数理解析研究所講究録
1137巻 2000年 26-32

A Uniqueness Theorem and the Myrberg phenomenon for a Zalcman domain (II)

北大理学研究科　林 実樹廣 (Mikihiro HAYASHI)
北大理学研究科　小林 保幸 (Yasuyuki KOBAYASHI)
名工大（名誉教授）　中井 三留 (Mitsuru NAKAI)

§1 Myrberg 現象

ここでは，本講究録の同題名 (I) に引き続き，Myrberg 現象を中心に一致の定理との関連について最近の結果を報告する．

リーマン面 R 上の有界正則関数全体のなす環を $H^\infty(R)$ で表す．R の被覆写像 $\varphi: \widetilde{R} \to R$ に対して，

$$H^\infty(\widetilde{R}) = H^\infty(R) \circ \varphi \tag{1.1}$$

となるとき，**Myrberg 現象**が起こるということにする．この命名は，Myrberg が有名な論文 [9] において，穴あき円板 $\Delta_0 : 0 < |z| < 1$ の限界のない 2 葉被覆写像$\varphi : \widetilde{\Delta}_0 \to \Delta_0$ の分岐点 $\{c_n\}$ が原点に収束するとき (1.1) が成り立つことを利用して，特異な性質をもつリーマン面の例を構成したことに由来している．

Myrberg の例で Myrberg 現象が起こることを確認することは易しい．実際，任意の関数 $f \in H^\infty(\widetilde{R})$ に対して，

$$g(z) = (f(z^+) - f(z^-))^2 \quad (g^{-1}(z) = \{z^+, z^-\},\ z \in \Delta_0)$$

とおくと，g は Δ_0 上の有界正則関数となり，分岐点 c_n について，$c_n^+ = c_n^-$ であるから，$g(c_n) = 0$. さらに，原点は g の除去可能特異点であるから，(古典的) 一致の定理により $g \equiv 0$. よって，$f(z^+) = f(z^-)$. そこで，$F(z) = (f(z^+) + f(z^-))/2$ とおくと，$F \in H^\infty(R)$, $f = F \circ \varphi$. 従って，Myrberg 現象 $H^\infty(\widetilde{\Delta}_0) = H^\infty(\Delta_0) \circ \varphi$ が成り立つ．

さて我々の現在の研究のきっかけとなったのは，

問題 Myrberg の例において，分岐点 c_n を中心とする小閉円板Δ_n の列を Δ_0 内に互いに交わらないようにとり，

$$R = \Delta_0 \setminus \bigcup_n \Delta_n,\ \widetilde{R} = \varphi^{-1}(R)$$

とおく．このとき，被覆写像 $\varphi|\widetilde{R}:\widetilde{R}\to R$ について Myrberg 現象が起こるか？

を問うことから始まった（[4]）．この場合，古典的一致の定理はもはや適用できない．これまでに得られた結果（[2–8]）から，小円板 Δ_n の半径 r_n のなす数列がはやく小さくなれば，Myrbeg 現象が起こり，（分岐点列 $\{c_n\}$ の分布状態に‘むら’がないときは）半径列 $\{r_n\}$ がある程度大きいと Myrberg 現象が起こらないことが分かっている．残念ながら，完全な条件はいまだに得られていない．

論文 [6] では，分岐点列が $c_n=2^{-n}$ の場合に，原点 $z=0$ において次の形の

一致の定理： $f\in H^\infty(R)$, $\displaystyle\lim_{z<0,z\to 0} f^{(n)}(z)=0\ (n=0,1,2,\dots)$ ならば $f\equiv 0$

が成り立てば，被覆写像 $\varphi|\widetilde{R}:\widetilde{R}\to R$ について Myrberg 現象が成り立つことを示した．この際、逆に Myrberg 現象が起これば一致の定理が成り立つことを期待したが、残念ながら，反例が構成できることが分かった．

本論文では，この反例の構成法と任意の平面領域上の２葉被覆面の Myrberg 現象について，講演ではかなり粗く述べた点を含めもう少し詳しく解説する．これらの結果は論文 [3] として発表予定である．以下の証明は，論文に述べたものより多少簡略化してある．

§2 反例の構成

定理 1 $\varphi:\widetilde{\Delta}_0\to\Delta_0$ を $\{2^{-n}:n=1,2,3,\dots\}$ を分岐点とする限界のない２葉被覆写像とする．閉円板 $\Delta_n=\{z:|z-2^{-n}|\le r_n\}\ (n\ge 1)$ の列が存在して，領域 $R=\Delta_0\setminus\bigcup_n\Delta_n$ 上では原点 $z=0$ において一致の定理は成立しないが，被覆写像 $\varphi|\widetilde{R}:\widetilde{R}\to R$ について Myrberg 現象が起こる．ただし，$\widetilde{R}=\varphi^{-1}(R)$.

証明 自然数の部分列 $\{n_k\}$ を適当に取ることで，

$$N(n)=\begin{cases}4 & (n=n_k)\\ k & (n_k<n<n_{k+1})\end{cases}$$

とおき，半径を $r_n=2^{-nN(n)}$ と定めれば求める例が得られることを示す．$n_1=1$ として，$n_1<\cdots<n_k$ まで選んだとして，１点 $-1<c<0$ を固定して，自然数 $m=n_{k+1}(>n_k)$ に対して，

$$A_k=\{z:2^{-m}<|z|<1\}$$

$$R_k=A_k\setminus\bigcup_{1\le n<m}\Delta_n$$

$$\widetilde{R}_k=\varphi^{-1}(R_k)$$

$$\alpha_k=\sup\{|f(c^+)-f(c^-)|:f\in H^\infty(\widetilde{R}_k),\ |f|\le 1\}$$

とおく．ここで，正規族の論法を使えば，α_k は最大値となるので各 m に対して，

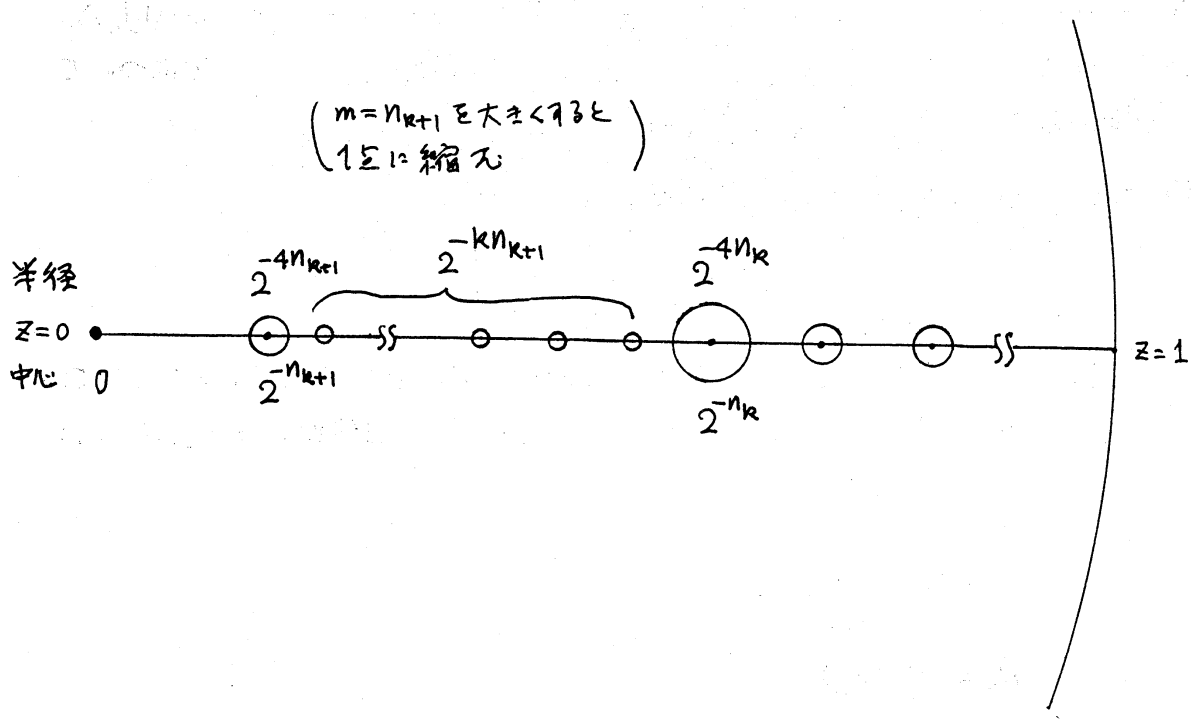
$$\alpha_k = |f_m(c^+) - f_m(c^-)|,\ f_m \in H^\infty(\widetilde{R}_k),\ |f_m| \leq 1$$

を満たす関数 f_m が存在する．(ここでは，α_k は m にも依存しているが，以下で各 k に対して適当な m を選んで固定し，$n_{k+1} = m$ とおく．) $\{f_m\}_m$ も正規族となるので，$\{f_m\}$ の任意の部分列は

$$\varphi^{-1}(\Delta_0 \backslash (\bigcup_{1 \leq n \leq n_k} \Delta_n) \cup \{2^{-n} : n > n_k\})$$

上のある正則関数 f に広義一様収束する．$g(z) = (f(c^+) - f(c^-))^2$ は $g(2^{-n}) = 0\ (n > n_k)$ を満たすので，$g \equiv 0$. よって，$\alpha_k \to 0\ (m \to \infty)$. 従って，$m = n_{k+1}$ を十分大きくとれば，$\alpha_k < 1/k$ とできる．この手順を繰り返して，自然数の増加列 $\{n_k\}$ を帰納的に定める．

さて，$R_k \subset R$ に注意すれば，任意の $f \in H^\infty(\widetilde{R})$, $|f| \leq 1$ に対して，$|f(c^+) - f(c^-)| \leq \alpha_k < 1/k$ が成り立つ．k は任意より，$f(c^+) = f(c^-)$. よって，$H^\infty(\widetilde{R})$ はファイバー $\varphi^{-1}(c)$ の 2 点を分離しない．これより，すべてのファイバー $\varphi^{-1}(z)$ が分離されないことが従う ([1]). よって，Myrberg 現象が起こっている．一方，上のように $N(n)$ を定めると $N(n) \not\to \infty\ (n \to \infty)$ より、[3]（同題名 (I) の定理 B および定理 2 を参照）から Zalcman 領域 R につてい一致の定理は成立しない．よって，求める反例が得られた． []



§3 平面領域の被覆面に関する Myrberg 現象

前節の正規族を使った論法の部分は，次の定理にあるように一般の平面領域上の限界のない2葉被覆面の場合にも成り立つ．

定理2 D をその上に非定数有界正則関数を持つような任意の平面領域，$\varphi : \widetilde{D} \to D$ を Myrberg 現象が起こる任意の限界のない2葉被覆写像とする．$\{K_n\}$ を D のコンパクト部分集合からなる族で次の性質 (i), (ii), (iii) を満たすものとする：

(i) $K_n \cap K_m = \emptyset$ $(n \neq m)$

(ii) $K_n \to \partial D$ $(n \to \infty)$; すなわち，各集合 K_n から1点づつ選んで作られる点列は領域 D 内に集積点をもたない．

(iii) $D \setminus \cup K_n$ は連結である．

このとき，部分列 $\{K_{n_k}\}$ を適当に選らんで，$D' = D \setminus \cup_k K_{n_k}$，$\widetilde{D}' = \varphi^{-1}(D')$ とおけば，被覆写像 $\varphi|\widetilde{D}' : \widetilde{D}' \to D'$ についても Myrberg 現象が起こる．

定理2を定理1の穴あき円板 Δ_0 の場合に適用すると，小閉円板 Δ_n の代わりにコンパクト部分集合 K_n として，線分 $K_n = \{2^{-n} + iy : |y| \leq 1/n\}$ が取れる．K_n の直径 $2/n$ は D_{n_k} の直径 2^{-4n} に比較するとかなり大きい．また，K_n は円周 $|z| = 1$ へ収束するように取ることができる．この場合は，K_n の直径が0に収束する必要もない．この様な例からは，Myrberg 現象が起こるためには，除去集合 K_n の大きさではなく，領域の境界にどれだけ早く収束しているかの方が重要であることを伺わせる．一方，同題名 (I) で述べたように，一致の定理が成り立つときは，Δ_n の半径 $r_n = 2^{-nN(n)}$ において，$N(n) \to \infty$ となるので，Δ_n の大きさが関係している．

定理2の証明には，次の定理3を用いれば，正規族を使った論法により定理1の証明とほぼ同様に証明できる．

定理3 D をその上に非定数有界正則関数を持つような任意の平面領域，$\varphi : \widetilde{D} \to D$ を任意の限界のない2葉被覆写像とする．さらに，D の任意のコンパクト部分集合 K に対して，$D_0 = D \setminus K$, $\widetilde{D}_0 = \varphi^{-1}(D_0)$ とおく．このとき，Myrberg 現象は被覆写像 $\varphi : \widetilde{D} \to D$ と $\varphi|\widetilde{D}_0 : \widetilde{D}_0 \to D_0$ に関して同時に起こるか，どちらにも起こらないのどちらかである．

証明 明らかに，$\varphi|\widetilde{D}_0 : \widetilde{D}_0 \to D_0$ に関して Myrberg 現象が起これば，$\varphi : \widetilde{D} \to D$ についても Myrberg 現象が起こるので，この逆を証明すればよい．そのため，$\varphi|\widetilde{D}_0 : \widetilde{D}_0 \to D_0$ に関して Myrberg 現象が起こっていないと仮定する．このとき，$H^\infty(\widetilde{D}_0)$ は分岐点ではない任意のファイバー $\varphi^{-1}(c)$ $(c \in D_0)$ を分離する．このファイバーが $H^\infty(\widetilde{D})$ により分離できることを示せば，$\varphi : \widetilde{D} \to D$ についても Myrberg 現象が起こっていないので，証

明が終わる．

定理２の証明には $D_0 = D \setminus K$ が連結な場合を示せば十分なので，簡単のためこの場合のみ考える（一般の場合は [3]）．更に，K をより大きなコンパクト部分集合に置き換えても仮定は成立するので，K を有限個のジョルダン閉曲線で囲まれる閉領域で置き換えて考える．更に，K の連結成分が複数あれば，それらを帯領域で結ぶことで，K は１本のジョルダン曲線で囲まれたジョルダン領域と仮定してよい．

K をその内部に囲むようなジョルダン領域 Ω を D 内にとり，その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ を考える．さらに，Γ の外と内に Γ に近接しながらほぼ並行な２本のジョルダン閉曲線考え，内側のジョルダン閉曲線をΓ^-, 外側を Γ^+ で表す．Γ^+ の内側の領域を Ω^+, D のうち Γ^- の外側にある領域を Ω^- で表し，$A = \Omega^+ \cap \Omega^-$ とおく．A は幅が非常に狭い円環状領域である．１点 $c \in D \setminus \overline{\Omega}^+$ をとり固定して考える．仮定より，関数 $f \in H^\infty(\widetilde{D}_0)$ があって，$f(c^+) \neq f(c^-)$．$\tau(z^\pm) = z^\mp$ は被覆変換写像である．すなわち，τ は $\widetilde{R}$ の自己等角写像で，$\varphi \circ \tau = \varphi$ を満たす．f を $f - f \circ \tau$ で置き換えて考えることにすれば，関係式

$$f \circ \tau = -f$$

を満たすとしてよい．また，$f \not\equiv 0$ であるから，必要ならジョルダン閉曲線 $\Gamma, \Gamma^+, \Gamma^-$ の取り方を修正して，$\varphi^{-1}(\bar{A})$ は分岐点を含まず，この上で $|f| > 0$ と仮定してよい．

一方，$\widetilde{\Omega}^+ = \varphi^{-1}(\Omega^+)$ は有限連結リーマン面であるから，関数 $q \in H^\infty(\widetilde{\Omega}^+)$ で $q \circ \tau = -q$, $q \not\equiv 0$ を満たすものが存在する．このとき，

$$\frac{f}{q} \circ \tau = \frac{f}{q}$$

が成り立つので，関数 $g \in H^\infty(A)$ があって，

$$\frac{f}{q} = g \circ \varphi$$

と表せる．必要なら，$\Gamma, \Gamma^+, \Gamma^-$ を更に修正して，$\varphi^{-1}(\bar{A})$ 上で $|q| > 0$ と仮定してよい．よって，関数 $\log g$ は円環状領域 $\bar{A}$ 上で（多価）正則関数である．Γ に沿った $\log g$ の周期は $2m\pi i$（m:整数）の形である．

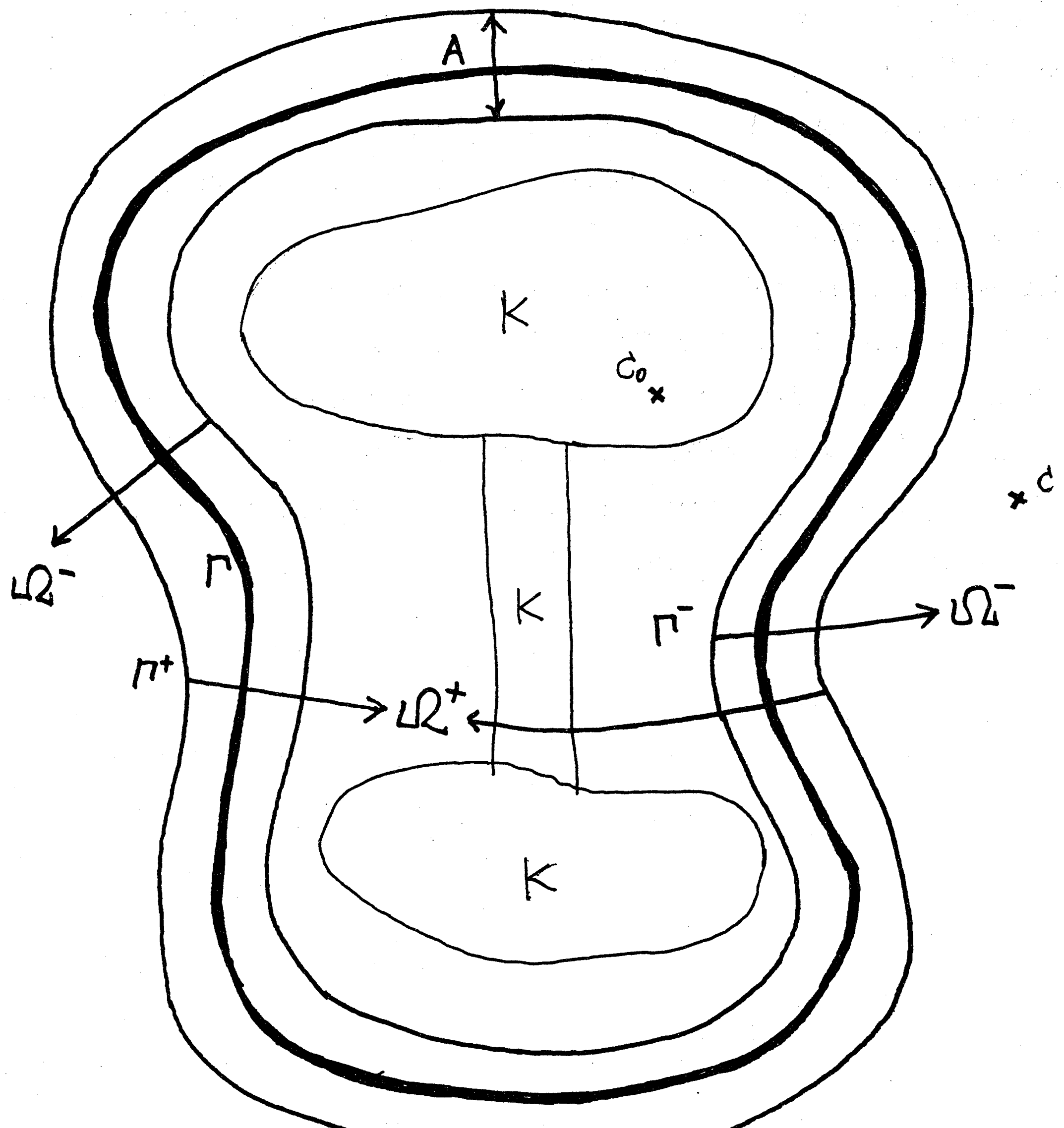
そこで，１点 $c_0 \in K$ を固定して，f を $f/(z - c_0)^m$ で置き換えれば，$h = \log g$ は $\bar{A}$ 上で１価正則となる．以上の準備をした上で，

$$h^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ (z \in \Omega^+)$$
$$h^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ (z \in \Omega^-)$$

とおく．Cauchy の積分公式により A 上で $g = e^{h^+ - h^-}$ が成り立つ．よって，

$$F = \begin{cases} qe^{h^+ \circ \varphi} & \text{on } \varphi^{-1}(\Omega^+) \\ fe^{h^- \circ \varphi} & \text{on } \varphi^{-1}(\Omega^-) \end{cases}$$

とおけば，$F \in H^\infty(\widetilde{D})$ は well-defined であり，$F(c^+) = -F(c^-)(\neq 0)$．よって，被覆写像 $\varphi : \widetilde{D} \to D$ について Myrberg 現象は起こらない． $\square$



References

1. F. Forelli, *A note on divisibility in* $H^{\infty}(X)$, Canadian. J. Math. **36** (1984), *458–469.*
2. M. Hayashi and T. Kato, *Point separation of a two-sheeted disc by bounded analytic functions*, Hokkaido Math. J. **27** (1998), *553–565.*
3. M. Hayashi, Y. Kobayashi and M. Nakai, *A uniqueness theorem and the Myrberg phenomenon for a Zalcman domain* (to appear).
4. . M. Hayashi and M. Nakai, *Point separation by bounded analytic functions of a covering Riemann surface*, Pacific J. Math. **134** (1988), *261–273.*
5. M. Hayashi and M. Nakai, *On the Myrberg type phenomenon*, in "Analytic Function Theory of One Complex Variable" (Y. Komatsu, K. Niino and C. C. Yong, eds.), Pitman Research Notes in Math. Sci. **212** (1989), *1–12.*
6. M. Hayashi and M. Nakai, *A uniqueness theorem and the Myrberg phenomenon*, J. d'Analyse Math. **76** (1998), *109–136.*
7. M. Hayashi, M. Nakai and S. Segawa, *Bounded analytic functions on two sheeted discs*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), *799–819.*
8. M. Hayashi, M. Nakai and S. Segawa, *Two-sheeted discs and bounded analytic functions*, J. d'Analyse Math. **61** (1993), *293–325.*
9. P. J. Myrberg, *Über die Analytishce Fortsetzung von beschränkten Funktionen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, No.**58**, (1949), *1–7.*