

Derived equivalences in symmetric groups

千葉大学大学院自然科学研究科
刃刀 直子 (Naoko Kunugi)

1 Introduction

有限群のモジュラー表現において, 次の重要な予想がある.

Conjecture 1.1 (Broué)([1, 2] 参照) G を有限群とし, P をその Sylow p -部分群, $N_G(P)$ を P の G における正規化群とする. P がアーベル群であるとき, G の主ブロックと $N_G(P)$ の主ブロックは derived equivalent ではないだろうか.

この問題をとくに対称群のブロックの場合に考える. 現在までにわかっている結果の紹介, それに対して考察したことなどを述べる.

以下 A, B を有限群 G, H のブロックとする. A, B の derived category $D^b(A), D^b(B)$ が triangulated category として同値のとき A と B は derived equivalent であるという. このとき A と B の間ではいろいろな性質が保たれる.

Theorem 1.2 (Rickard[7] 参照) 次は同値である.

- (1) A と B は derived equivalent である.
- (2) 次を満たす上下に有界な (A, B) -bimodule の complex X が存在する.
 - (i) X の各項は A -module, B -module とみて projective である.
 - (ii) (A, A) - $((B, B)$ -)bimodule の complex の homotopy category において, $X \otimes_B X^* \cong A$ ($X^* \otimes_A X \cong B$) が成立する.

(2) の条件を満たす complex を A と B の間の Rickard complex とよぶ. A と B が derived equivalent であれば, Morita type の stable equivalent であることが知られている. 逆に Morita type の stable equivalence が与えられているとき derived equivalent になる十分条件が Okuyama, Rouquier, Rickard らにより与えられている ([6], [8] などを参照).

2 対称群のブロックについて

(K, \mathcal{O}, F) を p -modular system とする. S_n を n 次対称群, C_n を n 次巡回群とする.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ が n の分割であるとき $\lambda \vdash n$ と書く. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \vdash n$ は $\lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \dots = \lambda_{i+p} (> 0)$ となる i が存在するとき p -singular といい, そうでないとき p -regular という. $R \in \{K, F\}$ 上で Specht module S_R^λ が定義される. とくに λ が p -regular のとき $D_F^\lambda := S_F^\lambda / \text{rad} S_F^\lambda$ とおく. $\{S_K^\lambda | \lambda \vdash n\}$ は simple KS_n -module 全体であり, $\{D_F^\lambda | \lambda \vdash n, p\text{-regular}\}$ は simple FS_n -module 全体である. λ からすべての l -hook (hooklength l の hook) を除いたものを λ の l -core といい, そのときに除いた l -hook の数を l -weight という (以上詳しくは [4] を参照). 2 つの simple module が同じブロックに属するための条件が次で与えられている.

Theorem 2.1 $\lambda, \mu \vdash n$ とする.

- (1) S_K^λ と S_K^μ が同じ p -block に属するための必要十分条件は λ と μ が同じ p -core をもつことである.
- (2) λ, μ はともに p -regular とする. D_F^λ と D_F^μ が同じ p -block に属するための必要十分条件は λ と μ が同じ p -core をもつことである.

したがって対称群のブロックは p -core ρ と p -weight w により index 付けられる. $B^{\rho, w}$ とかく ($\rho \vdash n$ のとき, $n + pw$ のブロックとなる). $B^{\rho, w}$ の defect group がアーベル群になるための必要十分条件は $p > w$ となることである. このとき defect group は位数 p^w の elementary abelian となる. Broué 予想より弱い予想として次が知られる.

Conjecture 2.2 $p > w$ のとき $B^{\rho, w}$ と $B^{\tau, w}$ は derived equivalent ではないだろうか.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \vdash n$ と $t \geq r$ に対し, 集合 $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_t\}$

$$\gamma_i = \begin{cases} \lambda_i - i + t & i \leq r \\ -i + t & i > r \end{cases}$$

を λ に対する (t 個の元からなる) β -set という. とくに $t = r$ の場合は λ の 1 列目の hooklength の集合である. 逆に非負整数の有限集合 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_t\} (\gamma_1 > \dots > \gamma_t > 0)$ があれば, $\lambda_i = \gamma_i + i - t$ として partition $\lambda = (\lambda_1, \dots)$ が定まる.

Γ を λ に対する β -set とする. 自然数 l に対し, $m - l \geq 0, m - l \notin \Gamma$ となる $m \in \Gamma$ が存在すること, λ が l -hook を持つことは同値であり, $\Gamma' = (\Gamma \setminus \{m\}) \cup \{m - l\}$ は λ からある l -hook を除いた partition に対する β -set となる. l -hook を取り除

いたり, l -core について知るために, β -set を l -abacus に表す. l -abacus とは

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & l-1 \\ l & l+1 & \cdots & 2l-1 \\ 2l & 2l+1 & \cdots & 3l-1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}$$

のように数字を配列したもので, β -set の元を \circ をつけて表す. λ に対する β -set を l -abacus 上で表示したときに, \circ があるひとつ上が空いていれば, λ には l -hook があり, それをひとつ上にずらすことは l -hook をひとつ除くことに対応する. ここでは p -modular 表現を考えているので, p -abacus で考える. p -core を p -abacus へ表すと, 各列ごとに \circ がすべて上につまった型になる.

Definition 2.3 $B^{\rho,w}, B^{\tau,w}$ をそれぞれ S_n, S_{n-k} のブロックとする (ただし $k > 0$ とする). $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_r)$ とし, Γ^ρ, Γ^τ をそれぞれ $(r + pw)$ 個の元からなる ρ, τ に対する β -set とする. また $\Gamma_j^\rho, \Gamma_j^\tau$ をそれぞれ Γ^ρ, Γ^τ の p -abacus の j 列目にある \circ の数とする. ある $i > 1$ に対して,

$$\begin{aligned} \Gamma_j^\rho &= \Gamma_j^\tau \quad j \neq i, i-1 \\ \Gamma_i^\rho &= \Gamma_{i-1}^\tau \\ \Gamma_{i-1}^\rho &= \Gamma_i^\tau \end{aligned}$$

となるとき $B^{\rho,w}$ と $B^{\tau,w}$ は $[w, k]$ -pair であるという.

Remark 2.4 p -core ρ に対して p -core の sequence $\rho = \rho^0, \rho^1, \dots, \rho^m = \emptyset$ と自然数の sequence k_1, k_2, \dots, k_m が存在して, $B^{\rho^i,w}$ と $B^{\rho^{i+1},w}$ は $[w, k_i]$ -pair となる.

したがって Conjecture 2.2 を考えるにあたり各 $[w, k]$ -pair の関係を調べればよい.

Theorem 2.5 (Scopes [9]) $w \leq k$ のとき $[w, k]$ -pair をなす 2 つのブロックは Morita equivalent である.

$B^{\rho,w}$ と $B^{\tau,w}$ を $[w, k]$ -pair とする. $w \leq k$ の条件は $B^{\rho,w}$ に属する S_K^λ に対し, $\bar{\lambda}$ が存在して, $S_K^\lambda \downarrow_{B^{\tau,w}} = k! S_K^{\bar{\lambda}}$ となるための条件である. これより $D_F^\lambda \downarrow_{B^{\tau,w}} = k! D_F^{\bar{\lambda}}$ となり, さらにこの重複度をおとすようにして対応が付き, Morita equivalent (とくに Puig equivalent) となる.

$w > k$ のときは一般に Morita equivalent とはならない. $w = 2$ のときには Rickard より次が示されている.

Theorem 2.6 (Rickard) $B^{\rho,2}$ と $B^{\tau,2}$ は $[2, 1]$ -pair であるとする, derived equivalent である.

したがって $w = 2$ のとき Conjecture 2.2 は成立している. また Conjecture 1.1 も成立することが Chuang により示されている ([3] 参照).

以下, $w \geq 3$ とし, $k < w < p$ とする. $G = S_n$, $H = S_{n-k}$ とし, $B^{\rho,w}$, $B^{\tau,w}$ はそれぞれ G , H のブロックで $[w, k]$ -pair として考察する. $1 \leq m \leq w$ にたいし, $x_m = (12 \cdots p)(p+1 \cdots 2p) \cdots ((m-1)p+1 \cdots mp) \in H \leq G$ とする. $C_G(x_m) = (C_p \wr S_m) \times S_{n-mp}$, $C_H(x_m) = (C_p \wr S_m) \times S_{n-k-mp}$ であり, $\text{Br}_{\Delta((x_m))}(B^{\rho,w}) = F[C_p \wr S_m] \otimes_F B^{\rho,w-m}$, $\text{Br}_{\Delta((x_m))}(B^{\tau,w}) = F[C_p \wr S_m] \otimes_F B^{\tau,w-m}$ である. ここで, $B^{\rho,w-m}$ と $B^{\tau,w-m}$ は $[w-m, k]$ -pair となっていることに注意する. したがって, すべての $1 \leq m \leq w$ に対して, $\text{Br}_{\Delta((x_m))}(B^{\rho,w})$ と $\text{Br}_{\Delta((x_m))}(B^{\tau,w})$ が Morita equivalent になるのは, $k = w-1$ のときのみである. したがって, $k = w-1$ のときのみ Broué の定理 ([2] Theorem 6.3) が適用できて $B^{\rho,w}$ と $B^{\tau,w}$ は Morita type の stable equivalent である. とくに $B^{\tau,w}$ は $S_{n-k} \times S_k$ のブロックと思うことができ, その block idempotent を e とすれば $(B^{\rho,w}, B^{\tau,w})$ -bimodule $M = B^{\rho,w} \cdot e$ が stable equivalence を与える. 以下ではさらに Definition 2.3 における i を $i > 2$ と仮定しておく. [10], [5]などを参考にして, ブロック間の induction, restriction を計算し, $S_k^\lambda \downarrow^{B^{\tau,w}} = k! S_k^{\bar{\lambda}}$ とならない partition の中で辞書式の順序で最大のものを α とし, $S_k^{\bar{\lambda}} \uparrow^{B^{\rho,w}} = k! S_k^\alpha$ とならない partition の中でやはり最大のものを $\bar{\alpha}$ とする. $P_\alpha, P_{\bar{\alpha}}$ をそれぞれ, $D_F^\alpha, D_F^{\bar{\alpha}}$ の projective cover とすれば,

$$0 \longrightarrow P_\alpha \otimes P_{\bar{\alpha}}^* \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が $B^{\rho,w}$ と $B^{\tau,w}$ の間の Rickard complex を与え, $[w, w-1]$ -pair をなす2つのブロックは derived equivalent であることがわかる.

参考文献

- [1] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, Astérisque 181-182 (1990), 61-92.
- [2] M. Broué, Equivalences of blocks of group algebras, in Proc. ICRA (Ottawa, 1992), Finite Dimensional Algebras and Related Topics (eds. Dlab and Scott) (1993), pp.1-26.
- [3] J. Chuang, The derived categories of some blocks of symmetric groups and a conjecture of Broué, J. Algebra 217 (1999), 114-155.
- [4] G. D. James and A. Kerber, The representation theory of the symmetric group, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 16 Addison-Wesley, Reading, MA 1981.

- [5] S. Martin and R. Russell, Defect 3 blocks of symmetric group algebras, *J. Algebra* 213 (1999), 304–339.
- [6] 奥山哲郎, Some examples of derived equivalent blocks of finite groups, 第6回多元環の表現論シンポジウム報告集(1996 館山)(越谷重夫, 佐藤真久編) pp.108-122.
- [7] J. Rickard, Splendid equivalences: derived categories and permutation modules, *Proc. London Math. Soc.* 72(1996), 331–358.
- [8] R. Rouquier, From stable equivalences to Rickard equivalences for blocks with cyclic defect, *Groups '93 Galway/St. Andrews, Vol. 2*, London Math. Soc. Lecture Note ser., vol. 212, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp.512-523.
- [9] J. Scopes, Cartan matrices and Morita equivalences for blocks of the symmetric groups, *J. Algebra* 142 (1991), 441-455.
- [10] J. Scopes, Symmetric group blocks of defect two, *Quart. J. Math. Oxford* (2) 46(1995), 201–234.