 3.1 $\bar{x} = (\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n) \in X$ がゲーム $(GP_{\bar{\theta}_{\varepsilon}})$ の **n.e.p.** であるとは, 任意の $i \in N$ に対して,

$$F^i_{\bar{\theta}^{\varepsilon}_i}(\bar{x}) = \inf_{y_i\in X_i} F^i_{\bar{\theta}^{\varepsilon}_i}(y_i,\bar{x}^{\hat{i}}) \tag{3.2}$$

$$= \inf_{y_i\in X_i} \{f_i(y_i,\bar{x}^{\hat{i}}) - (\bar{\theta}_i(\bar{x}^{\hat{i}}) + \varepsilon)g_i(y_i,\bar{x}^{\hat{i}})\} \tag{3.3}$$

が成り立つことをいう.

Theorem 3.1 ある $\varepsilon > 0$ に対して, $\bar{x} = (\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n) \in X$ がゲーム $(GP_{\bar{\theta}_{\varepsilon}})$ の **n.e.p.** であるならば, $\bar{x} \in X$ はゲーム (GP) の ε-**n.e.p.** である.

Proof. 任意の $i \in N$, $x \in X$ に対して, $\bar{\theta}_i(x^{\hat{i}}) + \varepsilon > \bar{\theta}_i(x^{\hat{i}})$ より, Lemma 2.3(2) から,

$$0 > \inf_{y_i\in X_i} F^i_{\bar{\theta}^{\varepsilon}_i}(y_i,x^{\hat{i}}). \tag{3.4}$$

また, $\bar{x}$ が $(GP_{\bar{\theta}_{\varepsilon}})$ の **n.e.p.** より,

$$0 > f_i(\bar{x}) - (\bar{\theta}_i(\bar{x}^{\hat{i}}) + \varepsilon)g_i(\bar{x}) \tag{3.5}$$

が成り立つ. よって,

$$G^i(\bar{x}) < \bar{\theta}_i(\bar{x}^{\hat{i}}) + \varepsilon.$$

ゆえに, $\bar{x}$ は (GP) の ε-**n.e.p.** である. □

Lemma 3.1 各 $i \in N$ において $X_i \subset E$ はコンパクト集合であり, f_i, g_i は次の (1),(2) を満たしていると仮定する.

(1) $f_i : X \to \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$, X 上で連続.

(2) $g_i : X \to \boldsymbol{R}_+$, X 上で連続.

このとき, 任意の $i \in N$ に対して, $\bar{\theta}_i^{\varepsilon} : X^{\widehat{i}} \to \boldsymbol{R}_+$ は $X^{\widehat{i}}$ の上で一様連続である.

この Lemma 3.1 の証明は, 参考論文 [8] を参照.

Theorem 3.2 ある $\varepsilon > 0$ を与え, 各 $i \in N$ において, $X_i \subset E$ はコンパクト凸集合であり, f_i, g_i は次の (1),(2) を満たしていると仮定する.

(1) $f_i : X \to \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$, X 上で連続かつ X_i 上で凸関数である.

(2) $g_i : X \to \boldsymbol{R}_+$, X 上で連続かつ X_i 上で凹関数である.

このとき, ゲーム $(GP_{\bar{\theta}^{\varepsilon}})$ の **n.e.p.** $\bar{x} \in X$ が存在する. また, この $\bar{x} \in X$ はゲーム (GP) の ε-**n.e.p.** である.

Proof. 任意の $i \in N$ に対して, $\varphi_i^{\varepsilon} : X \times X \to \boldsymbol{R}$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}\varphi_i^{\varepsilon}(x,y) &:= F^i_{\bar{\theta}_i^{\varepsilon}}(x) - F^i_{\bar{\theta}_i^{\varepsilon}}(y_i, x^{\widehat{i}}) \\ &= f_i(x) - f_i(y_i, x^{\widehat{i}}) - (\bar{\theta}_i(x^{\widehat{i}}) + \varepsilon)(g_i(x) - g_i(y_i, x^{\widehat{i}})), \qquad \forall (x,y) \in X \times X.\end{aligned}$$

また, $\varphi^{\varepsilon} : X \times X \to \boldsymbol{R}$ を次で定義する.

$$\varphi^{\varepsilon}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{\varepsilon}(x,y), \qquad \forall (x,y) \in X \times X. \tag{3.6}$$

各 $i \in N$ で $X_i \subset E$ はコンパクト凸集合より, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ はコンパクト凸集合. 仮定 (1)(2) より, $\varphi_i^{\varepsilon}(\cdot, y)$ は X 上で連続であるので, $\varphi^{\varepsilon}(\cdot, y)$ も X 上で連続であり, Lemma 2.2 の条件 (1) を満たす. また, f_i, g_i はそれぞれ X_i 上で凸関数, 凹関数であることと, $\bar{\theta}_i^{\varepsilon} : X^{\widehat{i}} \to \boldsymbol{R}_+$ であることから, $\varphi^{\varepsilon}(x, \cdot)$ は X 上で凹関数となり, Lemma 2.2 の条件 (2) を満たす. 更に, すべての $y \in X$ に対して, $\varphi^{\varepsilon}(y,y) = 0$ であることは明らかなので,

$$\sup_{y \in X} \varphi^{\varepsilon}(y,y) = 0,$$

を得る. よって, Lemma 2.2 から, 任意の $y \in X$ に対して, $\varphi^{\varepsilon}(\bar{x}_\theta, y) \leq 0$ なる $\bar{x}_\theta \in X$ が存在する. ゆえに Lemma 2.1 より, $\bar{x}_\theta$ はゲーム $(GP_{\bar{\theta}^{\varepsilon}})$ の **n.e.p.** である. また Theorem 3.1 より, $\bar{x}_\theta$ はゲーム (GP) の ε-**n.e.p.** である. □

References

[1] J.P.Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory, Revised Edition (North-Holland, Amsterdam 1982).

[2] J.-P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusion, Springer-Verlag, Grundlehren der math, (1984).

[3] J.-P. Aubin and I. Ekeland, Applied Nonlinear Analysis, A Wiley-Interscience Publication, (1984).

[4] J.P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhäuser Boston, (1990).

[5] J.P.Aubin, Optima and Equilibria (Springer-Verlag, New York, 1993).

[6] V. Barbu and Th. Precupanu, Convexity and Optimization in Banach Spaces, Editura Academiei, Bucharest, Romania, (1986).

[7] R.E.Bruck, A Simple Proof of The Mean Ergodic Theorem for Nonlinear Contractions in Banach Spaces, Israel J. Math. 32 (1979) 107-116.

[8] Y. Kimura, Y. Sawasaki, and K. Tanaka, A Noncooperative Equilibrium for n-Person Game with Fractional Loss Function, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, World Scientific, (1999) 44-51.

[9] D.G.Luenberger, Optimization by Vector Space Methods (John Wiley & Sons, inc., 1969).

[10] K. Tanaka and K. Yokoyama, On ε-Equilibrium Point in a Noncooperative n-person Game, J. Math. Anal. Appl., 160 (1991) 413-423.

[11] R.T.Rockafellar, Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, Duke Math. J. 33 (1966) 81-89.