数理解析研究所講究録
1137 巻 2000 年 99-103

Cyclic Composition Operators on the Disc Algebra

信州大 理　　高木　啓行　(Hiroyuki Takagi)

サイクリックな合成作用素の研究が, 最近 活発になっている. この講演では, ディスク環上のサイクリックな合成作用素について, わかったことを いくつか 報告する.

$\mathcal{B}$を 可分な Banach 空間とし, T を $\mathcal{B}$上の有界線形作用素とする. T による $\mathcal{B}$の元 f の **軌跡** (orbit) は,

$$\mathrm{Orb}\,(T; f) = \{\, f,\ Tf,\ T^2 f,\ \cdots,\ T^n f,\ \cdots \}$$

と表す. もし, ある $f \in \mathcal{B}$に対して, $\mathrm{Orb}(T; f)$ から生成される閉部分空間が $\mathcal{B}$全体になるとき, すなわち,

$$\overline{\mathrm{span}\,\mathrm{Orb}(T; f)} = \mathcal{B}$$

となるとき, T は **サイクリック** (cyclic) であるという. とくに, ある $f \in \mathcal{B}$に対して, $\mathrm{Orb}(T; f)$ の閉包自体が $\mathcal{B}$全体になるとき, すなわち,

$$\overline{\mathrm{Orb}(T; f)} = \mathcal{B}$$

となるとき, T は **超サイクリック** (hypercyclic) であるという. 明らかに, 超サイクリックな作用素は, サイクリックである.

サイクリックな作用素は, [4], [5] などの本にでてくるが, 系統だった詳しい解説は見当たらないし, 注目度も低かったようである. しかし, 定義の中の集合 $\overline{\mathrm{span}\,\mathrm{Orb}(T; f)}$ が T の不変部分空間になっていることなどを考えると, この概念の重要性に 気づかされる. この作用素が, 脚光をあびるようになったのは, 実に 1990 年代になってからである. とはいっても, 定義で述べられているような現象は, G.D. Birkhoff [1] や W. Seidel and J. Walsh [8] らの古典的な結果に存在していた. それに着目して この作用素の研究をはじめたのが, P.S. Bourdon と J.H. Shapiro である. 彼らは, 1990 年代前半に, Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ 上の合成作用素が (超) サイクリックになるかどうかを 調べた. その結果は, [2], [3], [9, Chapters 7, 8] に 詳しく述べられている. それによると, $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への正則関数 φ による $H^2(\mathbb{D})$ 上の合成作用素 C_φ について, たとえば,

$\varphi(z) = \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2}$ のとき,　C_φ は, $H^2(\mathbb{D})$ 上の超サイクリックな作用素になる.

$\varphi(z) = \dfrac{2z}{4-z}$ のとき,　C_φ は, $H^2(\mathbb{D})$ 上の 超サイクリックではないがサイクリックな作用素になる.

$\varphi(z) = \dfrac{z}{2-z}$ のとき,　C_φ は, $H^2(\mathbb{D})$ 上のサイクリックな作用素でない.

というようなことが わかる. この例の φ は すべて 放物型の一次分数変換だが, C_φ のサイクリック性は 3 つの様相を呈している. このように, $H^2(\mathbb{D})$ 上の合成作用素が (超) サイク

リックになるかどうかの判定は, 相当 微妙であることが見込まれる. 彼らの結果は かなりの広範囲をカバーしているが, 現時点でも, サイクリックな合成作用素の完全な特徴づけには いたっていない.

さて, この講演では, 目先を変えて, $H^2(\mathbb{D})$ のかわりに 他の空間を 考えることにしたい. P.S. Bourdon and J.H. Shapiro の結果は, $H^2(\mathbb{D})$ についてだけしか述べられていないが, 空間 $H^p(\mathbb{D})$ $(1 \le p < \infty)$ に一般化しても成り立つことが, 注記されている. その際の証明の補足や変更については, [7] をみていただきたい. ただし, そこでは $p = \infty$ の場合を除いている. 実は, 有界正則関数の空間 $H^\infty(\mathbb{D})$ は 可分でないから, その上でサイクリックな作用素を考えるのは 意味がないのである. そこで, 同じ一様ノルムの空間として, ディスク環をとりあげることにする.

$\mathbb{D}$ を 複素平面の単位開円板とし, $\overline{\mathbb{D}}$ を $\mathbb{D}$ の閉包とする. $\overline{\mathbb{D}}$上で連続で $\mathbb{D}$ 上で正則な関数全体からなる $\overline{\mathbb{D}}$上の関数環を, **ディスク環** (disc algebra) といい, $A(\overline{\mathbb{D}})$ と表す. いうまでもなく, $A(\overline{\mathbb{D}})$ は 可分な Banach 空間である. つぎに,

$$\mathcal{S}(\overline{\mathbb{D}}) = \left\{ \varphi \in A(\overline{\mathbb{D}}) : \varphi(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}} \right\}$$

とおく. いま, $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{D}})$ から 関数 φ を ひとつえらんでおき, $A(\overline{\mathbb{D}})$ 上の作用素 C_φ を,

$$(C_\varphi f)(z) = f(\varphi(z)) \qquad (\, z \in \overline{\mathbb{D}},\ f \in A(\overline{\mathbb{D}})\,)$$

と定義する. すると, C_φ は $A(\overline{\mathbb{D}})$ 上の有界線形作用素で, $\|C_\varphi\| = 1$ となる. この作用素 C_φ を, (φ による) $A(\overline{\mathbb{D}})$ 上の**合成作用素** (composition operator) という.

これから, つぎの問題を考えよう.

問題. どんな $\varphi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{D}})$ に対して, $A(\overline{\mathbb{D}})$ 上の合成作用素 C_φ は,
サイクリックになるか? あるいは, 超サイクリックになるか?

まず, $\|C_\varphi\| = 1$ より, どんな $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ に対しても,

$$\mathrm{Orb}(T; f) \subset \left\{ g \in A(\overline{\mathbb{D}}) \,:\, \|g\| \le \|f\| \right\}$$

となるから,

定理 1 $A(\overline{\mathbb{D}})$ 上の合成作用素は 超サイクリックにはならない.

はじめに述べたように, $H^2(\mathbb{D})$ 上の合成作用素には 超サイクリックになるものが 存在したから, $A(\overline{\mathbb{D}})$ と $H^2(\mathbb{D})$ とでは, その上の合成作用素の超サイクリック性が 異なっていることになる. 何にせよ, この定理によって, ディスク環上の合成作用素の超サイクリック性の問題が 簡明に解決してしまったので, あとは サイクリック性の問題だけ 考えればよい.

それについては, また微妙な様相が出てくるが, ここでは, $H^2(\mathbb{D})$ の場合と同様な結果について, 述べてみたい.

つぎの定理は, [3, Theorem 1.7] と同様にして 示される.

> **定理 2** $\varphi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{D}})$ が $\mathbb{D}$ 上で 1 対 1 でないとき, $A(\overline{\mathbb{D}})$ 上の合成作用素 C_φ は サイクリックにならない.

こうして, 問題は つぎのようにしぼられる:

$\varphi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{D}})$ が $\mathbb{D}$ 上で 1 対 1 の場合に,

$A(\overline{\mathbb{D}})$ 上の合成作用素 C_φ が サイクリックになるか?

まず, 小手調べとして, $\varphi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{D}})$ が 一次分数変換の場合を考えてみる. この場合には, φ が具体的に式で表せるので, かなり扱いやすい. P.S. Bourdon and J.H. Shapiro も, $H^2(\mathbb{D})$ の場合に 同様の考察をしていて ([3, Theorem 2.2]), その論法をくみっとって, ディスク環の場合に応用することにする. そうすると, $\varphi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{D}})$ が 一次分数変換で, φ のひとつの不動点が $\mathbb{D}$ 内にある場合は, $H^2(\mathbb{D})$ の場合と同様の つぎの定理が みちびける.

> **定理 3** $\varphi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{D}})$ は 一次分数変換で, φ の不動点のひとつ p が $\mathbb{D}$ 内にあるとする. このとき, φ は,
>
> (a) φ が 楕円型で, $\arg \varphi'(p)$ が π の有理数倍のとき.
> (b) 〃 $\arg \varphi'(p)$ が π の無理数倍のとき.
> (c) φ が 双曲型で, φ のもうひとつの不動点が $\partial\mathbb{D}$ にあるとき.
> (d) 〃 φ のもうひとつの不動点が $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ にあるとき.
> (e) φ が 斜航型のとき.
>
> と分類することができ, $A(\overline{\mathbb{D}})$ 上の合成作用素 C_φ について,
>
> (b), (d), (e) のとき, C_φ は サイクリックであり,
> (a), (c) のとき, C_φ は サイクリックでない.

この定理の証明は, [3, Theorem 2.2] の証明と 同じ道筋をたどることで 達成できる. そのとき, $A(\overline{\mathbb{D}})$ の集合の稠密性を調べることになるが, それには, $A(\overline{\mathbb{D}})$ の共役空間についての情報が 必要になる. $H^2(\mathbb{D})$ の場合は, $H^2(\mathbb{D})^* \cong H^2(\mathbb{D})$ だから 簡単であったが, ディスク環の場合は そう簡単にはいかない. しかし, Cauchy 変換 ([10, 6.1 節] などをみよ) などの概念を使えば, この難所が回避できる. 詳しくは, [7] をみていただきたい.

さて, 定理 3 では, $\varphi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{D}})$ が 一次分数変換という 特殊な場合だけを考えたわけだが, この場合を 一般化する常套手段がある. それは, 一次分数変換モデル定理 (linear-fractional model theorem) ([3, Theorem 0.4], [9, §8.1, 8.2]) を用いる方法である. このモデル定理において, φ が $\mathbb{D}$ 内に不動点をもつ場合は, つぎの Königs の定理 ([6], [9, §6.1]) となる.

Königs の定理 φ は $\mathbb{D}$ 上の 1 対 1 の正則関数で, $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ をみたすものとする. もし, φ が $\mathbb{D}$ 内に不動点 p をもてば,

$$\sigma(\varphi(z)) = \lambda\,\sigma(z) \qquad (z \in \mathbb{D})$$

をみたす定数 λ と, $\mathbb{D}$ 上の 1 対 1 の正則関数 σ が 存在する. ただし, $\lambda = \varphi'(p)$ である. また, φ に対して, σ は 定数倍を無視すれば 一意的に決まる.

この定理の関数 σ を, φ の **Königs 関数**という. [3, Theorem 3.2] のアイディアを用いれば, 定理 3 の (d), (e) の部分は, つぎのように拡張できる.

定理 4 $\varphi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{D}})$ は, $\mathbb{D}$ 上で 1 対 1 で, $\mathbb{D}$ 内に不動点をもつとする. φ の König 関数 σ が $A(\mathbb{D})$ の元で, σ の多項式全体が $A(\mathbb{D})$ において稠密なとき, $A(\mathbb{D})$ 上の合成作用素 C_φ は サイクリックになる.

この定理の仮定は少々みにくいので, 例をあげておこう. G を 複素平面の Jordan 領域で, ある定数 λ に対して, $\lambda G \subset G$ をみたすものとする. そして, $\mathbb{D}$ から G の上への Riemann の写像を, Carathéodory の定理によって $\overline{\mathbb{D}}$から$\overline{G}$の上への同相写像に拡張したものを, σ とかく. この関数 σ を用いて, $\overline{\mathbb{D}}$ 上の関数 φ を,

$$\varphi(z) = \sigma^{-1}(\lambda\,\sigma(z)) \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}})$$

と定めると, φ は 定理 4 の仮定をみたす. 実際, Königs の定理の一意性から, φ の Königs 関数が σ 自身となり, また Mergelyan の多項式近似定理 ([10, 定理 6.5.2]) から, σ の多項式全体が $A(\mathbb{D})$ において 稠密になることが 簡単に示される. この例の方法から, 定理 4 が適応できる関数 φ を たくさんつくることができる. しかし, これで, $\varphi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{D}})$ が $\mathbb{D}$ 内に不動点をもつ場合が すべてカバーされたわけではなく, いわんや, $\mathbb{D}$ 内に不動点をもたない場合については, ここでは ほとんど わかっていない. これから 考えてみたいものである.

付記：この講演の内容は, 信州大学大学院の佐藤正樹くんが修士論文 [7] を作成する際に, 彼と講演者が共同研究したことに もとづいている.

参考文献

[1] G.D. Birkhoff, *Démonstration d'un Théorème élémentaire sur les fonctions entières*, C.R. Acad. Sci. Paris, **189** (1929), 473–475.

[2] P.S. Bourdon and J.H. Shapiro, *Cyclic composition operators on H^2*, in "Operator Theory / Operator Algebras and Applicantions," **51** Part II, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1990, pp. 43–53.

[3] P.S. Bourdon and J.H. Shapiro, "Cyclic Phenomena for Composition Operators," Mem. **596**, Amer. Math. Soc, New York, 1997.

[4] J.B. Conway, "A Course in Functional Analysis," 2nd ed.,Springer-Verlag, New York, 1990.

[5] P.R. Halmos, "A Hilbert Space Problem Book," 2nd ed.,Springer-Verlag, New York, 1982.

[6] G.Königs, *Recherches sur les intégrales de certaines équationes functionelles*, Annales Ecole Normale Superior (3), **1** (1884), Supplément, 3–41.

[7] 佐藤 正樹 (M. Sato), サイクリックな合成作用素 (Cyclic compositon operators), 修士論文 (信州大), 1999.

[8] W.Seidel and J.Walsh, *On approximation by Euclidean and non-Euclidean translates of analytic functions*, Bull. Amer. Math. Soc., **47** (1941), 916–920.

[9] J.H. Shapiro, "Composition Operators and Classical Function Theory," Springer-Verlag, New York, 1993.

[10] 竹之内 脩, 阪井 章, 貴志 一男, 神保 敏弥, 「関数環」(数理科学シリーズ 8), 培風館, 1977.