数理解析研究所講究録
1137 巻 2000 年 42-44

Douglas algebras which admit codimension 1 linear isometries

新潟大・理　泉池敬司 (Keiji Izuchi)

単位円周 ∂D 上で考える。$H^\infty \subset B \subset L^\infty$ である閉部分環 B は Douglas algebra と呼ばれる。$T : H^\infty \ni f \to zf$ は codimension 1 の linear isometry である。L^∞ 上にはそのような作用素は存在しない。Araujo and Font [1] は H^∞ 以外の Douglas 環には codimension 1 の linear isometry は存在しないと予想した。しかしその反例は簡単に見つけられる。その特徴づけは次である。

定理 ([5]). B を Douglas 環とする。B が codimension 1 の linear isometry をもつ必要十分条件は $B \neq B_b$ である。

ここで B_b は B の Bourgain 環と呼ばれるもので ([2] を見よ)、次をみたす $f \in L^\infty$ の集合である。

$$\forall \{f_n\}_n \subset B,\ f_n \to 0\, weakly \ \Rightarrow\ \|f_n f + B\| \to 0.$$

この証明は Douglas 環の構造が良く知られているからできるが [3, 4]、function algebra でも同様の議論が出来るように思われる。しかしいくつかの問題点が残され、それらの点について述べる。

A を X 上の function algebra とする。X は A の Shilov boundary とする。$T : A \to A$ なる codimension 1 の linear isometry があったとする。X が isolated point を持つ時、$A = C(X)$ は codimension 1 の linear isometry があるから、次を仮定する。

仮定 1： X は isolated point を持たない。

A が Douglas 環の時にはみたす性質として、次の２つを仮定する。

仮定 2： $\forall x \in X$ に対して、$\exists f \in TA$ s.t. $f(x) \neq 0$.

仮定 3： $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ に対して、$\exists f \in TA$ s.t. $|f(x_1)| \neq |f(x_2)|$.

すると Araujo and Font [1] の仕事より、

$$Tf = \psi(f \circ \varphi), \quad \forall f \in A \tag{1}$$

と表せる。ここで、$\psi \in A, |\psi| = 1$ on X, $\varphi : X \to X$ homeomorphism である。

問題１．$A \circ \varphi \subset A$？

$A \circ \varphi \not\subset A$ とする。B を A と $A \circ \varphi$ より生成される function algebra とする。$A \subset B, A \neq B$ であり、（１）より $\psi B \subset A$ となる。このような状況は一般に起こり得る。その上 A を logmodular と仮定すると、$M(B) \subset M(A)$ となる。$y \in M(B)$ とする。$f \in A$ に対して $(\psi(f \circ \varphi))(y) = \psi(y)(f \circ \varphi)(y)$ となる。ψ が異なる $M(B)$ の２点で zero になると TA は $M(B)$ の異なる２点で zero となり codimension 1 の仮定に反する。よって ψ が $M(B)$ の異なる２点で zero 点を持つような function algebra の時には問題１はＯＫとなる。A が Douglas algebra の時はそうなっている。A が disk algebra の時は $B = C(\partial D)$ となり、$\varphi B \subset A$ となることはなく、問題１はＯＫとなる。
A が ball algrebra の時、continuous inner は無いから問題１は自動的にＯＫとなる。

次に

$$A \circ \varphi \subset A \tag{2}$$

が成り立っていると仮定しよう。$\psi \in A$ であるが、$\psi \in A^{-1}$ と $\psi \notin A^{-1}$ の２つに分けられる。

Case 1. $\psi \notin A^{-1}$ の時。

次をみたす $x_0 \in M(A)$ が存在する。

$$\psi(x_0) = 0. \tag{3}$$

（１）と（２）より $TA = \psi A \circ \varphi \subset A_{x_0} \equiv \{f \in A; f(x_0) = 0\}$ となる。TA は codimension 1 より $TA = A_{x_0}$ となる。よって

$$\psi A \subset_{by(3)} A_{x_0} = TA = \psi(A \circ \varphi) \subset_{by(2)} \psi A$$

である。従って

$$A = A \circ \varphi \tag{4}$$

$$\psi A = A_{x_0} \tag{5}$$

となる。Douglas algebra の時、（５）から $A_b \neq A$ が導ける。

Case 2. $\psi \in A^{-1}$ の時。（この時、自動的に（２）がみたされる）

TA は codimension 1、よって $\overline{\psi} TA$ もそうである。よって（１）より $A \circ \varphi$ も A で codimension 1 となり、$A = A \circ \varphi + C\lambda,\ \lambda \in A,\ \lambda \notin A \circ \varphi$ と表せる。従って

$$A \circ \varphi^{-1} = A + C\lambda \circ \varphi^{-1},\ \ \lambda \circ \varphi^{-1} \notin A \tag{6}$$

となる。上のことより $A \circ \varphi^{-1}$ は X 上の function algebra となる。

問題２．$A + C\lambda$ が function algebra となるような function algrebra $A, \lambda \notin A$, はあるか？

disk algebra, Douglas algebra 等はそのような λ はない。しかし、問題２に対する反例がある。$\mathcal{A}$ を disk algebra とし $A = \{f \in \mathcal{A}; f'(0) = 0\}$ とすると A は単位円周上の function algebra であり、$\lambda = z$ とすると $A + C\lambda = \mathcal{A}$ である。従って更に話を進める為には、（６）を基にすることになる。

$\forall f \in A$ に対して（６）より、$(\lambda \circ \varphi^{-1})f = F_f + a_f \lambda \circ \varphi^{-1}$ となる $F_f \in A$ と $a_f \in C$ がただ一つ存在する。すると $A \ni f \to a_f$ は non-zero multiplicative linear functional となり、$a_f = f(y_0), \forall f \in A,$ となる $y_0 \in M(A)$ が存在する。よって $(\lambda \circ \varphi^{-1})(f - f(y_0)) = F_f \in A$, つまり

$$(\lambda \circ \varphi^{-1})A_{y_0} \subset A$$

となる。この続きとしては、y_0 での解析構造を調べて、矛盾を出す方法が考えられる。

予想．仮定１，２，３を仮定する。A は codimension 1 linear isometry を持つ $\Leftrightarrow$ $\psi A = A_{x_0}$ でかつ $|\psi| = 1$ on X となる $\psi \in A, x_0 \in M(A)$ が存在する。

ここまでは、講演での話の内容であるが（仮定２，３を追加した）、渡辺誠治氏から仮定２，３がない時、予想が成立するとは限らないことを指摘された。

参考文献

[1] J. Araujo and J.J. Font, Codimension 1 linear isometries on function algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 127(1999), 2273-2281.

[2] J. Cima and R. Timoney, The Dunford Pettis property for certain planner uniform algebras, Michigan Math. J. 34(1987), 99-104.

[3] P. Gorkin, K. Izuchi, and R. Mortini, Bourgain algebras of Douglas algebras, Canad. J. Math. 44(1992), 797-804.

[4] K. Izuchi, Interpolating Blaschke products and factorization theorems, J. London Math. Soc. (2)50(1994), 547-567.

[5] K. Izuchi, Douglas algebras which admit codimension 1 linear isometries, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.