数理解析研究所講究録
1136巻 2000年 56-59

Ｂａｎａｃｈ空間における非拡大写像の不動点への強収束定理

新潟大学・大学院自然科学研究科 鈴木智成 (TOMONARI SUZUKI)

1. 序

1953年に W. R. Mann [2] は次のようなイテレーションについて考察した.

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_{nj} y_j, \qquad y_{n+1} = T(x_n)$$

ここで, T はある写像, $\{\beta_{nj}\}$ は2重数列で, $\beta_{nj} \geq 0$, $\beta_{nj} = 0 (j > n)$, $\sum_{j=1}^{n} \beta_{nj} = 1$ を満たすものとする. 特に, 2重数列 $\{\beta_{nj}\}$ が $\beta_{n+1,j} = (1 - \beta_{n+1,n+1})\beta_{nj} (j \leq n)$ を満たすとき, イテレーションは

(1) $$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1 - \alpha_n) x_n$$

と表現できる. ここで, $\alpha_n = \beta_{n+1,n+1}$ である. このイテレーションに関連して, Reich は次の定理を証明している.

定理 1 (Reich [4]). E を一様凸でかつ Fréchet 微分可能なノルムを持つ Banach 空間とする. C を E の閉凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とし, 不動点を持つと仮定する. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき, (1) で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ弱収束する.

定理1に関連して, 様々な条件下, 様々な写像に関する様々なイテレーションが考察されている. 例えば, 次の定理が証明されている.

定理 2 (Atsushiba and Takahashi [1]). E を一様凸な Banach 空間で, Fréchet 微分可能なノルムを持つ, もしくは Opial 条件を満たす Banach 空間とする. C を E の閉凸集合とし, S と T を C 上の可換でかつ共通不動点を持つ非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ を $\limsup_n \alpha_n < 1$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=0}^{n-1} S^i T^j x_n$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は S と T の共通不動点へ弱収束する.

また定理1に関連して, C.L. Outlaw は次の定理を証明している.

定理 3 (Outlaw [3]). C を狭義凸な Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とし, $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}Tx_n + \frac{1}{2}x_n \tag{2}$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ強収束する.

定理 4 (Outlaw [3]). C を一様凸な Banach 空間 E の閉凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とする. T の不動点集合 F は空でない事, および任意の $x \in C$ に対して

$$\|x - Tx\| \geq c \cdot d(x, F)$$

を満たす定数 $c > 0$ の存在する事を仮定する. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき, (2) で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ強収束する. ここで, $d(x, F) = \inf\{\|x - w\| : w \in F\}$ である.

本論文では, 定理 3 および定理 4 を拡張した結果について述べる.

2. 結果

始めに, 定理を証明する際に必要となる補助定理について述べる.

補助定理 1. $\{z_n\}$ と $\{w_n\}$ を Banach 空間 E の元よりなる点列とする. $\{\alpha_n\}$ は $\limsup_n \alpha_n < 1$ を満たす $[0, 1]$ 区間の数列とする. 自然数 k を固定する. そして以下を仮定する: $z_{n+1} = \alpha_n w_n + (1 - \alpha_n) z_n$ である; $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ に対して,

$$\limsup_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+j}\| - \|z_n - z_{n+j}\| \leq 0$$

が成立する. このとき,

$$\liminf_{n\to\infty} \Big| \|w_{n+k} - z_n\| - (1 + \alpha_n + \cdots + \alpha_{n+k-1}) \cdot d \Big| = 0$$

が成立する. ここで, $d = \liminf_n \|w_n - z_n\|$ である.

補助定理 2. $\{z_n\}$ と $\{w_n\}$ を Banach 空間 E の元よりなる有界な点列とする. $\{\alpha_n\}$ を $0 < \liminf_n \alpha_n \leq \limsup_n \alpha_n < 1$ を満たす $[0, 1]$ 区間の数列とする. そして以下を仮定する: $z_{n+1} = \alpha_n w_n + (1 - \alpha_n) z_n$ である; 任意の自然数 k に対して,

$$\limsup_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+k}\| - \|z_n - z_{n+k}\| \leq 0$$

が成立する. このとき, $\liminf_n \|w_n - z_n\| = 0$ が成立する.

証明. $a = \liminf_n \alpha_n > 0$, $M = 2 \cdot \sup\{\|z_n\| + \|w_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ そして $d = \liminf_n \|w_n - z_n\|$ と置く. $d > 0$ を仮定して矛盾を導く. $(1 + ka)d > M$ を満たす自然数 k を固定する. 補助定理 1 より,

$$\liminf_{n\to\infty} \left| \|w_{n+k} - z_n\| - (1 + \alpha_n + \cdots + \alpha_{n+k-1}) \cdot d \right| = 0$$

を得る. つまり,

$$\limsup_{n\to\infty} \|w_{n+k} - z_n\| \geq (1 + ka)d > M$$

となり, 矛盾を得る. 従って, $d = 0$ である. □

この補助定理を用いて, 定理 4 の拡張定理を証明する.

定理 5. C を Banach 空間 E の閉凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とする. T の不動点集合 F は空でない事, および任意の $x \in C$ に対して

$$\|x - Tx\| \geq c \cdot d(x, F)$$

を満たす定数 $c > 0$ の存在する事を仮定する. $\{\alpha_n\}$ を $0 < \liminf_n \alpha_n \leq \limsup_n \alpha_n < 1$ を満たす $[0, 1]$ 区間の数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1 - \alpha_n) x_n$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ強収束する.

証明. T の不動点 w を固定する.

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - w\| &= \|\alpha_n T x_n + (1 - \alpha_n) x_n - w\| \\ &\leq \alpha_n \|T x_n - w\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - w\| \\ &\leq \|x_n - w\| \end{aligned}$$

および $\|Tx_n - w\| \leq \|x_n - w\|$ より, $\{x_n\}$ と $\{Tx_n\}$ は有界点列である. 補助定理 2 より, $\liminf_n \|Tx_n - x_n\| = 0$ を得る.

$$\begin{aligned} \|T x_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq \|T x_{n+1} - T x_n\| + \|T x_n - x_{n+1}\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|T x_n - x_{n+1}\| \\ &= \|T x_n - x_n\| \end{aligned}$$

に注意して, $\lim_n \|Tx_n - x_n\| = 0$ を得る. 仮定より, $\lim_n \|x_n - w_n\| = 0$ を満たす T の不動点よりなる点列 $\{w_n\}$ が存在する. $m > n$ のとき, $\|x_m - w_n\| \leq \|x_n - w_n\|$ であることに注意して,

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - w_n\| + \|x_n - w_n\| \leq 2\|x_n - w_n\|$$

を得る. したがって, $\{x_n\}$ は Cauchy 列であり, ある C の元 z に強収束する. そして,

$$\limsup_{n\to\infty} \|z - w_n\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|z - x_n\| + \|x_n - w_n\| = 0$$

より, z は T の不動点である. $\square$

この定理の直接の系として, 定理 3 の拡張定理を得る.

系 1. C を Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ を $0 < \liminf_n \alpha_n \leq \limsup_n \alpha_n < 1$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1 - \alpha_n) x_n$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ強収束する.

参考文献

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *"Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces"*, Bull. Austral. Math. Soc., **57** (1998), 117–127.

[2] W. R. Mann, *"Mean value methods in iteration"*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 506–510.

[3] C. L. Outlaw, *"Mean value iteration of nonexpansive mappings in a Banach space"*, Pacific J. Math., **30** (1969), 747–750.

[4] S. Reich, *"Weak convergence theorems for nonexpansive mappings"*, J. Math. Anal. Appl., **67** (1979), 274–276.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATION SCIENCE, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, NIIGATA UNIVERSITY, NIIGATA 950-2181, JAPAN

E-mail address: tomonari@math.sc.niigata-u.ac.jp