

オイラー方程式のあるクラスのストレッチ解における 特異点の形成

京大 数理研 大木谷 耕司 · Imperial College John D. Gibbon

I. はじめに

3次元非圧縮性流れに、自発的に特異点が形成されるかどうかという問題は流体力学における長年の懸案である。非圧縮オイラー方程式に関しては、数値計算によって有限時間における解の爆発が起きることを報告する論文が多数ある [1,2]。解析的な理論における最近の進歩によっても [3,4,5]、有限時間における爆発の厳密な証明は得られていない。しかし特殊な状況の下では特異な振舞いが起きることが知られている。例えば Stuart [6] は、2重淀み点流を持つクラスの3次元オイラー方程式の解が有限時間で爆発することを見出した。Stuart によって示されたようにこの問題はオイラー表示よりむしろラグランジュ表示の方が取り扱いがしやすい。

有限時間による発散は、境界層の剥離に重要な役割を果たすと考えられており Cowley らの論文 [8] はこの種の問題のラグランジュ記述をレビューしている。また、Constantin は「変形オイラー方程式」を考察している [9]。これは、3次元オイラー方程式による速度勾配の時間発展を記述する特異積分作用素の積分核を初期値で置き換えたものに相当する。この系は多くの初期値に対して有限時間で爆発をする。

3次元ナビエーストークス方程式については、おそらく多くの物理学者がその長時間の解の正則性を信じているものの、有限エネルギーをもつ流れに対して数学的に解に特異点が発生しないことを示す試みは成功していない [10]。最近、Moffatt [11] によって Burgers 渦を拡張することによって特異解を構成することが試みられた。この解は3方向すべてに、非有界かつ(時間的に)特異なストレイン場を持ち、その渦度は1点で爆発する。

3次元非圧縮ナビエーストークス (ならびに オイラー) 方程式を簡単化する方法の1つが最近 Gibbon, Fokas および Doering [12] によって見つけられた。これは次の形の3次元速度場を持つ：

$$U(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ z\gamma(x, y, t) + W(x, y, t) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(1) で与えられる速度場に対して 3次元非圧縮ナビエーストークス (およびオイラー) 方程式は γ, W および 軸方向渦度 $\omega = v_x - u_y$ に関する3つの連立方程式に帰着する。これらの方程式は次章で説明する。これらの方程式の特徴は 各変数が z 依存性を持たないことである。こ

の本質的な2次元性によって良く知られている Burgers 渦のような z 軸方向に伸長される3次元ナビエーストークス方程式の解よりも広いクラスの解について調べることができる。境界層を考えるための Stuart によるオイラー方程式の特異解 [6,7] は式 (1) と次のように関係づけられる。2方向の伸長を考慮するため、彼の速度場は U_3 に線形の z -依存性および u の x -依存性を持つ。(1)の記法では $u = x\bar{u}(y,t)$, $v = \bar{v}(y,t)$ and $U_3 = z\gamma(y,t)$ となる。この流れは2重淀み点を持つ。

ここでは z 方向のみに特別な座標軸を持つ1重淀み点を持つ速度 (1) を考える。明らかに断面における境界条件が重要である。ここでは z 方向には非有界であるが (x,y) 断面には周期境界条件を課すことにする。 z 方向に伸びた管状の空間を考えればよい。ここでは主に $\gamma(x,y,t)$ および $W(x,y,t)$ が特異になる可能性を示唆する数値計算結果を示す。3次元空間ではこれらの変数の急激な増加および特異な振舞いは、断面内における広がりそしてその後の管内の渦の破綻が対応する。

この論文の構成は以下の通り。第2章でオイラー方程式の数値計算結果を示す。第3章ではストレイン率の p 次ノルムの時間発展を時間についての Taylor 展開によって解析する。この論文ではもっぱら1個の簡単な初期条件のみを考える。最後に結果のまとめと議論をする。

II. 支配方程式

数値解を議論する前にこのクラスの解の基本性質を復習しておく。この系は普通のオイラー(ないしナビエーストークス方程式)とは大きく異なるためここで簡単に見ておく事が適当であろう。(詳しくは [12] を参照のこと。)

(1)に対応する3次元渦度ベクトル $\Omega = \nabla \times \mathbf{U}$ は次のように書ける。

$$\Omega(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} z \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial y} \\ -z \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ \omega(x,y,t) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

すべての従属変数は領域 $A = [0, 2\pi]^2$ において x, y について周期的であると仮定する。 \mathbf{U} の非圧縮性条件から

$$\gamma = -\operatorname{div} \mathbf{u} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3)$$

が得られ、これは一般にはゼロではない。また (3) から

$$\int_A \gamma d\mathbf{x} = 0 \quad (4)$$

となる。(4)の平均がゼロであることを考慮すれば3つ従属変数 ω, γ および W に対する支配方程式が得られる [12]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \gamma \omega, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \gamma = -\gamma^2 + 2 \langle \gamma^2 \rangle, \quad (6)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) W = -\gamma W, \quad (7)$$

ここで $\mathbf{u} = (u, v)$.

この論文ではカギ括弧は領域 \mathcal{A} における空間平均を表す。例えば

$$\langle \gamma^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathcal{A}} \gamma(\mathbf{x}, t)^2 d\mathbf{x}, \quad (8)$$

であり、 $\mathbf{x} = (x, y)$ は2次元平面における位置ベクトルを表す。渦度ベクトルの軸方向成分は

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (9)$$

と書ける。(3) と (9) を u と v について解くことができ

$$\begin{cases} u = -\Delta^{-1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right), \\ v = \Delta^{-1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (10)$$

となる。ここで Δ^{-1} は2次元ラプラス演算子 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ の逆作用素である。この系はいわゆる流れ関数は持たない。その代わりに ω と γ の変数の組が速度を決定する。この意味でこの系のダイナミクスは ω および γ のみで閉じていて W は受動的な役割しか持たない。

方程式系 (5-7) を標準的な擬スペクトル法を用いて倍精度の数値計算を行う。アライアス誤差はいわゆる $2/3$ 則で除去したので格子点 N^2 の計算の有効モード数は $(2N/3)^2$ となる。時間発展は4次の Runge-Kutta 法で行い、典型的な時間ステップは $\Delta t = 10^{-3}$ である。数値計算の精度の確認するため、格子点を $N = 256, 512$ から $1024, 2048$ まで変化させ、数値解の性質が変化しないことをチェックした。ここでは典型的に $N = 256$ の計算を用いて議論する。ふつうの2次元、3次元オイラー方程式の数値計算とは違い、比較的少ない格子点の計算でも流れの解像度は十分であることが分かった。それは、フーリエ (エネルギー) スペクトルが、数値計算の最終段階近くまで高い波数で指数的に減少することから分かる (以下を参照)。

III. 非粘性問題

(5-7) の滑らかな解がずっと続くか否かと言う問題を考えるにあたり、次の簡単な観察から始める。仮に γ の方程式 (6) の右辺第 2 項を無視すれば、次の方程式が得られる：

$$\frac{D\gamma}{Dt} = -\gamma^2. \quad (11)$$

これはラグランジュ座標において簡単に解けて、ある流体粒子については γ は有限時間で $-\infty$ になることが分かる。しかし (6) の右辺第 2 項はプラスで、大きくなり得るため特異点の形成が阻止されるかもしれない。この競合のため (5-7) の解が有限時間で破綻するか否かは明らかではない。そこでこの問題を数値解析的に取り扱う。

A. 初期条件

初期条件を選ぶ適当な指針がないため、簡単な三角関数による初期条件を 3 つの従属変数すべてに考えることにする：

$$\omega(\mathbf{x}, 0) = \gamma(\mathbf{x}, 0) = W(\mathbf{x}, 0) = \sin x \sin y. \quad (12)$$

2次元オイラー方程式とは異なり、非定常な解がこの単一モードの初期条件から発展する。

まずいくつかのノルムを用いて流れ場の全体的な性質を調べる。エネルギーの類のノルムを次のように定義する：

$$E_\omega(t) = \frac{1}{2} \left\langle \left((-\Delta)^{-1/2} \omega(\mathbf{x}, t) \right)^2 \right\rangle, \quad (13)$$

$$E_\gamma(t) = \frac{1}{2} \left\langle \left((-\Delta)^{-1/2} \gamma(\mathbf{x}, t) \right)^2 \right\rangle, \quad (14)$$

$$E_W(t) = \frac{1}{2} \left\langle \left((-\Delta)^{-1/2} W(\mathbf{x}, t) \right)^2 \right\rangle. \quad (15)$$

また、エンストロフィーのようなノルムとして

$$Q_\omega(t) = \frac{1}{2} \left\langle \omega(\mathbf{x}, t)^2 \right\rangle, \quad (16)$$

$$Q_\gamma(t) = \frac{1}{2} \left\langle \gamma(\mathbf{x}, t)^2 \right\rangle, \quad (17)$$

$$Q_W(t) = \frac{1}{2} \left\langle W(\mathbf{x}, t)^2 \right\rangle \quad (18)$$

を考える。(W は速度の次元をもつので Q_W という記法はあまり良くない。) これらのいずれのノルムも保存しない。

Fig.1(a) に $E_\omega(t)$, $E_\gamma(t)$ および $E_W(t)$ の時間発展を示す。これから $E_\omega(t)$ は大きくなり(実際には少し減少する)ことが分かる。しかし $E_\gamma(t)$ と $E_W(t)$ は急速に増加しおよそ

$t = 1.4$ 、より詳しくは $t = 1.419$ で無限大となるように観察される。同様の傾向は $Q_\omega(t)$, $Q_\gamma(t)$ および $Q_W(t)$ の発展を示した Fig.1(b) にも見られる。やはり $Q_\gamma(t)$ と $Q_W(t)$ は時刻 $t = 1.4$ あたりで発散するようになるが見えるが $Q_\omega(t)$ は僅かに増加するに過ぎない。

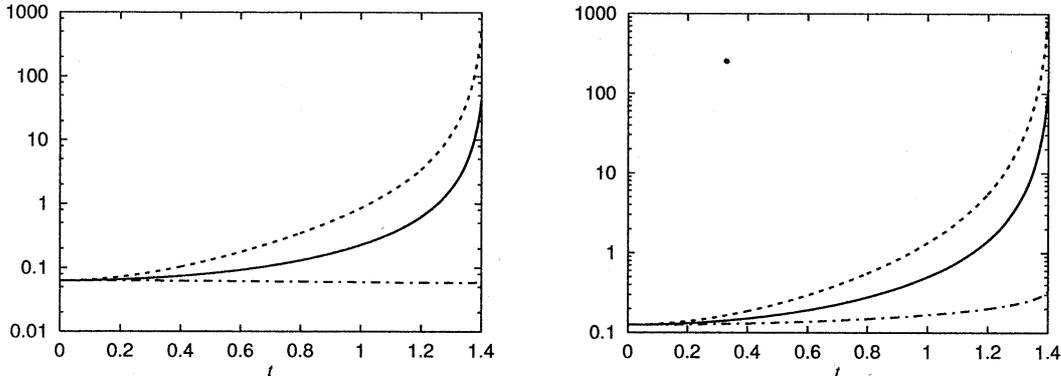


Fig.1(a): ノルムの時間発展 $E_\omega(t)$ (一点鎖線), $E_\gamma(t)$ (実線) および $E_W(t)$ (破線). Fig.1(b): $Q_\omega(t)$ (一点鎖線), $Q_\gamma(t)$ (実線) and $Q_W(t)$ (破線) の時間発展.

精度を変えて計算したところ $Q_\gamma(t)$ が発散する時刻は $N^2 = 128^2$ と 256^2 では $t = 1.419$ 、 512^2 で $t = 1.414$ 、 1024^2 で $t = 1.396$ 、 2048^2 で $t = 1.349$ となる。これらの時間差は 3% と小さい。数値解が存在する時間帯では $Q_\gamma(t)$ のグラフは見分けがつかないほど一致する。

周期条件下では (9) から

$$\langle \omega \rangle = 0 \quad (19)$$

となる。この条件と $\langle \gamma \rangle = 0$ が数値的に満足されていることを確かめた。一方 $\langle W \rangle$ は保存せず

$$\frac{d}{dt} \langle W \rangle = -2 \langle \gamma W \rangle. \quad (20)$$

に従って発展する。実際 $\langle W \rangle$ も $t = 1.4$ で $-\infty$ になるように見える (図省略)。これから $|W|$ の最大値も有限時間で発散することが分かる。したがって、速度勾配のみならず速度自身も有限時間で特異となることに注意が必要である。

特異点が発生する可能性がある数値計算を行う際には数値解の精度が十分なものであることを注意深く確認する必要がある。このため 3 つの場についてフーリエスペクトル

$$Q_\omega(k) = \frac{1}{2} \sum_{k \leq |k| < k+1} |\tilde{\omega}(\mathbf{k})|^2, \quad (21)$$

$$Q_\gamma(k) = \frac{1}{2} \sum_{k \leq |k| < k+1} |\tilde{\gamma}(\mathbf{k})|^2, \quad (22)$$

および

$$Q_W(k) = \frac{1}{2} \sum_{k \leq |k| < k+1} |\tilde{W}(\mathbf{k})|^2. \quad (23)$$

に注目する。

Fig.2(a) に $t = .8, 1.0, 1.2$ および 1.4 において $Q_\omega(k)$ の log-linear プロットを示す。高波数領域における直線は指数的な減少を表すので、数値計算の終りの付近の時刻まで流れ場はよい解像度を持つことが分かる。Fig.2(b) and (c) から γ と W もよく分解されていることがわかる。

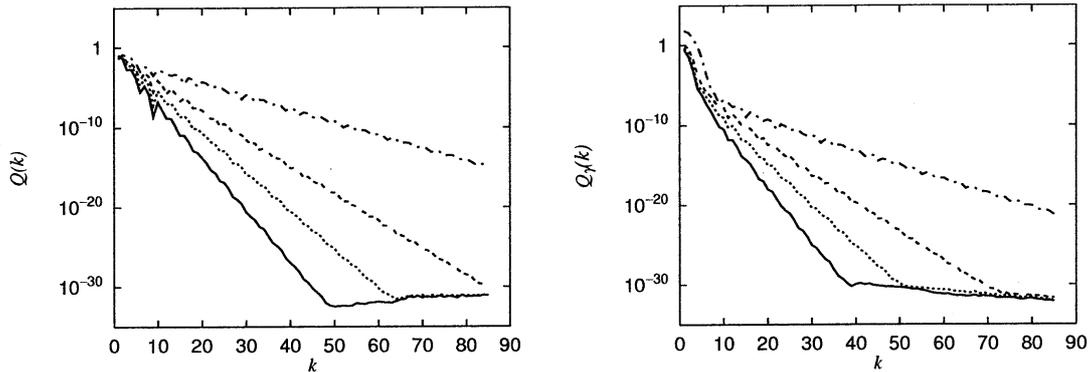
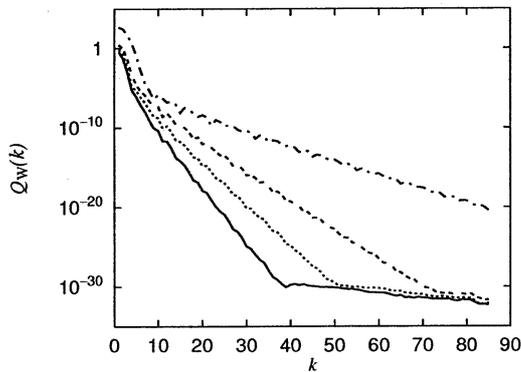


Fig.2(a): フーリエスペクトルの時間発展 $Q_\omega(k)$: $t = 0.8$ (実線), 1.0 (点線), 1.2 (破線), 1.4 (一点鎖線). (b): $Q_\gamma(k)$.



(c): $Q_W(k)$.

次に2次元周期領域 A における空間構造を調べる。Figs.3 に $t = 0, 0.6, 1.2$ および 1.4 における ω の鳥瞰図を示す。初期条件は4つのセルから成る。 ω が正の小領域では、この変数は緩やかに増加し、計算の終り ($t = 1.4$) までに最大値は約6倍に成る。初期条件が $\omega = \gamma$ であるので、これは正のストレイン γ による渦の引き延ばし効果を表す。その他の小領域では γ は負であるので $|\omega|$ は減少する。後半の時間帯では、ほぼ平坦な広い領域が見られる。いずれの領域でも、 ω は著しい成長は示さない。

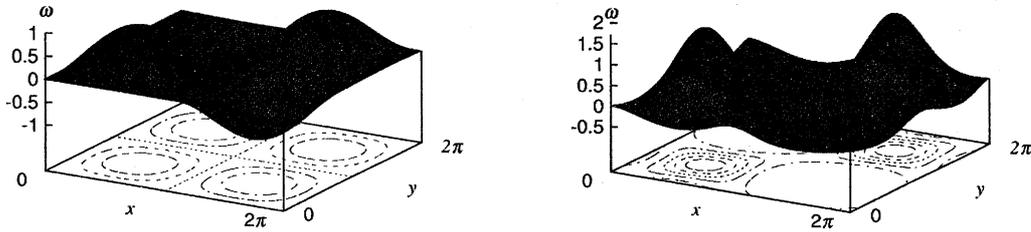
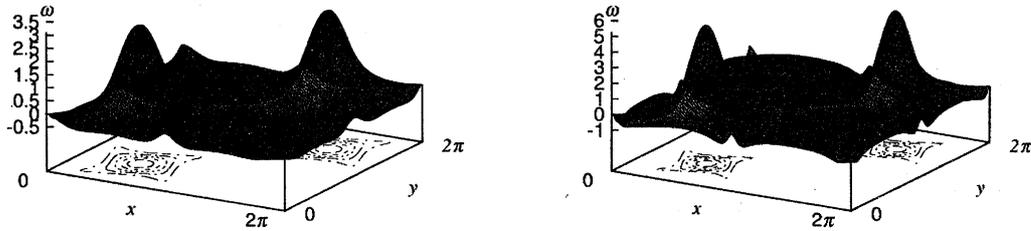


Fig.3(a): $t=0$ における ω の鳥瞰図および等高線. (b): $t = 0.6$.



(c): $t = 1.2$.

(d): $t = 1.4$.

より興味深いのは γ の構造である。Figs.4に ω と同じ方法で γ の構造を表示した。この初期条件については $\langle \gamma^2 \rangle = 1/4$ であり、したがって(6)の右辺から分かるように $\frac{D\gamma}{Dt}$ が負になる領域の部分がある。上で述べた、簡単な考察から負の γ は減衰をはじめ絶対値が大きくなること示唆される。数値計算結果から γ の減衰過程が顕著であることがわかる。 γ がほとんど円形のくぼみを持ち、最終的にその深さが初期値の70倍も大きくなることは注目に値する。ノルムの時間発展からも $t = 1.4$ 付近で γ の最小値は $-\infty$ となり、滑らかな解の爆発が起きることが示唆される。 W については γ と同様にその負の部分が強調され、その度合は γ よりも激しい(図省略)。

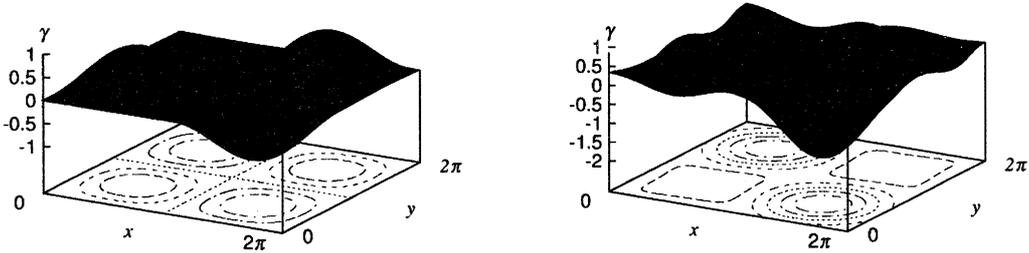
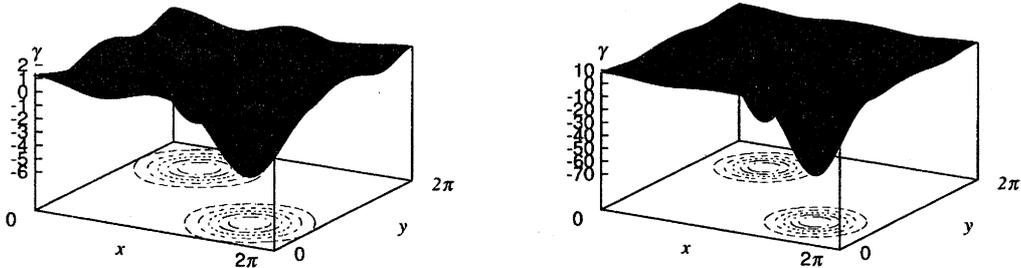


Fig.4(a): $t=0$ における γ の鳥瞰図および等高線 (b): $t = 0.6$.
線.



(c): $t = 1.2$.

(d): $t = 1.4$.

さて以下の式によって与えられる3次元エンストロフィーの3次元的構造を考える:

$$|\Omega(x, y, z, t)|^2 = \left(z \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(z \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \omega(\mathbf{x})^2. \quad (24)$$

Figs.5 に 領域 $0 \leq x, y, z \leq 2\pi$ における $|\Omega|^2$ の等値面を時刻 $t = 0, 0.6, 1.2$ および 1.4 において示す。等値面の閾値は各時刻で $(\max_x |\Omega|^2)/5$ となるように選んだ。また $z = 60\pi/64$ における断面を挿入しそこで $|\Omega(x, y, z)|^2$ の分布を表示してある。言うまでもなく Ω における線形の z -依存性のため、 $|\Omega|^2$ は z が大きいほど大きい。

ω , γ および W とは異なり, その2次の非線型性を反映して $|\Omega|^2$ には初期から多くのセルが見られる。後の時刻では γ が負になる領域に2つの際立ったセルが現れる。上で見たように、そこでは軸方向の成分 ω は小さい。 (x, y) 平面に平行な経度方向の成分が極端に伸長され3次元エンストロフィーに大きく寄与するのである。このエンストロフィーはセル内で一様に分布しているのではなく、環状の領域に集中していることに注意が必要である。中心付近ではエンストロフィーは小さい。このことは等値面の形を見ても見て取れる。つまり、高い渦度領域の構造のもつ特徴は、渦の空洞化という2次元化を伴う半無限の管である。

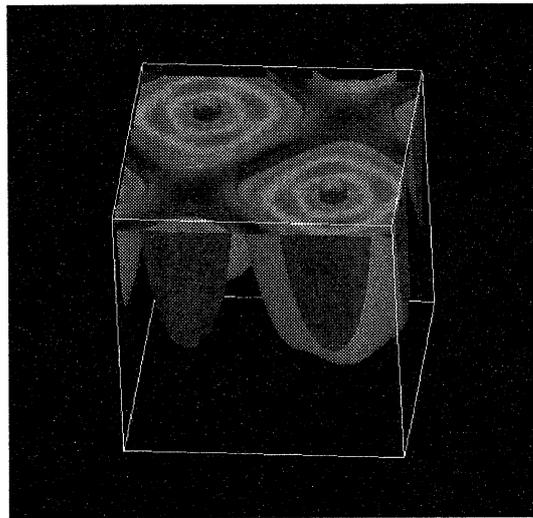
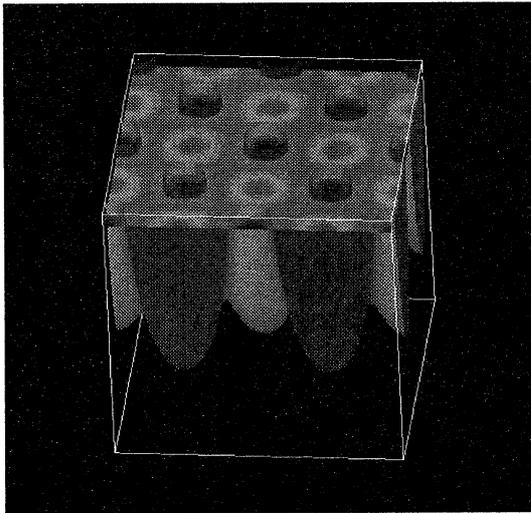
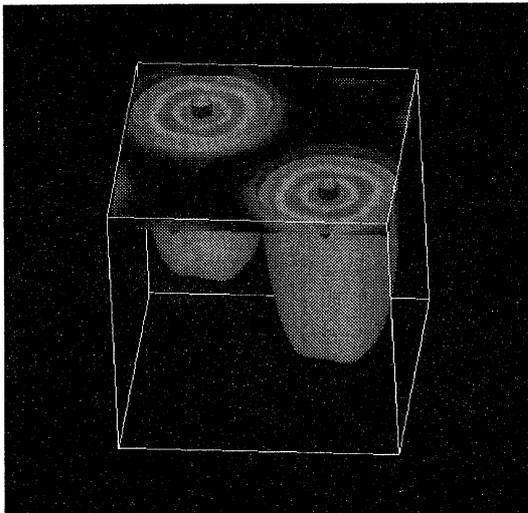
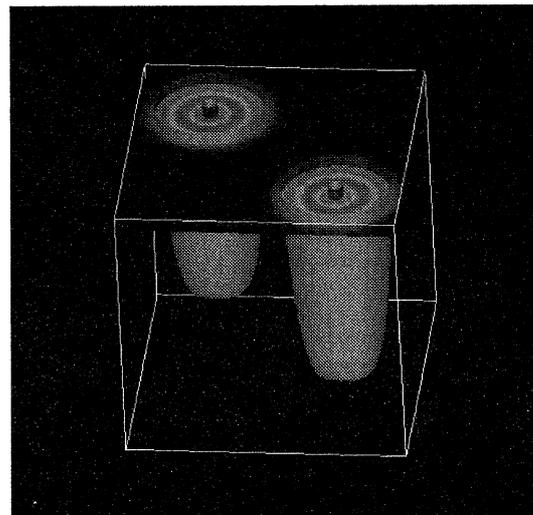


Fig.5(a): $t = 0$ での3次元のエンストロフィー。断面における分布も表示されている (より暗い影の部分ほど高いエンストロフィーを表す。)

(b): $t = 0.6$.



(c): $t = 1.2$.



(d): $t = 1.4$.

IV. 別の解法

A. 時間に関する Taylor 展開法

上で我々は擬スペクトル法による数値計算を用いてこのオイラー方程式の解が有限時間に爆発するかどうかを見た。ここではノルムの発展を時間についての Taylor 展開というまったく異なる方法によって特異点の形成を研究する。このよく知られた方法は、過去にオイラー方

程式に適用されている [2,13,14]。しかし、すぐ後に見るように方程式系 (5-7) に対するこの方法の適用は通常の問題に対する応用には見られない特別の性質がある。このため、この方法で特異点の形成を非常に高精度で調べることができる。

γ が最も重要な変数であるので、そのモーメント

$$I_p(t) = \langle \gamma(\mathbf{x}, t)^p \rangle, \text{ for } p = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

に注目する。 $I_p(t)$ が次の無限個の連立常備分方程式

$$\frac{dI_p}{dt} = -(p+1)I_{p+1} + 2pI_2I_{p-1}, \text{ for } p = 0, 1, 2, \dots, \quad (28)$$

を満たすことは簡単に示せる。ただし $I_{-1} = 0$ とする。この方程式系は、有限個では閉じてはいないが、2重級数 $a_{p,n}$ を

$$I_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p,n} t^n, \quad (29)$$

によって導入することによって、次のような漸化式

$$a_{p,n+1} = \frac{1}{n+1} \left(-(p+1)a_{p+1,n} + 2p \sum_{l=0}^n a_{2,l} a_{p-1,n-l} \right), \text{ for } p \geq 0, n \geq 0 \quad (30)$$

を導ける。級数 $a_{p,n}$ は以下の条件を満足する：

$$a_{0,0} = 1, \quad (31)$$

$$a_{0,n} = 0, \text{ for } n = 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

そして

$$a_{1,n} = 0, \text{ for } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

最初の2つは自明である。3つ目は拘束 $\langle \gamma \rangle = 0$ から得られる。(30)の右辺は添字 m が p より小さい係数 $a_{m,n}$ だけからなるので、 $a_{p,n}$ について逐次に解くことが可能である。実際には大きな N をとり $0 \leq p \leq N+2$ に対して $a_{p,0}$ を生成することからはじめる。

特に、この初期条件については

$$a_{p,0} = \begin{cases} \frac{p!}{2^p(p/2)!} & \text{for even } p \\ 0 & \text{for odd } p \end{cases} \quad (34)$$

となることが簡単にわかる。つぎに (30) において $n = 1, 2, 3, \dots$ とおくことによって次々に $0 \leq n \leq N$ に対し $a_{2,n}$ が、 $0 \leq n \leq N-1$ に対し $a_{3,n}$ が、そして一般に $0 \leq n \leq N+2-p$ に対して $a_{p,n}$ が得られる。この手続きは $N = 500$ について Maple V の数式処理を用いて成された。こうして厳密な Taylor 係数が、例えば $I_2(t) = \langle \gamma^2 \rangle$ の場合 $O(t^{500})$ まで求められた。

このような高い次数の係数が計算できたのは γ に対する式 (6) が圧力項があらわには入らないことによる。通常のエuler方程式においては圧力がヘッセ行列の形で渦度やストレインと結合するため、このような2重級数に帰着させることが（少なくとも現在までには）できていないことに注意する。

こうして厳密に得られた Taylor 係数を用いてモーメント $I_p(t)$ の解析的な構造を検討する。偶数次（奇数次）のモーメントは時間の偶（奇）関数である。そこで $\xi = t^2$ を定義すると偶数の p について

$$I_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p,2n} \xi^n \quad (35)$$

また、奇数の p について

$$I_p = t \sum_{n=0}^{\infty} a_{p,2n+1} \xi^n. \quad (36)$$

となる。

B. Domb-Sykes プロット

ここでは、この Taylor 展開による解析が3章に述べた擬スペクトル法による数値計算と両立するかどうかを吟味する。

まず、よく知られた Domb-Sykes プロットを、係数を偶奇おのおのの p について、次の形

$$\frac{a_{p,2n}}{a_{p,2(n-1)}} \approx \frac{1}{\rho_p} \left(1 + \frac{\alpha_p - 1}{n} \right) \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (37)$$

および

$$\frac{a_{p,2n+1}}{a_{p,2n-1}} \approx \frac{1}{\rho_p} \left(1 + \frac{\alpha_p - 1}{n} \right) \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (38)$$

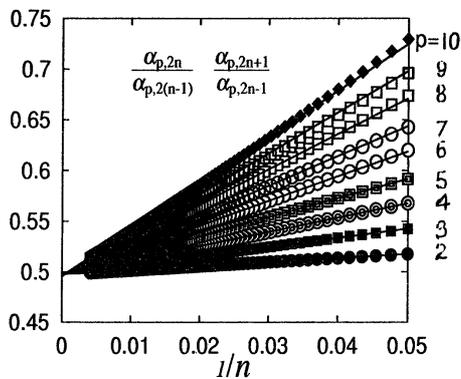
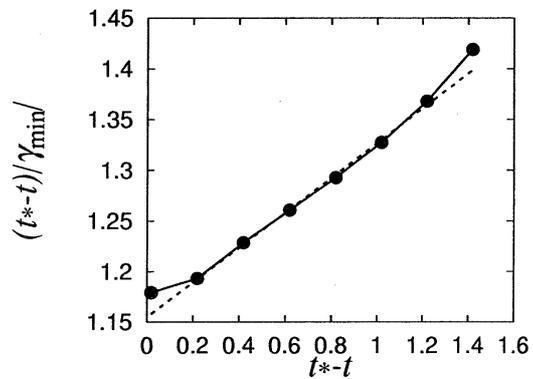
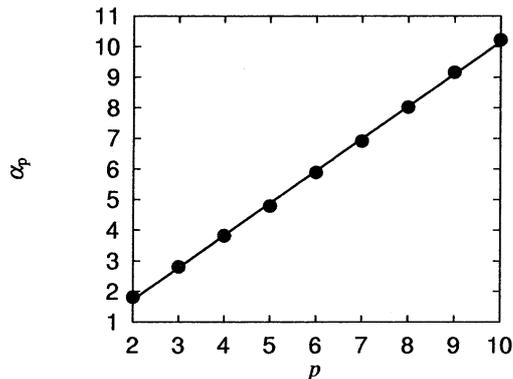
にフィットさせる。ここで ρ_p は収束半径、 α_p は特異点の強度を表す： $I_p \propto (\rho_p - \xi)^{-\alpha_p}$ as $\xi \rightarrow \rho_p$.

Fig.6a には $p = 2, 4, \dots, 10$, $n = 1, 2, \dots, (N + 2 - p)/2$ について、比 $\frac{a_{p,2n}}{a_{p,2(n-1)}}$ を $\frac{1}{n}$ の関数として、また $p = 3, 5, \dots, 9$, $n = 1, 2, \dots, (N + 1 - p)/2$ について比 $\frac{a_{p,2n+1}}{a_{p,2n-1}}$ を $\frac{1}{n}$ の関数としてを示した。きれいな直線が大きな n に対して観察される。 $n \geq 20$ に対して最小2乗法によるフィットを行い、 α_p と ρ_p を $p = 2, 3, \dots, 10$ について数値的に決定した (Table 1 参照)。

Table I: Domb-Sykes プロットによりフィットされた α_p と ρ_p .

p	α_p	ρ_p
2	0.49748702431861	1.8118243673555
3	0.49748366006028	2.8125811671362
4	0.49736430984726	3.8218680292620
5	0.49737625333089	4.7890517385808
6	0.49703631941514	5.8911039911952
7	0.49673791157762	6.9143197712255
8	0.49652364387792	8.0237105414669
9	0.49566993397728	9.1619462335132
10	0.49581409456195	10.2271058579109

この結果はフィットに用いた区間を多少変えても大きくは変化しない。なお、フィットの手続きは厳密な有理数を倍精度の浮動小数点の実数に変換してから行った。異なる次数に対する収束半径が、整合的にほとんど同じ値をとっていることは注目に値する。

Fig.6(a): $p = 2, 3, \dots, 10$ に対する Domb-Sykes プロット およびその直線によるフィット。Fig.6(b): $t_* - t$ の関数としての $(t_* - t)/\gamma_{\min}$ の時間変化、および直線によるフィット (破線)。Fig.6(c): 指数 α_p とその直線によるフィット。

例えば $\frac{1}{\rho_2} \approx .497$ and $\alpha_2 \approx 1.8$ より $t_* = \sqrt{\rho_2} \approx 1.42$. における次ぎの形の爆発

$$\langle \gamma^2 \rangle \propto \frac{1}{(t_* - t)^{\alpha_2}} \quad (39)$$

が示唆される。この爆発時刻は スペクトル法の数値計算が破綻する時刻 $t = 1.419$ に非常に近い。2種類全く異なる解析方法、擬スペクトル法による計算、および Taylor 展開によって爆発時刻に関して実質的に同じ答が得られたことは注目すべきことである。このことは、数値解に見られた爆発が数値計算上の見かけのものではなく真の爆発であることを示唆している。この観察をきっかけにこの方程式を数学解析的に研究することが試みられた。その結果、BKM 基準 [3] と類似の以下のような爆発の判定基準が得られた: もし滑らかな解が有限時間 t_* で破綻するならば

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \int_0^t \max_x |\gamma(\mathbf{x}, s)| ds = \infty. \quad (40)$$

となる。このことから例によって、爆発が代数的に起きるとすればその指数は

$$\max_x |\gamma(\mathbf{x}, t)| \propto \frac{1}{(t_* - t)^\beta}, \quad (\beta \geq 1) \quad (41)$$

と制約される。Fig.6b に $t_* - t$ の関数としての $(t_* - t) \max_x |\gamma(\mathbf{x}, t)|$ を示す、ただし $t_* = 1.419$ とした。直線は爆発が丁度制限ぎりぎりの指数 $\beta = 1$ で起きることを示唆している。そこで次のような形

$$\max_x |\gamma(\mathbf{x}, t)| = \frac{a}{t_* - t} + b \quad (42)$$

に $t = 0.2, 0.4, \dots, 1.2$. において最小自乗法でフィットすることを試みた。こうして $a = 1.155$, $b = 0.172$ が決定された。

この数値計算では、局所的な場 $\max_x |\gamma(\mathbf{x}, t)|$ のみならず大局的な $\langle \gamma(\mathbf{x}, t)^2 \rangle$ も有限時間で爆発する。式(4)の右辺がこの観察と整合性を保つためには $\alpha_2 \leq 2$ が必要になる。上で見たように、これは実際に満足されている。 γ の特異構造を特徴付けるため、高次モーメントの指数 α_p を考える。

Fig.6c に $p = 2, 3, \dots, 10$ に対して、指数 α_p を p の関数として示す。 p について、きれいな直線が見られる。最小自乗法によって

$$\alpha_p = c_1 p + c_2, \quad (43)$$

ここで $c_1 = 1.054$ and $c_2 = -0.385$ という値が得られた。

$$\max_x |\gamma(\mathbf{x}, t)| = \lim_{p \rightarrow \infty} (I_p)^{\frac{1}{p}} \propto \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{(\rho_p - \xi)^{c_1 + c_2/p}}, \quad (44)$$

および ρ_p が p に依らない事に注意すると特異点に近傍で、次の形の漸近形

$$\max_x |\gamma(\mathbf{x}, t)| \propto \frac{1}{(t_* - t)^{c_1}}. \quad (45)$$

が得られる。 $c_1 > 1$ なので、これは (41) と整合性を持つ。さらに c_1 が 1 に非常に近いことも注意すべきである。以上の係数 c_1 および c_2 は $a_{p,n}$ を $n \geq 20$ でフィットすることでエ得られた。 $n \geq 50$ での $a_{p,n}$ から α_p をフィットすれば $c_1 = 1.027$, $c_2 = -0.281$ となり c_1 はさらに 1 に近くなる。このことは c_1 は厳密に 1 に等しい可能性を示唆しており、これは (42) と両立する。 I_p の最大次数が限られているので $c_1 = 1$ と結論することは出来ないが、時間に関する Taylor 展開法による結果は、擬スペクトル法による計算と両立するのみならず、特異点について知られている数学的な条件とも整合する。

V. おわりに

ここでは文献 [12] で同定された オイラーおよびナビエストークス方程式の解のクラスについて数値解析的な研究を行った。数値計算によって滑らかな初期条件から出発するオイラー方程式の解が有限時間で爆発することを示唆する結果が得られた。ここでは、1つの初期条件についてだけ述べたが、実際にはより多くの初期条件に関しても爆発は認められる。また、この解の爆発は小さな粘性係数をもつナビエストークス方程式の場合でもみられることが数値計算で確認されている。

良く知られている vortex breakdown の現象 [15-17] とならんで、このクラスの流れは渦を伴う流れでの構造変化の 1 つの雛型として捉えることが出来る。また回転円盤上の境界層を研究した論文として [18,19] も、vortex breakdown に関係がある。

このクラスの解についてのいくつかの未解決問題をあげる。まず、ここで観察された特異解が安定なものかどうか不明である；つまり、この解に小さな攪乱を与えた場合、特異点が依然として残るかどうか知られていない。また、この問題には複数の長さスケールが特異点の形成に関与している。このような長さスケールをもつ、(準)相似解を探すことは興味深いであろう。

最初に述べたように、このクラスの解は 1 方向にだけ速度に非有界性がある。この研究を中間的な踏台として、物理的により興味がある、より局在した解の特異点の形成に関する理解へ進むことは今後の大きな課題である。

謝辞

この研究は筆者が ケンブリッジ大学 アイザックニュートン数学研究所に滞在し、研究プログラム *Turbulence* (1999年 1月 4日 -7月 2日) に参加しているときに行われた。大部分の数値計算はその研究所にあるワークステーションで行われた。優れた研究環境を提供してくれたニュートン研究所に感謝する。また、有益な議論をしてくれた J. Brasseur, P. Constantin, Y. Couder, C. Doering, B. Galanti, F. Hussain, R.M. Kerr, T.S. Lundgren, S. Malham, H.K. Moffatt, J.C. Vassilicos の人々に感謝する。

REFERENCES

- [1] R. M. Kerr, "Evidence for a singularity of the three dimensional incompressible Euler equations," *Phys. Fluids A* **6** 1725(1993).
- [2] R. B. Pelz and Y. Gulak, "Evidence for a real-time singularity in hydrodynamics from time series analysis," *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4998(1997).
- [3] J. T. Beale, T. Kato and A. Majda, "Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations," *Commun. Math. Phys.* **94**, 61 (1984).
- [4] P. Constantin, Ch. Fefferman and A. Majda, Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3D Euler equations, *Comm. Partial. Diff. Equns*, **21**, (1996), 559.
- [5] P. Constantin, "Geometric statistics in turbulence," *SIAM Rev.* **36** (1994)73.
- [6] J. T. Stuart, Nonlinear Euler partial differential equations: singularities in their solution. In *Proc. Symp. Honor of C. C. Lin* (ed. D. J. Benney, Chi Yuan and F. H. Shu), pp 81-95. Singapore: World Scientific.
- [7] J. T. Stuart, The Lagrangian picture of fluid motion and its implication for flow structures. *IMA J. Appl. Math.*, **46**, 147(1991).
- [8] S. J. Cowley, L. L. Van Dommelen, and S. T. Lam, On the use of Lagrangian variables in descriptions of unsteady boundary-layer separation, *Phil. Trans. Royal Soc. Lond.* **333**, 343(1990).
- [9] P. Constantin, Note on loss of regularity for solutions of the 3D incompressible Euler and related equations, *Comm. Math. Phys.*, **104**, 311(1986).
- [10] J. Leray, "Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace," *Acta Math.* **63** 193(1934).
- [11] H. K. Moffatt, "The interaction of skewed vortex pairs: a model for blow-up of the Navier-Stokes equations," preprint(1999).
- [12] J. D. Gibbon, A. Fokas and C. R. Doering, "Dynamically stretched vortices as solutions of the Navier- Stokes equations," *Physica D* **132**,497(1999).
- [13] R.H. Morf, S. A. Orszag and U. Frisch, "Spontaneous singularity in three-dimensional inviscid incompressible flow", *Phys. Rev. Lett.* **44**, 572(1980).
- [14] M. E. Brachet, D. I. Meiron, S. A. Orszag, B. G. Nickel, R. H. Morf and U. Frisch,

- “Small-scale structure of the Taylor-Green vortex”, *J. Fluid Mech.* **130**, 411(1983).
- [15] S. Leibovich, “The structure of vortex breakdown,” *Ann. Rev. Fluid Mech.* **10**, 221(1978).
- [16] J. M. Lopez, “Axisymmetric vortex breakdown Part.1 Confined swirling flow,” *J. Fluid Mech.* **221**, 533(1990).
- [17] G. L. Brown and J. M. Lopez, “Axisymmetric vortex breakdown Part.2 Physical Mechanisms,” *J. Fluid Mech.* **221**, 553(1990).
- [18] K. Stewartson, C. J. Simpson, and R. J. Bodonyi, The unsteady boundary layer on a rotating disk in a counter rotating fluid. Part 2. *J. Fluid Mech.*, **121**, 507(1982).
- [19] P. Hall, P. Balakumar and D. Papageorgiu, ‘On a class of unsteady three-dimensional Navier-Stokes solutions relevant to rotating disc flows: threshold amplitudes and finite-time singularities,’ *J. Fluid Mech.* **238**, 297(1992).