数理解析研究所講究録
1140 巻 2000 年 1-21

extraspecial Sylow p- 部分群をもつ有限群の mod p コホモロジー環

愛媛大学理学部 佐々木 洋城 (Hiroki Sasaki)

1 はじめに

有限群のコホモロジー環を具体的に計算することは, 係数環を問わず, 一般に困難である. 筆者はここ 10 年ほど有限群の Sylow 2- 部分群が二面体群, 準二面体群や wreathed 2- 群である有限群の mod 2 コホモロジー環を加群論の立場から調べてきた. その方法は斉次コホモロジー類から定められる Carlson 加群とよばれる加群を解析することに依る. この方法を Sylow p- 部分群が extraspecial p- 群である有限群に適用する.

extraspecial 2- 群のコホモロジー環は 30 年前に Quillen [8], [9] によって知られていた. p が奇素数のときの extraspecial p- 群については最小位数の p^3 の場合のみがわかっている. 指数 p^2 の場合は metacyclic である. metacyclic p- 群, およびこれを Sylow p- 部分群として含む有限群の mod p コホモロジー環は求められている (Diets-Martino-Priidy [2], Sasaki [13]). しかし, 指数 p のもの, これを以下, P とおく, の場合はむずかしい. 整数係数の場合は G. Lewis [5] によって得られていたが, 標数 p の体を係数環とするコホモロジー環はやっと 10 年前に Leary [4] によって求められたばかりであり, それは整数係数の場合にもましてかなり複雑なものである. この extraspecial p- 群 P を Sylow p- 部分群にもつ有限群の整数係数コホモロジー環を研究したものとして, Tezuka-Yagita [15], D. J. Green [3], Tezuka-Yagita [16] があげられる. 特に, Tezuka-Yagita [16] は包括的な内容のものであって, 体係数のコホモロジー環を考察するうえでも貴重な情報と示唆を与えてくれた. また, 体係数のコホモロジー環を扱ったものとして Milgram-Tezuka [6] では Mathieu 群 M_{12} の mod 3 コホモロジー環を計算し, これが一般線型群 $\mathrm{GL}(3, \mathbf{F}_3)$ のそれと同型であることを示している. また, Yagita [18] は Tezuka-Yagita [16] に引き続き, 整数係数コホモロジー環の考察から体係数のコホモロジー環の考察へ進んでいる. (前回の短期共同研究の報告集も参照してください)

ここでは, exstraspecial p- 群 P を Sylow p- 部分群として含む有限群 G の mod p コホモロジー環 $H^*(G,k)$, k は標数 p の体, を考察する. 例として, 一般線型群 $\mathrm{GL}(3, \mathbf{F}_p)$ の mod p コホモロジー環を述べる. (実はここまでの内容は 1998 年 9 月の数理研でのシンポジウム「有限群の表現論およびその周辺」の報告集に書いたことと同じです) また, 講演では述べなかったのだが, Held の単純群の mod 7 コホモロジー環についても付け加えたい. なお, 素数 p が 3 のときと 5 以上のときとでは P のコホモロジー環 $H^*(P,k)$ の構造が違うので, ここでは $p \geq 5$ と仮定する. もっとも, $p = 3$ のときも考察の方法は同じである.

記号を説明しておく. k を体とし, その標数を p とする. G を有限群とする. 考える kG-加群はすべて有限生成である. H を G の部分群とする. 類 $\zeta \in H^*(G,k)$ に対してしばしば, H への制限 $\mathrm{res}_H \zeta$ を ζ_H とか $\zeta_{|H}$ と表す. 類 $\eta \in H^*(H,k)$ に対してコレストリクション $\mathrm{cor}^G \eta$ を $\mathrm{tr}^G \eta$ と表す. 斉次類 $\eta \in H^n(H,k)$, ここで次数 n は偶数とする, に対して Evens のノルム写像 norm : $H^n(H,k) \longrightarrow H^{|G:H|n}(G,k)$ による η の像を $\mathrm{norm}^G \eta$ と

表す. 元 $g \in G$ に対して η^g で g による共役 $\mathrm{con}^g\,\eta \in H^*(H^g, k)$ を表す. G の自己同型 φ の逆写像が誘導するコホモロジー環の自己同型 $(\varphi^{-1})^* : H^*(H, k) \longrightarrow H^*(H^\varphi, k)$ による類 η の像を η^φ と表す. kG- 加群 U, V に対して kG- 準同型のなす空間 $\mathrm{Hom}_{kG}(U, V)$ を $(U, V)_G$ と表す.

2 準備

まず, 大事な Carlson 加群を定義しよう.

定義 2.1 $H^n(G, k) \simeq (\Omega^n(k_G), k)_G$ である. この同型で $\zeta(\neq 0) \in H^n(G, k)$ が対応する kG- 準同型を $\widehat{\zeta} : \Omega^n(k_G) \longrightarrow k_G$ と表し, その核を L_ζ とおく:

$$0 \longrightarrow L_\zeta \longrightarrow \Omega^n(k_G) \xrightarrow{\widehat{\zeta}} k_G \longrightarrow 0.$$

核 L_ζ を ζ の Carlson 加群とよぶ. 次の可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & L_\zeta \arrow[r, equal] \arrow[d] & L_\zeta \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^n k \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\zeta}"'] & P \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{n-1}k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{-1}L_\zeta \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{n-1}k \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

部分群 H への制限は射影加群を法としてコホモロジー類の H への制限の Carlson 加群である:

$$(L_\zeta)_{|H} = L_{(\zeta_H)} \oplus \text{射影加群}.$$

コホモロジー完全系列を考えることにより

補題 2.1 ρ がコホモロジー環 $H^r(G, k)$ の正則元ならば, 次の完全系列が存在する：

$$0 \longrightarrow (\Omega^{r-1}(k), k)_G \longrightarrow (\Omega^{-1}(L_\rho), k)_G \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{kG}(k, k) \xrightarrow{\cdot\rho} \mathrm{Ext}^{n+r}_{kG}(k, k) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{kG}(L_\rho, k) \longrightarrow 0,\ n \geq 0.$$

それ故, Carlson 加群 L_ρ を知りたい:

(1) L_ρ の直和分解, 直既約直和因子のヴァーテックスとソース;
(2) L_ρ の直既約直和因子 X の $\mathrm{Ext}^*_{kG}(X, k)$.

一般に有限群 G の mod p コホモロジー環 $H^*(G,k)$ はネーター的である. G の p- ランクと $H^*(G,k)$ の Krull 次元は一致する. G の p- ランクを r とすればコホモロジー環 $H^*(G,k)$ は r 個の斉次類からなるパラメーター系 $\{\zeta_1,\ldots,\zeta_r\}$ をもつ. これはコホモロジー環 $H^*(G,k)$ はこれらで生成される部分環上有限生成であることを意味する. また, $\{\zeta_1,\ldots,\zeta_r\}$ がパラメーター系であることはその Carlson 加群のテンサー積 $L_{\zeta_1}\otimes\cdots\otimes L_{\zeta_r}$ が射影的であることと同値である.

G の p- ランクを r とする. 自然数 $i=1,\ldots,r$ に対して

$$\mathcal{H}_i(G)=\{\,C_G(E)\mid E\text{ はランク } i \text{ の基本可換 } p\text{- 部分群}\,\}$$

とおく.

定理 2.2 (Carlson) コホモロジー環 $H^*(G,k)$ は次の性質をもつパラメーター系 $\{\zeta_1,\ldots,\zeta_r\}$ をもつ: 各 $i=1,\ldots,r$ に対して

$$\zeta_i\in\sum_{H\in\mathcal{H}_i(G)}\mathrm{tr}_H^G\,H^*(H,k).$$

系 2.3 (奥山) $H^*(G,k)$ のパラメーター系 $\{\zeta_1,\ldots,\zeta_r\}$ を上の定理のようにとれば, テンサー積 $L_{\zeta_1}\otimes\cdots\otimes L_{\zeta_{r-1}}$ は $\mathcal{H}_r(G)$- 射影的である.
特に, $r=2$ のとき, L_{ζ_1} は $\mathcal{H}_2(G)$- 射影的であり, 類 ζ_1 は $H^*(G,k)$ の正則元である.

考える extraspecial p- 群のランクは 2 であるから, 上の系を用いることができる.

さらに, 有限群 G の p- ランクが 2 のときコホモロジー環の生成元について

補題 2.4 コホモロジー環 $H^*(G,k)$ のひとつのパラメーター系を $\{\rho,\sigma\}$ とし, それぞれ r 次, s 次の斉次類であるとすれば $H^*(G,k)$ は部分環 $k[\rho,\sigma]$ 上 $r+s-2$ 次以下の斉次類で生成される.

次は Carlson 加群を Green 対応を用いて調べる際に基本となる:

定理 2.5 $\rho\in H^n(G,k)$ を斉次類とする. U を ρ の Carlson 加群 L_ρ の直既約直和因子とし, D をそのヴァーテックスとする. H を G の部分群で正規化群 $N_G(D)$ を含むものとする. このとき (G,D,H) に関する U の Green 対応子 V は類 ρ の H への制限 $\rho_H=\mathrm{res}_H\,\rho$ の Carlson 加群 L_{ρ_H} の直和因子である.

$$\begin{array}{ccc}
G & \qquad & L_\rho = U\oplus\cdots \\
| & & \big\updownarrow \text{Green対応} \\
H & & L_{(\rho_H)} = V\oplus\cdots \\
| & & \\
N_G(D) & &
\end{array}$$

注意 2.1 $\rho\in H^n(G,k)$ がべき零でなければ, その Carlson 加群 L_ρ の直既約直和因子の重複度は 1 である.

次はいわゆる stable-element-theorem の一種である.

命題 2.6 (D. J. Green [3]) *Let G be a finite group with Sylow p-subgroup $P \simeq p_+^{1+2}$, and suppose that $x \in H^*(P, \mathbf{Z})$ satisfies the stability condition for all g such that the intersection $P \cap P^g$ has order at least p^2: then x is stable.*

上では係数環は整数環 $\mathbf{Z}$ であるが, 一般に可換環でよい. また, この事実はより一般には次の命題から理解される.

命題 2.7 G を有限群, R を可換環とし, RG を G の R 上の群環とする. S を G の Sylow p-部分群とする. S の部分群の集合 $\mathcal{F}$ を次のように定義する：

$$\mathcal{F} = \{ H \leq S \mid H \text{ は tame, } C_S(H) \leq H,\ N_G(H)/HC_G(H) \text{ は } p\text{-群でない} \}.$$

M を自明な RG- 加群とする. コホモロジー類 $\zeta \in H^*(S, M)$ は

(1) 任意の $g \in N_G(S)$ に対して $\zeta^g = \zeta$;
(2) 任意の $H \in \mathcal{F}$ と任意の $x \in N_G(H)$ に対して $\mathrm{res}_H \zeta^x = \mathrm{res}_H \zeta$

のとき, しかもこのときに限って G- 安定である.

3 extraspecial p- 群のコホモロジー環

Leary に従って, extraspecial p- 群

$$P = \langle a, b \mid a^p = b^p = [a, b]^p = 1, [[a, b], a] = [[a, b], b] = 1 \rangle$$

のコホモロジー環を述べる.

定義 3.1

$$c = [a, b]$$

とおく. $Z(P) = \langle c \rangle$ である. $j, 0 \leq j \leq p-1$, に対して

$$E_j = \langle ab^j, c \rangle;\ a_j = ab^j,\ b_j = b$$

とおき,

$$E_\infty = \langle b, c \rangle;\ a_\infty = b,\ b_\infty = a^{-1}$$

とおく.

$$\Omega = \{0, 1, \ldots, p-1, \infty\};\ \mathcal{E} = \{ E_j \mid j \in \Omega \}$$

とおく. 集合 $\mathcal{E}$ はランク 2 の基本可換部分群全部の集合である.

定義 3.2 $j \in \Omega$ に対して, $H^1(E_j, k)$ を $\mathrm{Hom}(E_j, k)$ とみなして,

$$\lambda_1^{(j)} = a_j^*,\ \mu_1^{(j)} = c^*$$

とおき,

$$\lambda_2^{(j)} = \Delta(\lambda_1^{(j)}),\ \mu_2^{(j)} = \Delta(\mu_1^{(j)}),$$

ここで $\Delta : H^1(E_j, k) \to H^2(E_j, k)$ は Bockstein 準同型, とおく.

定義 3.3 $H^1(P,k)$ を $\mathrm{Hom}(P,k)$ とみなして,

$$\alpha_1 = a^*, \qquad \beta_1 = b^*;$$
$$\alpha_2 = \Delta(\alpha_1),\ \beta_2 = \Delta(\beta_1),$$

ここで $\Delta : H^1(P,k) \to H^2(P,k)$ は Bockstein 準同型である.

$$\chi_{2p-2} = \mathrm{tr}^P_{E_\infty}(\mu_2^{(\infty)\,p-1}) - \alpha_2^{p-1}$$

とおき,

$$\nu$$

で Leary の $z \in H^{2p}(P,k)$ を表すことにする.

次の事実は興味深い.

補題 3.1

$$\nu = \mathrm{norm}^P_{E_\infty}(\mu_2^{(\infty)}) \in H^{2p}(P,k).$$

テンサー積 $L_{\chi_{2p-2}} \otimes L_\nu$ はどの $E \in \mathcal{E}$ に制限しても射影的であって, 従って, P 上でも射影的である. ゆえに

命題 3.2 $\{\chi_{2p-2}, \nu\}$ はコホモロジー環 $H^*(P,k)$ のパラメーター系である.

次は我々の考察の鍵となる事実である.

補題 3.3

$$\chi_{2p-2} = \sum_{j\in\Omega} \mathrm{tr}^P_{E_j}(\mu_2^{(j)\,p-1}).$$

系 2.3 をコホモロジー環 $H^*(P,k)$ のパラメーター系 $\{\chi_{2p-2}, \nu\}$ に適用して

系 3.4 類 ν はコホモロジー環 $H^*(P,k)$ の正則元であり, その Carlson 加群 L_ν は $\mathcal{E}$-射影的である. 実際

$$L_\nu = \bigoplus_{j\in\Omega} L_{\mu_2^{(j)}}{}^P.$$

定義 3.4 $\langle\ ,\ ,\ \rangle$ で Massey 積を表す.

$$\eta_2 = \langle \alpha_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle,\ \theta_2 = \langle \beta_1, \beta_1, \alpha_1 \rangle;$$
$$\eta_3 = \Delta(\eta_2), \qquad \theta_3 = \Delta(\theta_2),$$

ここで $\Delta : H^2(P,k) \to H^3(P,k)$ は Bockstein 準同型, とおく.

$$\chi_{2i-1} = \mathrm{tr}^P_{E_\infty}(\mu_1^{(\infty)}\mu_2^{(\infty)\,i-1}),\ i = 2,\ldots,p-2,$$
$$\chi_{2i} = \mathrm{tr}^P_{E_\infty}(\mu_2^{(\infty)\,i}),\ i = 2,\ldots,p-2,$$
$$\chi_{2p-3} = \mathrm{tr}^P_{E_\infty}(\mu_1^{(\infty)}\mu_2^{(\infty)\,p-2}) - \alpha_2^{p-2}\alpha_1,$$
$$\chi_{2p-1} = \mathrm{tr}^P_{E_\infty}(\mu_1^{(\infty)}\mu_2^{(\infty)\,p-1}) + \alpha_2^{p-2}\eta_3.$$

とおく.

定理 3.5 (Leary) p を 3 より大きい素数とする. コホモロジー環 $H^*(P,k)$ は上で定義した類で生成され, この生成元は次の関係式をみたす：

$$\alpha_1\beta_1=0,\ \alpha_2\beta_1=\beta_2\alpha_1,\ \alpha_1\eta_2=\beta_1\theta_2=0,\ \alpha_1\theta_2=\beta_1\eta_2,$$

$$\eta_2^2=\theta_2^2=\eta_2\theta_2=0,\ \alpha_1\eta_3=\alpha_2\eta_2,\ \beta_1\theta_3=\beta_2\theta_2,$$

$$\eta_3\beta_1=2\alpha_2\theta_2+\beta_2\eta_2,\ \theta_3\alpha_1=2\beta_2\eta_2+\alpha_2\theta_2,$$

$$\eta_2\eta_3=\theta_2\theta_3=0,\ \theta_2\eta_3=-\eta_2\theta_3,\ \alpha_2\theta_3=-\beta_2\eta_3,$$

$$\alpha_2(\alpha_2\theta_2+\beta_2\eta_2)=\beta_2(\alpha_2\theta_2+\beta_2\eta_2)=0,$$

$$\alpha_2^p\beta_1-\beta_2^p\alpha_1=0,\ \alpha_2^p\beta_2-\beta_2^p\alpha_2=0,$$

$$\alpha_2^p\theta_2+\beta_2^p\eta_2=0,\ \alpha_2^p\theta_3+\beta_2^p\eta_3=0,$$

$$\chi_{2i}\alpha_1=\begin{cases}0\\-\alpha_2^{p-1}\alpha_1\end{cases}\quad \chi_{2i}\beta_1=\begin{cases}0, & i<p-1\\-\beta_2^{p-1}\beta_1, & i=p-1\end{cases},$$

$$\chi_{2i}\alpha_2=\begin{cases}0\\-\alpha_2^p\end{cases}\quad \chi_{2i}\beta_2=\begin{cases}0, & i<p-1\\-\beta_2^p, & i=p-1\end{cases},$$

$$\chi_{2i}\eta_2=\begin{cases}0\\-\alpha_2^{p-1}\eta_2\end{cases}\quad \chi_{2i}\theta_2=\begin{cases}0, & i<p-1\\-\beta_2^{p-1}\theta_2, & i=p-1\end{cases},$$

$$\chi_{2i}\eta_3=\begin{cases}0\\-\alpha_2^{p-1}\eta_3\end{cases}\quad \chi_{2i}\theta_3=\begin{cases}0, & i<p-1\\-\beta_2^{p-1}\theta_3, & i=p-1\end{cases},$$

$$\chi_{2i}\chi_{2j}=\begin{cases}0, & i+j<2p-2\\ \alpha_2^{2p-2}+\beta_2^{2p-2}-\alpha_2^{p-1}\beta_2^{p-1}, & i=j=p-1\end{cases},$$

$$\chi_{2i-1}\alpha_1=\begin{cases}0\\-\alpha_2^{p-1}\eta_2\end{cases}\quad \chi_{2i-1}\beta_1=\begin{cases}0, & i<p\\ \beta_2^{p-1}\theta_2, & i=p\end{cases},$$

$$\chi_{2i-1}\alpha_2=\begin{cases}0\\-\alpha_2^{p-1}\alpha_1\\ \alpha_2^{p-1}\eta_3\end{cases}\quad \chi_{2i-1}\beta_2=\begin{cases}0, & i<p-1\\-\beta_2^{p-1}\beta_1, & i=p-1\\-\beta_2^{p-1}\theta_3, & i=p\end{cases},$$

$$\chi_{2i-1}\eta_2=0,\ \chi_{2i-1}\theta_2=0,$$

$$\chi_{2i-1}\eta_3=\begin{cases}0\\-\alpha_2^{p-1}\eta_2\end{cases}\quad \chi_{2i-1}\theta_3=\begin{cases}0, & i\neq p-1\\-\beta_2^{p-1}\theta_2, & i=p-1\end{cases},$$

$$\begin{aligned}&\chi_{2i-1}\chi_{2j-1}\\ &=\begin{cases}0, & i<p-1 \text{ or } j<p-1\\ \alpha_2^{2p-3}\eta_2-\beta_2^{2p-3}\theta_2+\alpha_2^{p-1}\beta_2^{p-2}\theta_2, & i=p \text{ and } j=p-1\end{cases},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\chi_{2i-1}\chi_{2j}\\ &=\begin{cases}0, & i<p-1 \text{ or } j<p-1\\ \alpha_2^{2p-3}\alpha_1+\beta_2^{2p-3}\beta_1-\alpha_2^{p-1}\beta_2^{p-2}\beta_1, & i=j=p-1\\ -\alpha_2^{2p-3}\eta_3+\beta_2^{2p-3}\theta_3-\alpha_2^{p-1}\beta_2^{p-2}\theta_3, & i=p \text{ and } j=p-1\end{cases}\end{aligned}$$

P の外部自己同型のコホモロジー環への作用を述べる. $\mathrm{Out}(P) \simeq \mathrm{GL}(2, \mathbf{F}_p)$ であり, 正則行列

$$\psi = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$$

は P に自己同型として次のように作用する:

$$a^\psi = a^s b^t, \ b^\psi = a^u b^v.$$

一般線形群 $\mathrm{GL}(2, \mathbf{F}_p)$ は次の行列で生成される:

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \delta = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}, \ d_1, d_2 \in \mathbf{F}_p^*.$$

補題 3.6 (Leary) p を 3 より大きな素数とする. 上の自己同型はコホモロジー環 $H^*(P, k)$ に次のように作用する:

	φ	τ	δ	
α_i	α_i	β_i	$\dfrac{1}{d_1}\alpha_i$	$i = 1, 2$
β_i	$-\alpha_i + \beta_i$	α_i	$\dfrac{1}{d_2}\beta_i$	$i = 1, 2$
η_i	η_i	θ_i	$\dfrac{1}{d_1^2 d_2}\eta_i$	$i = 2, 3$
θ_i	$\eta_i + \theta_i$	η_i	$\dfrac{1}{d_1 d_2^2}\theta_i$	$i = 2, 3,$
χ_{2i-1}	χ_{2i-1}	$(-1)^i \chi_{2i-1}$	$\dfrac{1}{(d_1 d_2)^i}\chi_{2i-1}$	$i = 4, \ldots, p$
χ_{2i}	χ_{2i}	$(-1)^i \chi_{2i}$	$\dfrac{1}{(d_1 d_2)^i}\chi_{2i}$	$i = 4, \ldots, p-1$
ν	ν	$-\nu$	$\dfrac{1}{d_1 d_2}\nu$	

補題 3.7 p を 3 より大きな素数とする. コホモロジー環 $H^*(P, k)$ の生成元の部分群 $E \in \mathcal{E}$ への制限は次のようである:

ζ	$\mathrm{res}_{E_j}\, \zeta, \ j \in \mathbf{F}_p$	$\mathrm{res}_{E_\infty}\, \zeta$	
α_i	$\lambda_i^{(j)}$	0	$i = 1, 2$
β_i	$j\lambda_i^{(j)}$	$\lambda_i^{(\infty)}$	$i = 1, 2$
η_2	$-\lambda_1^{(j)}\mu_1^{(j)}$	0	
θ_2	$j\lambda_1^{(j)}\mu_1^{(j)}$	$\lambda_1^{(\infty)}\mu_1^{(\infty)}$	

continued on next page

continued from previous page

ζ	$\mathrm{res}_{E_j}\zeta,\ j\in\mathbf{F}_p$	$\mathrm{res}_{E_\infty}\zeta$	
η_3	$-\lambda_1^{(j)}\mu_2^{(j)}+\lambda_2^{(j)}\mu_1^{(j)}$	0	
θ_3	$j(\lambda_1^{(j)}\mu_2^{(j)}-\lambda_2^{(j)}\mu_1^{(j)})$	$\lambda_1^{(\infty)}\mu_2^{(\infty)}-\lambda_2^{(\infty)}\mu_1^{(\infty)}$	
χ_{2i-1}	0		$i=4,\ldots,p-2$
χ_{2i}	0		$i=4,\ldots,p-2$
χ_{2p-3}	$-\lambda_2^{(j)p-2}\lambda_1^{(j)}$		
χ_{2p-2}	$-\lambda_2^{(j)p-1}$		
χ_{2p-1}	$\lambda_2^{(j)p-2}(-\lambda_1^{(j)}\mu_2^{(j)}+\lambda_2^{(j)}\mu_1^{(j)})$		
ν	$\mu_2^{(j)p}-\mu_2^{(j)}\lambda_2^{(j)p-1}$		

4 Sylow p- 部分群が extraspecial p- 群である有限群

以後, G を P を Sylow p- 部分群にもつ有限群とする. 体 k は $\mathbf{F}_{p^2}$ を含むものとする.

定義 4.1 コホモロジー類 ρ, σ を次のように定義する:

$$\rho=\nu^{p-1}-\chi_{2p-2}{}^{p}\in H^{2p(p-1)}(P,k),$$
$$\sigma=\nu^{p-1}\chi_{2p-2}\in\sum_{E\in\mathcal{E}}\mathrm{tr}_E^P\,H^{2(p^2-1)}(E,k).$$

補題 4.1 任意の $E\in\mathcal{E}$ に対して

(1)

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_E\,\rho&=\mu_2^{p(p-1)}+\mu_2^{(p-1)(p-1)}\lambda_2^{p-1}+\cdots+\lambda_2^{p(p-1)}\\&=\prod_{\xi\in\mathbf{F}_{p^2}\setminus\mathbf{F}_p}(\mu_2-\xi\lambda_2);\end{aligned}$$

(2)

$$\mathrm{res}_E\,\sigma=(\mu_2\lambda_2^p-\mu_2^p\lambda_2)^{p-1}.$$

類 ρ, σ は補題 3.6 により, Out(P)- 不変であり, さらに上の補題により, 任意の $E\in\mathcal{E}$ に対して $\mathrm{res}_E\,\rho$, $\mathrm{res}_E\,\sigma$ は $N_G(E)$- 不変であるから, 命題 2.6 により

定理 4.2 類 ρ,σ は普遍安定類である.

さらに

定理 4.3 (1) $\{\rho,\sigma\}$ はコホモロジー環 $H^*(P,k)$ のパラメーター系である.
(2) 類 ρ は $H^*(P,k)$ で正則元である.

(3) Carlson 加群 L_ρ は $\mathcal{E}$- 射影的である. 実際

$$L_\rho = \bigoplus_{E \in \mathcal{E}} \bigoplus_{\xi \in (\mathbf{F}_{p^2} \setminus \mathbf{F}_p)/P} L_{\mu_2 - \xi\lambda_2}{}^P$$

と直和分解する.

定義 4.2 定理 4.2 により $\widetilde{\rho} \in H^{2p(p-1)}(G, k)$ で

$$\mathrm{res}_P(\widetilde{\rho}) = \rho$$

であるものが存在する. また, $\widetilde{\sigma} \in H^{2(p^2-1)}(G, k)$ で

$$\mathrm{res}_P(\widetilde{\sigma}) = \sigma$$

であるものが存在する

定義 4.3 $L_{\widetilde{\rho}|P} \simeq L_\rho \oplus$ (射影加群) であるから, 加群 $L_{\widetilde{\rho}}$ は $\mathcal{E}$- 射影的である. 定理 4.3 により, その直既約直和因子の

(1) ヴァーテックスはある $E \in \mathcal{E}$ であり,
(2) ソースはある $L_{\mu_2 - \xi\lambda_2}$, $\xi \in \mathbf{F}_{p^2} \setminus \mathbf{F}_p$ である.

$E \in \mathcal{E}/G$ に対して Carlson 加群 $L_{\widetilde{\rho}}$ の直既約直和因子で, ヴァーテックスが E であるものの集合を

$$\{ X_i^{(E)} \mid i \in I^{(E)} \}$$

と表す. ここで, $i \neq j$ ならば $X_i^{(E)}$ と $X_j^{(E)}$ は異なるソースをもつことに注意する. $X_i^{(E)}$ の直和を $X^{(E)}$ と表す. このとき,

$$L_{\widetilde{\rho}} = \bigoplus_{E \in \mathcal{E}/G} X^{(E)}.$$

すなわち,

定理 4.4 Carlson 加群 $L_{\widetilde{\rho}}$ は次のように直和分解する:

$$L_{\widetilde{\rho}} = \bigoplus_{E \in \mathcal{E}/G} \bigoplus_{i \in I^{(E)}} X_i^{(E)},$$

ここで $i \neq j$ ならば $X_i^{(E)}$ と $X_j^{(E)}$ は異なるソースをもつ.

定義 4.4 $Y_i^{(E)}$ を $X_i^{(E)}$ の $(G, E, N_G(E))$ に関する Green 対応子とする. 定理 2.5 により, $Y_i^{(E)}$ は $\rho' = \mathrm{res}_{N_G(E)} \widetilde{\rho}$ の Carlson 加群 $L_{\rho'}$ の直和因子である. これらの 直和を $Y^{(E)}$ とおく:

$$Y^{(E)} = \bigoplus_{i \in I^{(E)}} Y_i^{(E)}.$$

ソース $L_{\mu_2 - \xi\lambda_2}$, $\xi \in \mathbf{F}_{p^2} \setminus \mathbf{F}_p$, はヴァーテックスの真部分群上では射影的であることから,

命題 4.5

$$(Y^{(E)})^G = X^{(E)} \oplus \text{射影加群}.$$

であり, さらに, 補題 2.1 により

系 4.6

$$\mathrm{Ext}^*_{kG}(L_{\widetilde{\rho}}, k) \simeq \bigoplus_{E \in \mathcal{E}/G} \mathrm{Ext}^*_{kN_G(E)}(Y^{(E)}, k).$$

従って, $\rho' = \mathrm{res}_{N_G(E)}\, \widetilde{\rho}$ の Carlson 加群 $L_{\rho'}$ の直和因子である $Y^{(E)}$ を調べればよい.

補題 4.7 上の記号の下で, 直既約 $kN_G(E)$- 加群 $Y_i^{(E)}$ のソースを $L_{\mu_2 - \xi_i \lambda_2}$ で表せば, 集合 $\{ L_{\mu_2 - \xi_i \lambda_2} \mid i \in I^{(E)} \}$ は剰余群 $N_G(E)/C_G(E)$ の集合 $\{ L_{\mu_2 - \xi\lambda_2} \mid \xi \in \mathbf{F}_{p^2} \setminus \mathbf{F}_p \}$ への作用の完全代表系である.

E が正規部分群である場合に調べるために, E のホロモルフ

$$N = E \rtimes \mathrm{GL}(2, \mathbf{F}_p)$$

を考える. $\rho' \in H^{2p(p-1)}(N, k)$ を

$$\mathrm{res}_P\, \rho' = \rho$$

なるものとする. $L_{\rho'}$ の直既約直和因子でヴァーテックスが E であるものを求めたい.

そのソースを $L_{\mu_2 - \xi\lambda_2}, \xi \in \mathbf{F}_{p^2} \setminus \mathbf{F}_p$, とする. その惰性群

$$H_\xi = \{ g \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{F}_p) \mid {L_{\mu_2 - \xi\lambda_2}}^g \simeq L_{\mu_2 - \xi\lambda_2} \}$$

は

補題 4.8 $\xi \in \mathbf{F}_{p^2} \setminus \mathbf{F}_p$ の最小多項式を $X^2 - eX + f$ とおくと

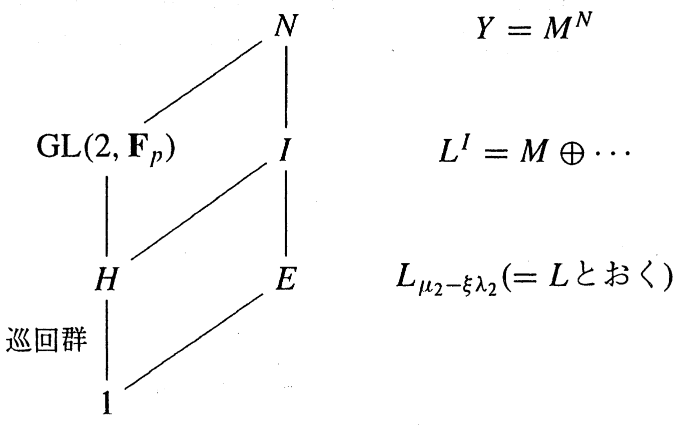
$$H_\xi = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 & -f \\ 1 & e \end{bmatrix} \,\middle|\, (s, u) \in \mathbf{F}_p \times \mathbf{F}_p \setminus \{ (0, 0) \} \right\}$$

であり, 位数 $p^2 - 1$ の巡回群である.

従って, $\mathrm{GL}(2, \mathbf{F}_p)$ は集合

$$\{ L_{\mu_2 - \xi\lambda_2} \mid \xi \in \mathbf{F}_{p^2} \setminus \mathbf{F}_p \}$$

に可移に作用し, 上の補題から, $L_{\rho'}$ の直既約直和因子でヴァーテックスが E であるものは唯一つであることがわかる. これを Y とおく. Y はソース $L = L_{\mu_2 - \xi\lambda_2}$ の惰性群 $I = E \rtimes H$ への誘導加群 L^I のある直和因子 M の N への誘導加群 M^N である.



M は

(1) $L = L_{\mu_2 - \xi\lambda_2}$ の $I = E \rtimes H$ への拡張 $M_0, \ldots, M_{p^2-2}$ のどれかであり,
(2) $\rho'' = \mathrm{res}_I\, \rho'$ の Carlson 加群 $L_{\rho''}$ の直和因子である.

このことから, 上の M を特定できて

$$\dim \mathrm{Ext}^n_{kN}(Y, k) = \begin{cases} 1 & n \equiv 2p-3, 2p-2, 2(p^2-1)-2, 2(p^2-1)-1 \pmod{2(p^2-1)} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

であることがわかる.

5 一般線型群 $\mathbf{GL}(3, \mathbf{F}_p)$ のコホモロジー環

$G = \mathrm{GL}(3, \mathbf{F}_p)$ とおく.

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおく. 行列 a, b で生成される部分群

$$P = \langle a, b \rangle$$

は位数 p^3, 指数 p の extraspecial 群であり, $G = \mathrm{GL}(3, \mathbf{F}_p)$ の Sylow p- 部分群である.

G における 位数 p^2 の基本可換群の共役類の代表系として

$$\{ E_0, E_1, E_\infty \}$$

を採用する.

$\widetilde{\rho} \in H^{2p(p-1)}(G, k)$ の Carlson 加群を考察する. Carlson 加群 $L_{\widetilde{\rho}}$ は

$$L_{\widetilde{\rho}} = \widetilde{X}_0 \oplus \widetilde{X}_1 \oplus \widetilde{X}_\infty$$

ここで, $\widetilde{X}_j$ は E_j をヴァーテックスにもつ直既約加群の直和, と直和分解する. E_j をヴァーテックスにもつ直既約加群を調べるために剰余群 $N_G(E_j)/C_G(E_j)$ を考察する.

補題 5.1

$$N_G(E_0)/C_G(E_0) = \left\{ \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & u \\ 0 & v & w \end{bmatrix}} \;\middle|\; \begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{F}_p) \right\}.$$

正則行列 $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & u \\ 0 & v & w \end{bmatrix}$ は行列 a, c に次のように作用する：

$$a^g = a^t c^u,$$
$$c^g = a^v c^w;$$

この剰余群は $\mathrm{Aut}\, E_0$ ($\simeq \mathrm{GL}(2, \mathbf{F}_p)$) に同型であり, 集合

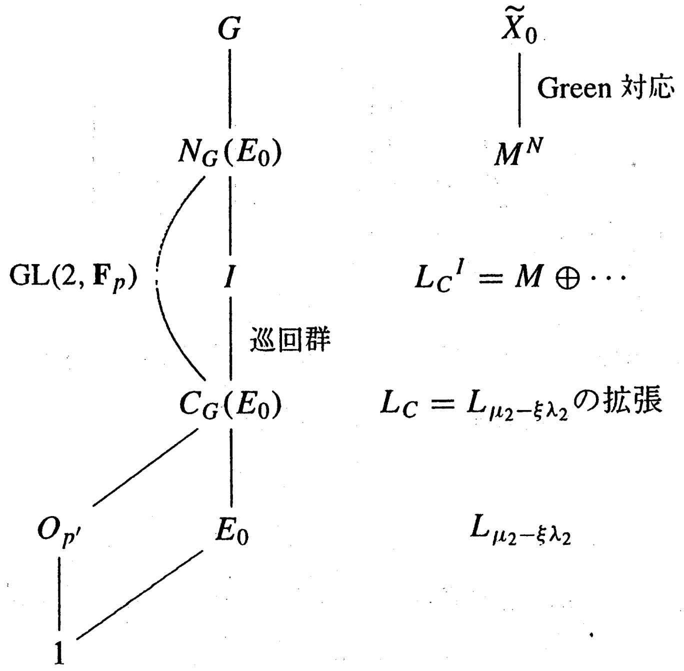
$$\{ L_{\mu_2^{(0)} - \xi\lambda_2^{(0)}} \mid \xi \in \mathbf{F}_{p^2} \setminus \mathbf{F}_p \}$$

に可移に作用する.

従って, E_0 をヴァーテックスにもつ直既約直和因子はただ 1 個である. すなわち, 加群 $\widetilde{X}_0$ は直既約である. そのソースを $L_{\mu_2 - \xi\lambda_2}$ とおく. 惰性群

$$I = \{ g \in N_G(E_0) \mid L_{\mu_2 - \xi\lambda_2}{}^g \simeq L_{\mu_2 - \xi\lambda_2} \}$$

の剰余群 $I/C_G(E_0)$ は補題 4.8 により位数 $p^2 - 1$ の巡回群である. L_C を $L_{\mu_2 - \xi\lambda_2}$ の $C_G(E_0)$ への拡張とする. $\widetilde{X}_0$ の $(G, E_0, N_G(E_0))$ に関する Green 対応子 Y_0 は L_C の惰性群への誘導加群のある直既約直和因子 M の正規化群 $N_G(E_0)$ への拡張である. この M は本質的には前節の最後に調べた M である.



よって

$$\dim \mathrm{Ext}^n_{kG}(\widetilde{X}_0, k) = \begin{cases} 1 & n \equiv 2p - 3, 2p - 2, 2(p^2 - 1) - 2, 2(p^2 - 1) - 1 \pmod{2(p^2 - 1)} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

補題 5.2

$$N_G(E_1)/C_G(E_1) = \left\{ \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & u \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}} \;\middle|\; t, u \in \mathbf{F}_p, t \neq 0 \right\}.$$

この剰余群は集合 $\{ L_{\mu_2^{(1)} - \xi\lambda_2^{(1)}} \mid \xi \in \mathbf{F}_{p^2} \setminus \mathbf{F}_p \}$ に可移に作用する.

従って, E_1 をヴァーテックスにもつ直既約直和因子はただ 1 個である. すなわち, 加群 $\widetilde{X}_1$ は直既約である. そのソースを $L_{\mu_2 - \xi\lambda_2}$ とおく. この場合, 補題 4.8により, ソース $L_{\mu_2 - \xi\lambda_2}$

の惰性群は中心化群 $C_G(E_1)$ と一致する. よって, $\widetilde{X}_1$ の Green 対応子は $L_{\mu_2-\xi\lambda_2}$ の $C_G(E_1)$ への拡張の $N_G(E_1)$ への誘導加群である.

$$\begin{tikzcd}
 & G & \widetilde{X}_1 \\
 & N_G(E_1) \arrow[u, dash] & L_C^N \arrow[u, dash, "\text{Green 対応}"'] \\
 & C_G(E_1) = I \arrow[u, dash] & L_C = L_{\mu_2-\xi\lambda_2}\text{の拡張} \\
O_{p'} \arrow[ur, dash] & E_1 \arrow[u, dash] & L_{\mu_2-\xi\lambda_2} \\
1 \arrow[u, dash] \arrow[ur, dash] & &
\end{tikzcd}$$

それゆえ

$$\dim \mathrm{Ext}^n_{kG}(X_1, k) = 2, \ n \geq 0.$$

補題 5.3

$$N_G(E_\infty)/C_G(E_\infty) = \left\{ \overline{\begin{bmatrix} t & u & 0 \\ v & w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \;\middle|\; \begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{F}_p) \right\}.$$

この剰余群は $\mathrm{Aut}\, E_\infty$ $(\simeq \mathrm{GL}(2, \mathbf{F}_p))$ に同型であり, 集合 $\{ L_{\mu_2^{(\infty)}-\xi\lambda_2^{(\infty)}} \mid \xi \in \mathbf{F}_{p^2} \setminus \mathbf{F}_p \}$ に可移に作用する.

従って, E_∞ をヴァーテックスにもつ直既約直和因子はただ 1 個であり, 加群 $\widetilde{X}_\infty$ は直既約である. その ext- 群は $\widetilde{X}_0$ のそれと同じである.

$$\dim \mathrm{Ext}^n_{kG}(\widetilde{X}_\infty, k) = \begin{cases} 1 & n \equiv 2p-3, 2p-2, 2(p^2-1)-2, 2(p^2-1)-1 \pmod{2(p^2-1)} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

以上により,

定理 5.4

$$\dim \mathrm{Ext}^n_{kG}(L_{\widetilde{\rho}}, k) = \begin{cases} 4 & n \equiv 2p-3, 2p-2, 2(p^2-1)-2, 2(p^2-1)-1 \pmod{2(p^2-1)} \\ 2 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

であり, 次元公式

定理 5.5 (1)

$$\dim H^{n+r}(G,k) = \dim H^n(G,k) + \begin{cases} 4 & n \equiv 2p-3, 2p-2, 2(p^2-1)-2, 2(p^2-1)-1 \pmod{2(p^2-1)} \\ 2 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

(2)

$$\dim H^{2p(p-1)-1}(G,k) = 4$$

を得る.

系 5.6 $r = 2p(p-1)$, $s = 2(p^2-1)$ とおく. $h_i = \dim H^i(G,k)$ とおけば Poincaré 級数は

$$\frac{\left(\sum_{i=0}^{r-1} h_i X^i\right)(1-X^s) + 2X^r \sum_{i=0}^{s-1} X^i + 2(X^{s-1} + X^s + X^{r+s-2} + X^{r+s-1})}{(1-X^r)(1-X^s)}.$$

補題 2.4 により生成元は $2p(p-1) + 2(p^2-1) - 2$ 次以下の斉次類から見つけられる. これは命題 2.6 を用いる. 今の場合 $\zeta \in H^*(P,k)$ が G- 安定であるのは $N_G(P)$- 不変であり, かつ, どの E_j, $j = 0, 1, \infty$, に制限しても $N_G(E_j)$- 不変であるときに限る. しかし, $N_G(E_1)$ は $N_G(P)$ に含まれるので, E_1 については考えなくてもよい.

$$N_G(P)/PC_G(P) \simeq \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| \ x, z \in \mathbf{F}_p^* \right\} \leq \mathrm{Out}(P)$$

であるから, 補題 3.6 により, このコホモロジー環 $H^*(P,k)$ の生成元への作用はスカラー倍になるので, $N_G(P)$- 不変であるものを求めるのは難しくはない. さらに, E_0, E_∞ への制限もわかっている (補題 3.7) のだから, 上の安定条件を満すものを求めることができる.

定義 5.1

$$A = \alpha_2^{p-1}, \ B = \beta_2^{p-1}, \ N = \nu^{p-1}$$

とおく.

定義 5.2 $H^*(P,k)$ のいくつかの類を次のように定義する:

類	定義
X	$A + B + \chi_{2(p-1)}$
X_j, $j = 2, \ldots, p-2$	$\chi_{2(p-j)}\nu^{j-1}$
Ψ	$\alpha_1\alpha_2^{p-2} + \beta_1\beta_2^{p-2} + \chi_{2(p-2)+1}$
Φ_j, $j = 1, \ldots, p-3$	$\chi_{2(p-j-2)+1}\nu^j$

continued on next page

continued from previous page

類	定義
Ω	$\chi_{2(p-1)+1}\nu^{p-2}$
Σ	AN
T	BN
Γ_j, $j=2,\ldots,p-1$	$\alpha_2^{p-j}\beta_2^{p-j}\nu^{j-1}$
Δ_j, $j=2,\ldots,p-1$	$\alpha_1\alpha_2^{p-1-j}\beta_2^{p-j}\nu^{j-1}$
E_j, $j=1,\ldots,p-2$	$\alpha_2^{p-2-j}\beta_2^{p-1-j}\eta_2\nu^{j-1}$
Z_j, $j=1,\ldots,p-2$	$\alpha_2^{p-2-j}\beta_2^{p-1-j}\eta_3\nu^{j-1}$
H_2	$\alpha_2^{p-2}\eta_2\nu^{p-2}$
Θ_2	$-\beta_2^{p-2}\theta_2\nu^{p-2}$
H_3	$\alpha_2^{p-2}\eta_3\nu^{p-2}$
Θ_3	$-\beta_2^{p-2}\theta_3\nu^{p-2}$
Ξ	$\alpha_2^{p-2}\eta_3\nu^{p-2}A-\alpha_1\alpha_2^{p-2}\nu^{p-1}$
Π	$-\beta_2^{p-2}\theta_3\nu^{p-2}B-\beta_1\beta_2^{p-2}\nu^{p-1}$

これらはすべて素体上で定義されている.

命題 5.7 定義 5.2 で定義された類はすべて G- 安定であり, コホモロジー環 $H^*(\mathrm{GL}(3,\mathbf{F}_p),\mathbf{F}_p)$ は類 $\widetilde{\rho},\widetilde{\sigma}$ とこれらで生成される.

命題 5.8 上の生成元は次の表の関係をみたす. ここで

$$\widetilde{\rho}'=\widetilde{\rho}-X^p$$

であり, ダガー印のついた類はそれが奇数次の類であり, 上半分にある空白は対応する積が他の積と何の関係もないことを表し, 対角線より下の部分は上半分から可換次数多元環の交換法則により導かれる.

	X	X_l	$\Psi^\dagger$	$\Phi_l{}^\dagger$	$\Omega^\dagger$	Σ	T	Γ_l	$\Delta_l{}^\dagger$	E_l	$Z_l{}^\dagger$
X		0		0	H_3X	$X^2\widetilde{\rho}'$	$X^2\widetilde{\rho}'$				
X_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Psi^\dagger$			0	0	$-H_2X$	$\Psi X\widetilde{\rho}'$	$\Psi X\widetilde{\rho}'$	$\Delta_l X$	0	0	$E_l X$
$\Phi_j{}^\dagger$				0	0	0	0	0	0	0	0
$\Omega^\dagger$					0	$H_3\Sigma$	$-\Theta_3 T$	$Z_{l-1}X\widetilde{\rho}'$	$E_{l-1}X\widetilde{\rho}'$	0	0
Σ							$X^2\widetilde{\rho}'^2$	$\Gamma_l X\widetilde{\rho}'$	$\Delta_l X\widetilde{\rho}'$	$E_l X\widetilde{\rho}'$	$Z_l X\widetilde{\rho}'$
T								$\Gamma_l X\widetilde{\rho}'$	$\Delta_l X\widetilde{\rho}'$	$E_l X\widetilde{\rho}'$	$Z_l X\widetilde{\rho}'$
Γ_j								下の表を参照			
$\Delta_j{}^\dagger$									0	0	$\Gamma_j E_l$
E_j										0	0
$Z_j{}^\dagger$											0
H_2											
Θ_2											
$H_3{}^\dagger$											
$\Theta_3{}^\dagger$											
$\Xi^\dagger$											
$\Pi^\dagger$											
$\widetilde{\rho}$											
$\widetilde{\sigma}$											

	Γ_l	$\Delta_l^\dagger$	E_l	$Z_l{}^\dagger$
Γ_j	$\begin{cases}\Gamma_{j+l-1}X^2\\ \Gamma_{j+l-p}\widetilde{\rho}'\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta_{j+l-1}X^2\\ \Delta_{j+l-p}\widetilde{\rho}'\end{cases}$	$\begin{cases}E_{j+l-1}X^2\\ E_{j+l-p}\widetilde{\rho}'\end{cases}$	$\begin{cases}Z_{j+l-1}X^2, & j+l\le p\\ Z_{j+l-p}\widetilde{\rho}', & j+l>p\end{cases}$

	H_2	Θ_2	${H_3}^\dagger$	${\Theta_3}^\dagger$	$\Xi^\dagger$	$\Pi^\dagger$	$\widetilde{\rho}$	$\widetilde{\sigma}$
X		H_2X		H_3X	$H_3X^2 - \Psi X\widetilde{\rho}'$	$H_3X^2 - \Psi X\widetilde{\rho}'$		$-X^2\widetilde{\rho}'$
X_j	0	0	0	0	0	0		0
$\Psi^\dagger$	0	0	H_2X	H_2X	H_2X^2	H_2X^2		$-\Psi X\widetilde{\rho}'$
${\Phi_j}^\dagger$	0	0	0	0	0	0		0
$\Omega^\dagger$	0	0	0	0	$-H_2\Sigma$	$H_2X\widetilde{\rho}'$		$-H_3\Sigma - \Theta_3T + H_3X\widetilde{\rho}'$
Σ		$H_2X\widetilde{\rho}'$		$H_3X\widetilde{\rho}'$		$H_3X^2\widetilde{\rho}' - \Psi X\widetilde{\rho}'^2$		$-\Sigma^2$
T	$H_2X\widetilde{\rho}'$		$H_3X\widetilde{\rho}'$		$H_3X^2\widetilde{\rho}' - \Psi X\widetilde{\rho}'^2$			$-T^2$
Γ_j	$E_{j-1}X\widetilde{\rho}'$	$E_{j-1}X\widetilde{\rho}'$	$Z_{j-1}X\widetilde{\rho}'$	$Z_{j-1}X\widetilde{\rho}'$	$Z_{j-1}X^2\widetilde{\rho}' - \Delta_jX\widetilde{\rho}'$	$Z_{j-1}X^2\widetilde{\rho}' - \Delta_jX\widetilde{\rho}'$		$-\Gamma_jX\widetilde{\rho}'$
${\Delta_j}^\dagger$	0	0	$E_{j-1}X\widetilde{\rho}'$	$E_{j-1}X\widetilde{\rho}'$	$E_{j-1}X^2\widetilde{\rho}'$	$E_{j-1}X^2\widetilde{\rho}'$		$-\Delta_jX\widetilde{\rho}'$
E_j	0	0	0	0	0	0		$-E_jX\widetilde{\rho}'$
${Z_j}^\dagger$	0	0	0	0	$E_jX\widetilde{\rho}'$	$E_jX\widetilde{\rho}'$		$-Z_jX\widetilde{\rho}'$
H_2	0	0	0	0	0	0		$-H_2\Sigma$
Θ_2		0	0	0	0	0		Θ_2T
${H_3}^\dagger$			0	0	$H_2\Sigma$	$H_2X\widetilde{\rho}'$		$-H_3\Sigma$
${\Theta_3}^\dagger$				0	$H_2\widetilde{\rho}'$	Θ_2T		Θ_3T
$\Xi^\dagger$					0	0		$\Xi\Sigma$
$\Pi^\dagger$						0		ΠT
$\widetilde{\rho}$								
$\widetilde{\sigma}$								$\Sigma^2 + T^2 - X^2\widetilde{\rho}'^2$

定理 5.9 命題 5.7 における生成元と命題 5.8 における関係式はコホモロジー環 $H^*(\mathrm{GL}(3, \mathbf{F}_p), \mathbf{F}_p)$ の基本関係式を与える.

6 Heldの単純群

Heldの単純群は2058次の置換群であり, その位数は

$$2^{10}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot 17 = 4{,}030{,}387{,}2000$$

である. Sylow 7- 部分群 P は位数 7^3, 指数 7 の extraspecial 7- 群である.

以下ではHeldの単純群を G と表す. コホモロジー環 $H^*(G,k)$ を考察する. もちろん, k は標数 p の体である.

Weyl 群 $\mathrm{W}(P) = N_G(P)/PC_G(P)$ は $C_3 \times S_3$ に同型である:

$$N_G(P)/PC_G(P) \simeq C_3 \times S_3.$$

ここで, C_3 は位数 3 の巡回群である. P の外部自己同型群は 2 次線型群 $\mathrm{GL}(2,\mathbf{F}_7)$ に同型であり, 上の $\mathrm{W}(P) \simeq C_3 \times S_3$ を $\mathrm{GL}(2,\mathbf{F}_7)$ で実現する. P の生成元 a, b を適当に選ぶことにより, $\mathrm{W}(P)$ は次の行列で生成される:

$$s = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

すなわち, $N_G(P)$ には元 s, t, u で

$$\begin{cases} a^s = a^2 \\ b^s = b^4 \end{cases},\quad \begin{cases} a^t = b \\ b^t = a \end{cases},\quad \begin{cases} a^u = a^4 \\ b^u = b^4 \end{cases}$$

かつ

$$N_G(P) = \langle\, PC_G(P), s, t, u \,\rangle$$

であるものが存在する. $\langle s, t \rangle \simeq S_3$ であり, $\langle u \rangle \simeq C_3$ である. しかし, 次の生成系もとれる:

$$v = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$w = tvt$ とおけば, w は行列

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

であり, 部分群 $\langle v, w \rangle$ は $\mathrm{W}(P)$ の指数 2 の, 従って正規な Sylow 3- 部分群である:

$$\mathrm{W}(P) = \langle v, w \rangle \rtimes \langle t \rangle.$$

$c = a^{-1}b^{-1}ab$ とおく. G におけるランク 2 の基本可換 7- 部分群の共役類は 3 個であり, その代表系として

$$\{\, E_0 = \langle a, c \rangle,\ E_1 = \langle ab, c \rangle,\ E_6 = \langle ab^6, c \rangle \,\}$$

を採用する. 実際, P のランク 2 の基本可換 7- 部分群の G- 共役類は

$$\{\, E_0, E_\infty \,\},\ \{\, E_1, E_2, E_4 \,\},\ \{\, E_3, E_5, E_6 \,\}$$

である. よって, コホモロジー類 $\widetilde{\rho} \in H^{2\cdot 42}(G,\mathbf{F}_7)$ の Carlson 加群 $L_{\widetilde{\rho}}$ は $\{\, E_0,\ E_1,\ E_6 \,\}$-射影的である. おのおのの直和因子を調べるために, 各 $E_0,\ E_1,\ E_6$ の Weyl 群を調べる.

E_0:

$$N_G(E_0)/C_G(E_0) \simeq \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

であり, Weyl 群 $N_G(E_0)/C_G(E_0)$ の集合 $\{ L_{\mu_2 - \xi\lambda_2} \mid \xi \in \mathbf{F}_{7^2} \setminus \mathbf{F}_7 \}$ への作用は 2 つの軌道をもつ; それぞれの長さは 21 であり, 1 の原始 48 乗根 ξ_0 で定められる $L_{\mu_2 - \xi_0\lambda_2}$ を含んでいる. 従って, Carlson 加群 $L_{\widetilde{\rho}}$ はヴァーテックス E_0 の直和因子を 2 個持つ. これらを X_{01}, X_{02} とおく.

正規化群 $N_G(E_0)$ は Sylow 正規化群 $N_G(P)$ に含まれる.

E_1:

$$N_G(E_1)/C_G(E_1) \simeq \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

であり, Weyl 群 $N_G(E_1)/C_G(E_1)$ は集合 $\{ L_{\mu_2 - \xi\lambda_2} \mid \xi \in \mathbf{F}_{7^2} \setminus \mathbf{F}_7 \}$ に可移に作用する. 従って, Carlson 加群 $L_{\widetilde{\rho}}$ はヴァーテックス E_1 の直和因子をちょうど 1 個持つ. これを X_1 とおく.

正規化群 $N_G(E_1)$ は Sylow 正規化群 $N_G(P)$ に含まれる.

E_6:

$$N_G(E_6)/C_G(E_6) \simeq \mathrm{SL}(2, 7)$$

であり, Weyl 群 $N_G(E_6)/C_G(E_6)$ は集合 $\{ L_{\mu_2 - \xi\lambda_2} \mid \xi \in \mathbf{F}_{7^2} \setminus \mathbf{F}_7 \}$ に可移に作用する. 従って, Carlson 加群 $L_{\widetilde{\rho}}$ はヴァーテックス E_6 の直和因子をちょうど 1 個持つ. これを X_6 とおく.

正規化群 $N_G(E_6)$ は Sylow 正規化群 $N_G(P)$ に含まれない.

こうして, Carlson 加群 $L_{\widetilde{\rho}}$ は次のように分解する:

$$L_{\widetilde{\rho}} = X_{01} \oplus X_{02} \oplus X_1 \oplus X_6.$$

$\mathrm{Ext}^*_{kG}(L_{\widetilde{\rho}}, k)$ の次元は次のようである.

表 3 $\dim \mathrm{Ext}^{2n}_{kG}(L_{\widetilde{\rho}}, k)$, $n \equiv 6q + r \pmod{24}$

	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$
$r=0$	4	5	4	4
$r=1$	2	3	2	2
$r=2$	4	4	5	4
$r=3$	4	4	5	4
$r=4$	2	2	2	3
$r=5$	4	4	4	5

表 4 $\dim \mathrm{Ext}_{kG}^{2n+1}(L_{\tilde{\rho}}, k)$, $n \equiv 6q + r \pmod{24}$

	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$
$r=0$	2	2	2	2
$r=1$	2	3	3	2
$r=2$	6	6	6	6
$r=3$	2	2	3	3
$r=4$	2	2	2	2
$r=5$	7	6	6	7

あとは, 命題 2.6 を用いて, $84 + 96 - 2 = 178$ 次までのコホモロジー群を求めれば, 次元公式と生成元が得られる. 詳細は [10] に述べる予定である.

参考文献

[1] T. Asai and H. Sasaki, *The mod* 2 *cohomology algebras of finite groups with dihedral Sylow* 2*-subgroups*, Comm. Algebra **21** (1993), 2771–2790.

[2] J. Diets, J. Martino, and S. Pridy, *Cohomology of groups with metacyclic Sylow p-subgrups*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 2261–2266.

[3] D. J. Green, *On the cohomology of the sporadic simple group* J_4, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **113** (1993), 253–266.

[4] I. J. Leary, *The cohomology of certain finite groups*, Ph.D. thesis, University of Cambridge, 1990.

[5] G. Lewis, *The integral cohomology rings of groups of order* p^3, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968), 501–529.

[6] R. Milgram and M. Tezuka, *The geometry and cohomology of* M_{12}*:II*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **3** (1995), 91–108.

[7] T. Okuyama and H. Sasaki, *Relative projectivity of modules and cohomology theory of finite groups*, Algebras and Representation Theory, to appear.

[8] D. Quillen, *The spectrum of an equivariant cohomology ring I*, Ann. of Math. **94** (1971), 549–572.

[9] ———, *The spectrum of an equivariant cohomology ring II*, Ann. of Math. **94** (1971), 573–602.

[10] H. Sasaki, *The mod* 7 *cohomology algebra of Held simple group*, in preparation.

[11] ———, *Mod p cohomology algebra with extraspecial Sylow p-subgroups*, Hokkaido Math. J., to appear.

[12] ———, *The mod* 2 *cohomology algebras of finite groups with semidihedral Sylow* 2*-subgroups*, Comm. Algebra **22** (1994), 4123–4156.

[13] ———, *The mod p cohomology algebras with metacyclic Sylow p-subgroups*, J. Algebra **192** (1997), 713–733.

[14] ———, *Relative projectivity of Calson modulels*, Cohomology of finite groups and related topics (Kyoto) (H. Sasaki, ed.), RIMS Kokyuroku, no. 1057, Reserch Institure for Mathematical Sciences, Kyoto University, 1998, pp. 22–37.

[15] M. Tezuka and N. Yagita, *The mod p cohomology of* $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$, J. Algebra **81** (1983), 295–303.

[16] ———, *On odd prime components of cohomologies sporadic simple groups and the rings of universal stable elements*, J. Algebra **186** (1996), no. 2, 483–513.

[17] T. Yagita, *On odd degree parts of cohomology of sporadic simple groups whose Sylow p-subgroup is the extra-special p-group of order p^3*, Cohomology of finite groups and related topics (Kyoto) (H. Sasaki, ed.), RIMS Kokyuroku, no. 1057, Reserch Institure for Mathematical Sciences, Kyoto University, 1998, pp. 17–21.

[18] ———, *On odd degree parts of cohomology of sporadic simple groups whose Sylow p-subgroup is the extra-special p-group of order p^3*, J. Algebra **201** (1998), 373–391.