

# 一様等方乱流中における Lagrange 粒子対の 相対拡散の Riemann 幾何学的解析

岡山理科大 荒木 圭典 ( ARAKI Keisuke )  
東京農工大 鈴木 勝博 (SUZUKI Katsuhiko)

一様等方乱流中における Lagrange 粒子対の相対拡散の Riemann 幾何学的解析を行った。相対拡散のダイナミクスを、Jacobi 場  $\xi(\mathbf{x}, t)$  の  $L^2$ -ノルムの時間発展を評価することで求めた。速度場のエネルギー・スペクトルが  $E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$  で与えられると仮定したとき、Jacobi 場の  $L^2$ -ノルムのダイナミクスは次の不等式で評価される:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int |\hat{\xi}(\mathbf{k}, t)|^2 d\mathbf{k} \geq 1.057 C_K \epsilon^{2/3} \int k^{4/3} |\hat{\xi}(\mathbf{k}, t)|^2 d\mathbf{k}.$$

この計算において  $-5/3$  乗スペクトルに従う一様等方乱流場の平均断面曲率は負であることが判った。このことは、乱流が位相空間内で双曲的(カオス的)な軌道不安定性を持つことを強く示唆している。

## 1 Arnol'd の理論の組み立て

非圧縮流体の力学は数学的にどのように基礎付けることができるのでしょうか。本節の目標は、『非圧縮完全流体の力学において変分原理を背後で支えている数学的な枠組みはどのようなものか』という問いに答えることです。

現在、保存系の古典力学 (Lagrange 形式、Hamilton 形式) の依って立つ数学的な枠組みは、『解析力学』として微分位相幾何学的な観点から統一的に論じられています [1]。非圧縮完全流体の力学も、微分位相幾何学的な観点からの同様な記述を考えることができます。Arnol'd は非圧縮完全流体の運動を、右不変計量を備えた無限次元 Lie 群としての体積保存微分同相写像のなす群上の測地線として定式化しました [2]。(文献 [3] も参照)

非圧縮流体の運動についての基礎的な考察であるにもかかわらず、Arnol'd の理論の応用は、主に平衡解の計算や定常解の安定性問題 [4] に限られており、一般の非定常なダイナミクスへの考察はほとんど進んでいません。乱流理論への応用が進まなかった理由として、彼の理論を流体力学の言葉に十分にパラフレーズしたものがこれまでに無かったことがあるように思われます。本研究では、彼の理論を流体力学の言葉を用いてパラフレーズし、一様等方乱流のアンサンブル平均へ応用することを試みます。

本節では、彼の理論の枠組みを流体力学的な言葉を用いて説明します。まず流体粒子の軌道の集合 (『軌道束』と呼びます) を考えます。この軌道束がいわゆる『微分同相写像』であり、Kaneda が LRA 方程式系を導く際に導入した位置関数 [5] の概念を拡張したものになっています。次いで Arnol'd の枠組みにおける『摂動』の考え方を説明します。これを元にして、Arnol'd の理論における摂動場と、従来の流体力学の安定性理論における速度場の摂動場との関係を導きます。そして『ベクトル場の移流』が自明ではないことを説明し、変分原理を導くための移流の定義の考察に進みます。

## 1.1 Lagrange 粒子軌道束

周期境界条件を満たす非圧縮流体の運動を考えましょう。この流体は、時間  $t$  に依存するある『速度場』  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}^3) \times [0, 1]$  によって流されているものとします。ただし、この第1節では『速度場』  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  が、(1) 任意の時刻  $t$  で非発散であること、(2)  $t$  に関して場が滑らかに変化することのみを要求します。つまり、流体力学の数学的基礎に関する一般論を考えるので、ここではこの『速度場』を Euler/Navier-Stokes 方程式の初期値問題の解に限定しないことにします。変分原理を考えるためには、むしろ古典力学的には実現しない速度場の生成する軌道も含めた、一般的な数学的土台を考察する必要があります(2.1節参照)。

この与えられた『速度場』  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  によって、 $\mathbb{T}^3$  中の1点  $\mathbf{a}$  から流される流体粒子の軌道 (orbit) を  $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$  と書くことにしましょう。すなわち軌道  $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$  は、常微分方程式

$$\frac{d\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t) \quad (1)$$

を各点  $\mathbf{a}$ 、各時刻  $t$  において満たしているものとします。ここで、これら一つ一つの流体粒子の軌道  $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$  の  $\mathbb{T}^3$  全体にわたる全体

$$\{\mathbf{X}(\mathbf{a}, t); t \in [0, 1], \mathbf{a} \in \mathbb{T}^3\} \quad (2)$$

を考えましょう。以下、この集合を『軌道束 (orbit bundle)』と呼び、

$$\{\mathbf{X}(t)\} = \psi_t = \psi(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad (3)$$

のいずれかで表記することにしましょう。この『軌道束』が、Arnol'd の理論 [2] において『微分同相写像 (diffeomorphism)』と呼ばれるものです。

軌道束  $\psi_t$  は  $\mathbb{T}^3$  から  $\mathbb{T}^3$  への一対一かつ上への写像を与えます。この写像  $\psi_t$  の  $\mathbb{T}^3$  上の関数  $f$  に対する作用は、3次元の Dirac 測度  $\delta(\mathbf{x})$  と各軌道  $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$  を用いて次式で書き下されます<sup>1</sup>:

$$\psi(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) : f(\mathbf{x}) \longrightarrow (\psi_t f)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{T}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{a}, t)) f(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \quad \text{for } \forall t \in [0, 1]. \quad (4)$$

また軌道束は『微分同相』という性質を持っています。これは物理的には次の二つの性質を表しています: (1) 任意の流体要素が軌道束による移流でちぎれないこと、(2) 流体要素の変形がなめらかであること<sup>2</sup>。

## 1.2 軌道束の摂動場と速度の摂動場の関係

Arnol'd の理論の枠組みでは、軌道束  $\{\mathbf{X}(t)\}$  に対する摂動は束を構成している一つ一つの軌道  $\mathbf{X}(t)$  に対してかかると考えなくてはなりません (図1参照)。ひとつひとつの軌道に対する摂動は、 $t$  に依存する摂動ベクトル場  $\xi(\mathbf{x}, t)$  と微小パラメーター  $\alpha$  を用いて、

$$\mathbf{X}_\alpha(t) = \mathbf{X}(t) + \alpha \xi(\mathbf{X}(t), t) \quad (5)$$

<sup>1</sup>したがって軌道束は、流体力学の理論において Kaneda[5] が LRA 方程式系を導く際に用いた『位置関数 (position function)』に他なりません。

<sup>2</sup>これらは数学的には、(1) が『同相』(2) が『微分可能』という性質を表しています。微分可能性は連続性を前提するので、(2) は (1) を含むのですが、ここではあえて冗長に記述します。

与えられます。以下、このベクトル場  $\xi(x, t)$  を『粒子ずれ場』と呼ぶことにします。粒子ずれ場は非発散ベクトル場 ( $\nabla \cdot \xi(x, t) = 0$ ) でなくてはなりません。というのも任意の時刻  $t$  において、摂動を受けた軌道束  $\{X_\alpha(t)\}$  による移流が体積保存の性質を満たさねばならないからです。

摂動を受けた軌道束  $\{X_\alpha(t)\}$  の生成する速度場  $u_\alpha$  の各時刻  $t$ 、各場所  $x$  での値は、その時刻にその点を通る軌道  $X_\alpha(t)$  を用いて、次式で与えられます：

$$u_\alpha(x, t) := \left. \frac{d}{d\tau} X_\alpha(\tau) \right|_{\tau=t} \quad \text{where } x = X_\alpha(t) \in \mathbb{T}^3. \quad (6)$$

もちろん、ここで得られた場  $u_\alpha(x, t)$  も、各時刻  $t$  において運動方程式の解である必要はありません。この速度場は一般に  $O(\alpha)$  でもとの速度場と異なっています。この速度場の摂動の部分を  $v(x, t)$  と表記し、次式で定義しましょう：

$$v(x, t) := \alpha^{-1}(u_\alpha(x, t) - u(x, t)) \quad (7)$$

以下、この場を『速度摂動場』と呼ぶことにします。

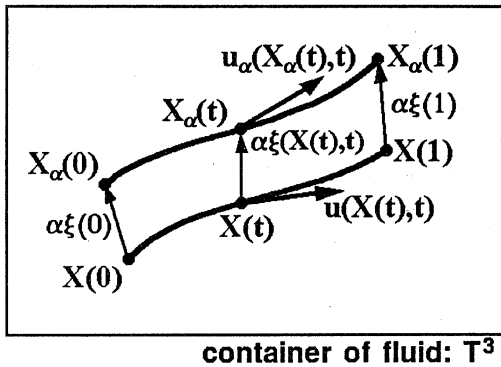


図 1: 軌道に対する摂動

Riemann 幾何学的考察では、軌道の一つ一つに対して摂動がかかると考えます。軌道  $X(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) に沿って流される Lagrange 粒子は、その時刻  $t$  における位置が摂動場  $\alpha \xi(X(t), t)$  によって  $O(\alpha)$  だけずらされます。

それでは、粒子ずれ場  $\xi$  と速度摂動場  $v$  との間にはどのような関係があるのでしょうか。Lagrange 粒子の位置が摂動展開において首尾一貫する条件をもとにして、両者の関係を考えましょう。計算の方針としては、摂動軌道上の時刻  $t + \epsilon$  の点  $X_\alpha(t + \epsilon)$  の位置を、時刻  $t$  における基準点  $X(t)$ 、およびその位置での速度場  $u(X(t), t)$ 、粒子ずれ場  $\xi(X(t), t)$ 、摂動速度場  $v(X(t), t)$  を用いて評価します。

まず粒子ずれ場  $\xi(x, t)$  に関する展開を先に実行すると：

$$\begin{aligned} X_\alpha(t + \epsilon) &= X(t + \epsilon) + \alpha \xi(X(t + \epsilon), t + \epsilon) \\ &= X(t) + \epsilon u(X(t), t) + \alpha \xi(X(t) + \epsilon u(X(t), t) + O(\epsilon^2), t + \epsilon) + O(\epsilon^2) \\ &= X(t) + \epsilon u(X(t), t) + \alpha \xi(X(t), t) \\ &\quad + \alpha \epsilon \left( \frac{\partial \xi}{\partial t}(X(t), t) + \nabla_{u(X(t), t)} \xi(X(t), t) \right) + O(\epsilon^2) + O(\alpha^2) \end{aligned} \quad (8)$$

となります。ここで記号  $\nabla_b a$  はベクトル場  $a(x)$  のベクトル場  $b(x)$  による無限小移流を表し、形式的に次式で定義します：

$$\nabla_{b(x)} a(x) := \left. \frac{d}{d\epsilon} a(x + \epsilon b(x) + O(\epsilon^2)) \right|_{\epsilon=0}. \quad (9)$$

ここでは右辺に現れるベクトル場の移流の表式が具体的に与えられていないので、この定義は形式的なものに過ぎません。一般にベクトル場の移流は自明ではなく、例えば、線要素に基づくベクトル場なのか、面要素に基づくベクトル場なのか等々によって、移流の具体的な表式が異なっています。本研究では、非圧縮完全流体の運動を変分原理に基づいて導くための移流の定義を考えます (1.3 節参照)。

さて、 $\mathbf{X}_\alpha(t+\epsilon)$  の摂動展開を時間推移の方から先に始めると、つぎのようになります:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_\alpha(t+\epsilon) &= \mathbf{X}_\alpha(t) + \epsilon \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha(t), t) + O(\epsilon^2) \\
&= \mathbf{X}(t) + \alpha \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}(t), t) + \epsilon \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{X}(t) + \alpha \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}(t), t) + O(\alpha^2), t) + O(\epsilon^2) \\
&= \mathbf{X}(t) + \alpha \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}(t), t) + \epsilon \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{X}(t), t) + \alpha \epsilon \nabla_{\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}(t), t)} \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{X}(t), t) + O(\epsilon^2) + O(\alpha^2) \\
&= \mathbf{X}(t) + \alpha \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}(t), t) + \epsilon \left( \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) + \alpha \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t) \right) \\
&\quad + \alpha \epsilon \nabla_{\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}(t), t)} \left( \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) + \alpha \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t) \right) + O(\epsilon^2) + O(\alpha^2) \\
&= \mathbf{X}(t) + \alpha \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}(t), t) + \epsilon \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \\
&\quad + \alpha \epsilon \left( \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t) + \nabla_{\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}(t), t)} \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \right) + O(\epsilon^2) + O(\alpha^2) \tag{10}
\end{aligned}$$

したがって、式 (8), (10) の二つの摂動展開が首尾一貫しなくてはならないので、任意の時刻  $t \in [0, 1]$ 、位置  $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^3$  において関係式

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) - \nabla_{\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \tag{11}$$

が  $O(\alpha\epsilon)$  で成り立たなくてはなりません。この関係式は従来の測地線の研究では見過ごされてきました。この式より、Lagrange 粒子の軌道を摂動する Arnol'd の立場に立てば、速度場の安定性問題 (すなわち速度摂動場のダイナミクス) を、粒子ずれ場のダイナミクスに基づいて記述することができます。(第 2.3.2 節参照)

### 1.3 ベクトル場の移流について

前節において式 (9) によって定義した無限小移流は、微分幾何学の用語では接続 (connection) と呼ばれる幾何学構造に対応しています。ベクトル場の移流の具体的な計算はベクトル場の定義、すなわち幾何学的対象の選択に依存することに注意しなくてはなりません。例えば線要素、面要素に基づく非発散ベクトル場 ( $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$  としよう) の無限小移流はおのおの次式で与えられます [6]:

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{l}), \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = \left( \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{s}) \right)_S. \tag{12}$$

ここで記号  $(\mathbf{a})_S$  は、ベクトル場  $\mathbf{a}$  の非発散成分を示します。周期境界条件の下では、Fourier 変換  $\mathcal{F}$  を用いて次式で表されます:

$$(\mathbf{a}_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i)_S := \left( \mathcal{F}^{-1} P_{ij}(\mathbf{k}) \mathcal{F} a_j \right)(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i \quad \text{where} \quad P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2}. \tag{13}$$

本節では、変分原理の土台となる接続の満たすべき条件について考え、構成的な立場から定義をします。まず Affine であることを要求しましょう。

1. [Affine 接続の構成的定義] ベクトル場  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  の双線形関数であること:

$$\nabla_c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla_c\mathbf{a} + \nabla_c\mathbf{b}, \quad \nabla_{b+c}\mathbf{a} = \nabla_b\mathbf{a} + \nabla_c\mathbf{a}. \quad (14)$$

2. [Affine 接続の構成的定義] スカラー関数とベクトル場の積の移流が次式を満たすこと:

$$\nabla_b(f(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x})) = (\mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x}))\mathbf{a}(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})(\nabla_b\mathbf{a}(\mathbf{x})). \quad (15)$$

3. [Affine 接続の構成的定義] (擬微分の意味で)1階の導関数であること。

これら Affine 接続の条件は、線要素、面要素の移流の誘導するベクトル場の移流に対しても成立しています。

ついで、Riemann 幾何学に基づく記述に特有なものについて考察しましょう。まず軌道束の集合が群であること、すなわち軌道束による移流が群の演算として成立していることが必要です。この条件は任意のベクトル場  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  に対し、ベクトル場  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  によって移流された場  $\mathbf{a}(\mathbf{x} + \epsilon\mathbf{b}(\mathbf{x}) + O(\epsilon^2))$  が十分小さい  $\epsilon$  で体積保存的であることです。これより次の条件が導かれます:

4. [移流が Lie 群の演算であること] 無限小移流が非発散ベクトル場であること:

$$\nabla \cdot (\nabla_b\mathbf{a}) = 0. \quad (16)$$

これは Lie 群上の幾何学の立場では自明な前提ですが、物理学的には運動が非発散ベクトルの関数空間に限定されている、すなわち系にホロノミックな拘束がかかっていることを明示的にすることに他なりません。

力学的に最も重要な幾何学的条件は、Riemann 計量が Lie 群の作用に対して不変であることです。これは任意のベクトル場  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  の内積

$$\langle \mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x}) \rangle := \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (17)$$

が、任意のベクトル場  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  による移流を受けても値が変わらないことです:

$$\langle \mathbf{a}(\mathbf{X}(t)), \mathbf{b}(\mathbf{X}(t)) \rangle = \langle \mathbf{a}(\mathbf{X}(0)), \mathbf{b}(\mathbf{X}(0)) \rangle \quad \text{for } \forall t \in [0, 1] \quad (18)$$

ここで  $\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{X}(t))$  です<sup>3</sup>。この条件は  $t \rightarrow 0$  の極限で次のように表現されます:

5. [Levi-Civita 接続の定義 (1):Riemann 計量が不変となること] 任意の非発散ベクトル場  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  に対して、次式が成り立つこと:

$$\langle \mathbf{a}, \nabla_c\mathbf{b} \rangle + \langle \nabla_c\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0. \quad (19)$$

<sup>3</sup>この等式において、左辺の移流は体積要素  $d\mathbf{x}$  に対してもかかっていることに注意しなくてはなりません。

この式は無限小移流の演算子に関する部分積分の公式を与えます。この条件は数学的には、計量的接続という幾何学的構造を軌道束の集合の上に定義することです。この条件より、物理的には Lagrangian  $L(\dot{\mathbf{X}}(t)) := \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle$  が流体粒子のラベルの付け替えに対して不変であることが一般的に保証されます。

さて、以上5個の条件は定数倍の任意性を持っています。ここでは次の条件を科すことでこの任意性を除きます。

6. [定数倍の任意性を取り除くこと]  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  の場合に Euler 方程式の非線形項  $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla P(\mathbf{x}, t)$  に帰着すること:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_S. \quad (20)$$

以上の6個の条件を満たす接続の一般形は

$$\nabla_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a})_S + \tau \left( \nabla \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + \left( b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \right)_S \right) \quad (21)$$

( $\tau$  は実数) です。  $\tau$  に依存する項はトーションという幾何学構造を与えます。これに Levi-Civita 接続の条件であるトーション無しの条件を加えると、

7. [Levi-Civita 接続の定義 (2): トーション無し] 接続を用いた交換子が、ベクトル場の交換子に等しいこと:

$$\nabla_{\mathbf{b}} \mathbf{a} - \nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}. \quad (22)$$

以上の7個の条件により、軌道束のなす Lie 群上の Levi-Civita 接続は一意に決まります:

$$\nabla_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a})_S. \quad (23)$$

次の節では、この式で与えられる右不変計量に伴う Levi-Civita 接続をもった多様体上の変分問題を考えます。

## 2 変分原理とダイナミクス

本節では、前節で説明した数学的な道具立ての下での変分原理について考察し、第1変分より速度場の発展方程式 (Euler 方程式) を、第2変分より粒子ずれ場の発展方程式 (Jacobi 方程式) を導きます。また Jacobi 方程式の初期条件に対する考察を行い、Arnol'd の定式化の下で、粒子の相対拡散と速度場の安定性問題を取り扱うことが出来ることを示します。

### 2.1 Euler 方程式の変分原理に基づく導出 (第1変分の計算)

軌道束  $\{\mathbf{X}(t); t \in [0, 1]\}$  に沿った密度一様な非圧縮完全流体の運動の作用積分は次式によって与えられます:

$$S(\{\mathbf{X}(t)\}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) d\mathbf{X}(t) dt. \quad (24)$$

これより摂動を受けた軌道束に沿った作用積分の値を調べ、作用積分の変分を計算しましょう。式(8)の $\epsilon$ 項より、摂動を受けた軌道束の生成する速度場は

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha(t), t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) + \alpha \left( \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}(\mathbf{X}(t), t) + \nabla_{\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}(t), t) \right). \quad (25)$$

体積要素にも移流がかかりますが、体積保存的なので大きさは変化しません:

$$d\mathbf{X}_\alpha(t) = d\mathbf{X}(t) + \alpha \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right) d\mathbf{X}(t) + O(\alpha^2) = d\mathbf{X}(t). \quad (26)$$

これらを式(24)に代入して、摂動を受けた軌道束 $\{\mathbf{X}_\alpha(t)\}$ に沿った作用積分の値は

$$\begin{aligned} & S(\{\mathbf{X}_\alpha(t)\}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^3} \left| \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) + \alpha \left( \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}(\mathbf{X}(t), t) + \nabla_{\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}(t), t) \right) \right|^2 d\mathbf{X}(t) dt \\ & \quad (\text{積分変数を Lagrange 座標から Euler 座標に変えて}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^3} \left| \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \alpha \left( \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) \right) \right|^2 d\mathbf{x} dt \\ & \quad (\alpha \text{ に関して摂動展開して}) \\ &= S(\{\mathbf{X}(t)\}) + \alpha \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \left( \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x} dt + O(\alpha^2) \\ & \quad (\text{接続 } \nabla \text{ が計量的であるとして、空間変数、時間変数に関して部分積分して}) \\ &= S(\{\mathbf{X}(t)\}) - \alpha \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^3} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt \\ & \quad + \alpha \left[ \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right]_0^1 + O(\alpha^2) \quad (27) \end{aligned}$$

以上の式より、変分場が $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{0}$ を満たすとき、任意の変分場 $\boldsymbol{\xi}$ に対して $O(\alpha)$ で作用積分の停留値を与える $\mathbf{u}$ は、各時刻において Euler 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (28)$$

を満たさねばなりません。

## 2.2 粒子ずれ場の発展方程式 (Jacobi 方程式) の導出 (第2変分の計算)

軌道束 $\{\mathbf{X}(t)\}$ と $\{\mathbf{X}_\alpha(t)\}$ の誘導する速度場が双方とも Euler 方程式の解である場合、粒子ずれ場 $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ を Jacobi 場と呼びます。第1.2節で得られた粒子ずれ場と速度摂動場の関係式(11)の両辺を Euler 方程式の解 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ に沿って Lagrange 微分して次式を得ます:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{D^2\boldsymbol{\xi}}{Dt^2} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial i}\boldsymbol{\xi}} \mathbf{u} - \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{u}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(式 (11), (28) を用いて)} \\
& = \frac{D^2 \xi}{Dt^2} - \nabla_{(v + \nabla_\xi u - \nabla_u \xi)} u - \nabla_\xi \left( \frac{Du}{Dt} - \nabla_u u \right) - \nabla_u \nabla_\xi u \\
& = -\nabla_v u - \nabla_\xi \frac{Du}{Dt} + \frac{D^2 \xi}{Dt^2} + \left( \nabla_\xi \nabla_u - \nabla_u \nabla_\xi - \nabla_{(\nabla_\xi u - \nabla_u \xi)} \right) u, \quad (29)
\end{aligned}$$

ここで  $\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \nabla_u$  です。したがって  $u, u_\alpha$  が Euler 方程式をみたす、すなわち

$$\frac{Du}{Dt} = 0, \quad \frac{Dv}{Dt} + \nabla_v u + O(\alpha) = 0 \quad (30)$$

ならば、粒子ずれ場は  $O(\alpha)$  で **Jacobi 方程式**

$$\frac{D^2 \xi}{Dt^2}(\mathbf{x}, t) + \Omega(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \xi(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (31)$$

を満たさねばなりません。この式に現れる作用素

$$\Omega(\mathbf{u}, \xi) := \nabla_\xi \nabla_u - \nabla_u \nabla_\xi - \nabla_{(\nabla_\xi u - \nabla_u \xi)} \quad (32)$$

は曲率テンソルと呼ばれます。

## 2.3 変分問題が取り扱える対象と初期条件に対する考察

速度場と Jacobi 場に関する方程式の組

$$\frac{Du}{Dt}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \frac{D^2 \xi}{Dt^2}(\mathbf{x}, t) + \Omega(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \xi(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (33)$$

を得ました。これらの方程式の初期値問題には、三つの初期条件

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \quad \xi(\mathbf{x}, 0), \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \quad (34)$$

が必要です。本節では、これらの初期条件の下で取り扱うことの出来る問題について考えましょう。ここで注意すべきことは、Jacobi 方程式は2階の微分方程式なので、『関数空間ふたつ分』の初期条件の自由度があることです。この自由度のおかげで、『粒子の相対拡散』の意味での流体の運動の不安定性と、『解の安定性問題』の意味での速度場の不安定性とが、同じ幾何学的な土俵で議論できることを、以下の考察において明らかにします。

### 2.3.1 Lagrange 粒子の拡散

はじめに『初期の速度摂動場を零に置く』すなわち

$$v(\mathbf{x}, 0) = 0 \iff \frac{\partial \xi}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \nabla_{\xi(\mathbf{x}, 0)} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) - \nabla_{\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)} \xi(\mathbf{x}, 0) \quad (35)$$



という初期条件から始まる初期値問題を考えましょう。ここで Jacobi 場の 0 階の初期条件  $\xi(\mathbf{x}, 0)$  は適当に与えます。

この場合、軌道束の族  $\{X_\alpha(t)\}$  の与える速度場は次式を満たします:

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \text{ for } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \forall t \in [0, 1], \forall \alpha \in [0, \alpha]. \quad (36)$$

物理的には『同じ速度場のダイナミクス』を記述しているので、この初期値問題は『解の安定性問題』とは全く異なるダイナミクスを記述しています。初期時刻 0 において Lagrange ラベルが  $X(0)$  と  $X(0) + \alpha\xi(X(0), 0)$  の粒子が、時刻  $t$  においてどれだけ引き離されているか、すなわち『Lagrange 粒子対の相対拡散』を調べていることとなります。

### 2.3.2 解の安定性問題

次いで『Lagrangian Marker を  $t = 0$  で流さない』すなわち

$$\xi(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (37)$$

という状況を考えましょう。このままでは Jacobi 場の初期値問題は解けないので、1 階の導関数に関する条件として『初期条件  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$  に摂動  $\alpha\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$  を加える』という条件

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) \quad (38)$$

を与えます。これらの初期条件の下で運動方程式を解き、摂動場を速度場と Jacobi 場より計算すれば、同じ時刻における摂動場が求められます。したがって通常の意味における『解の安定性問題』が Jacobi 場の初期値問題の枠内で議論できます。具体的には速度摂動場の適当なノルム

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \left\| \frac{\partial \xi}{\partial t}(t) + \nabla_{\mathbf{u}(t)}\xi(t) - \nabla_{\xi(t)}\mathbf{u}(t) \right\| \quad (39)$$

の  $t$  依存性を調べることとなります。したがって Arnol'd の「解の安定性とは異なる」というコメント(文献 [1]、付録 2、L 項『検討』(邦訳 338 ページ)参照)は、注意して読む必要があります。

## 3 一様等方乱流中の粒子の相対拡散

本節では Jacobi 方程式の曲率項のアンサンブル平均を求め、エネルギーが  $-5/3$  乗スペクトルに従う場合の一様等方乱流の断面曲率を求めます。ついで、Jacobi 場のノルムの発展方程式を導出します。

### 3.1 曲率項の $\mathbf{u}$ に関する統計平均

本節では、速度場  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  が一様等方乱流である場合に対し、Jacobi 方程式(式 (31))の曲率項  $\Omega(\mathbf{u}, \xi)\mathbf{u}$  の  $\mathbf{u}$  に関するアンサンブル平均値を考えます。その際に用いる仮定は、(1) 各時刻において Jacobi 場と速度場が統計的に独立である、(2) 速度場は統計的に定常かつ一様等方であり、1 時刻 2 点相関関数の Fourier 変換は次式で与えられる:

$$\langle\langle \hat{u}_i(\mathbf{p}) \hat{u}_j(\mathbf{q}) \rangle\rangle = \frac{1}{2} Q(p) P_{ij}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}|0) \quad (40)$$

の二つです。ここで記号  $\langle\langle f(\mathbf{u}) \rangle\rangle$  は  $\mathbf{u}$  に関するアンサンブル平均、 $\delta(A|B)$  は Kronecker のデルタで  $A=B$  のときに 1 を、それ以外るときに 0 を与える。

曲率項と非発散の試験ベクトル場  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$  との内積

$$\langle \boldsymbol{\eta}, \Omega(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u} \rangle = \left\langle \boldsymbol{\eta}, \left( \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} + \nabla_{\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\xi}} - \nabla_{\nabla \boldsymbol{\xi} \mathbf{u}} \right) \mathbf{u} \right\rangle \quad (41)$$

を、Fourier 変換を用いて計算しよう。まず第 2 番目の項は次のようになります:

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\boldsymbol{\eta}}(-\mathbf{k}) \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q})} \nabla_{\hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{r})} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{p}) \right\rangle &= - \left\langle \nabla_{\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q})} \hat{\boldsymbol{\eta}}(-\mathbf{k}) \cdot \nabla_{\hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{r})} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{p}) \right\rangle \\ &= -k_c p_d P_{ab}(\mathbf{r} + \mathbf{p}) \left\langle \hat{u}_a(\mathbf{p}) \hat{u}_c(\mathbf{q}) \right\rangle \hat{\xi}_d(\mathbf{r}) \hat{\eta}_b(-\mathbf{k}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} - \mathbf{k} | \mathbf{0}), \\ &= -\frac{1}{2} k_c p_d P_{ab}(\mathbf{r} + \mathbf{p}) Q(p) P_{ac}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} | \mathbf{0}) \hat{\xi}_d(\mathbf{r}) \hat{\eta}_b(-\mathbf{k}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} - \mathbf{k} | \mathbf{0}), \\ &= -\frac{1}{2} k p \left( z - \frac{p}{s}(y + zx) \right) \frac{p_b p_d}{p^2} \hat{\eta}_b(-\mathbf{k}) \hat{\xi}_d(\mathbf{k}) Q(p) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{s} | \mathbf{0}). \end{aligned} \quad (42)$$

ここで  $k = |\mathbf{k}|$ ,  $p = |\mathbf{p}|$ ,  $s = |\mathbf{s}|$ ,  $x = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}}{ps}$ ,  $y = -\frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}}{sk}$ ,  $z = -\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{kp}$  です。同様な計算を行って、第 1、3、4 項はそれぞれ次のように評価されます:

$$\left\langle \hat{\boldsymbol{\eta}}(-\mathbf{k}) \cdot \nabla_{\hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{r})} \nabla_{\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{p})} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \right\rangle = 0, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\boldsymbol{\eta}}(-\mathbf{k}) \cdot \nabla_{(\nabla_{\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{p})} \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{r}))} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \right\rangle &= \frac{1}{2} k p \left( z - \frac{p}{s} x z \right) \frac{p_i p_j}{p^2} \hat{\eta}_i(-\mathbf{k}) \hat{\xi}_j(\mathbf{k}) Q(p) \\ &\quad \times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{s} | \mathbf{0}), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\boldsymbol{\eta}}(-\mathbf{k}) \cdot \nabla_{(\nabla_{\hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{r})} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{p}))} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \right\rangle &= -\frac{1}{2} k p \left( (yx + z) - \frac{p}{s} y \right) \frac{p_i p_j}{p^2} \hat{\eta}_i(-\mathbf{k}) \hat{\xi}_j(\mathbf{k}) Q(p) \\ &\quad \times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{s} | \mathbf{0}). \end{aligned} \quad (45)$$

以上をまとめて曲率項の一樣等方乱流に対するアンサンブル平均は各 Fourier モード毎に次のようになります:

$$\left( \Omega(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u} \right)_i(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \hat{\xi}_j(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{s}}^{\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{s} = \mathbf{0}} \frac{k}{ps} p_i p_j \left( s(xy + 3z) - 2p(y + xz) \right) Q(p). \quad (46)$$

システムサイズを大きくした極限では:

$$\left( \Omega(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u} \right)_i(\mathbf{k}) = \pi \hat{\xi}_j(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{s}}^{\substack{\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{s} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{p}, \mathbf{s}) \in D}} p_i p_j \left( s(xy + 3z) - 2p(y + xz) \right) Q(p) ds dp, \quad (47)$$

ここで積分区間  $D$  は  $D = \{(\mathbf{p}, \mathbf{s}); p + s > k, s + k > p, k + p > s\}$  で与えられます。

この表式を用いて、エネルギーが  $-5/3$  乗スペクトルに従う場合の (規格化されていない) 断面曲率  $\int \xi \cdot \Omega(\mathbf{u}, \xi) \mathbf{u} \, dx$  を Fourier モード毎に計算しましょう。

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left\langle \widehat{\xi}(-\mathbf{k}) \cdot (\Omega(\mathbf{u}, \xi) \mathbf{u})(\mathbf{k}) \right\rangle \right\rangle \\
&= \pi \widehat{\xi}_i(\mathbf{k}) \widehat{\xi}_j(\mathbf{k}) \int_p \int_s p_i p_j \left( s(xy + 3z) - 2p(y + xz) \right) Q(p) \, ds \, dp \\
&\quad (p, s) \in D \\
& \text{(Jacobi 場が一様であるとして } \widehat{\xi}_i(-\mathbf{k}) \widehat{\xi}_j(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} Q_\xi(\mathbf{k}) P_{ij}(\mathbf{k}) \text{ を代入すると)} \\
&= \frac{\pi Q_\xi(\mathbf{k})}{2} \int_p \int_s p^2 (1 - z^2) \left( s(xy + 3z) - 2p(y + xz) \right) Q(p) \, ds \, dp \\
&\quad (p, s) \in D \\
& \text{(エネルギー・スペクトル } E(p) = 2\pi p^2 Q(p) = C_K \epsilon^{\frac{2}{3}} p^{-\frac{5}{3}} \text{ を代入して)} \\
&= \frac{C_K \epsilon^{\frac{2}{3}} Q_\xi(\mathbf{k})}{4} \int_p \int_s p^{-\frac{5}{3}} (1 - z^2) \left( s(xy + 3z) - 2p(y + xz) \right) \, ds \, dp \\
&\quad (p, s) \in D \\
&= -0.5283 C_K \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}} Q_\xi(\mathbf{k}) \tag{48}
\end{aligned}$$

この計算より、 $-5/3$  乗スペクトルを持つ一様等方乱流の断面曲率のアンサンブル平均は (1) 紫外・赤外発散しない、(2) すべての Fourier モードで負であることが判りました。一様等方乱流に対する Jacobi 場の平均断面曲率が負であることは、乱流が位相空間上でカオス的な軌道不安定性を持つことを強く示唆しています。

### 3.2 Jacobi 方程式の空間積分

まず Jacobi 方程式を次の二つの連立方程式に分解します:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \eta, \quad \frac{D\eta}{Dt} = -\Omega(\mathbf{u}, \xi) \mathbf{u}. \tag{49}$$

ベクトル場のスカラー積  $\xi \cdot \eta$  の Lagrange 微分より、次の恒等式を得ます:

$$\frac{D}{Dt} (\xi \cdot \eta) = \eta \cdot \eta - \xi \cdot (\Omega(\mathbf{u}, \xi) \mathbf{u}) \tag{50}$$

この式は次のように変形されます:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\xi|^2 = -\mathbf{u} \cdot \nabla \left( \xi \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \xi \cdot \eta \right) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \nabla \left( \frac{|\xi|^2}{2} \right) + \eta \cdot \eta - \xi \cdot (\Omega(\mathbf{u}, \xi) \mathbf{u}). \tag{51}$$

この式の両辺を積分して次式を得ます:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int |\xi|^2 \, dx = \int |\eta|^2 \, dx - \int \xi \cdot (\Omega(\mathbf{u}, \xi) \mathbf{u}) \, dx. \tag{52}$$

これを Fourier モードで評価して次の不等式を得ます:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int Q_\xi(\mathbf{k}, t) \, d\mathbf{k} = 2 \int |\eta(\mathbf{k}, t)|^2 \, d\mathbf{k} - 2 \int \xi(-\mathbf{k}, t) \cdot (\Omega(\mathbf{u}, \xi) \mathbf{u})(\mathbf{k}, t) \, d\mathbf{k}. \tag{53}$$

-5/3乗スペクトルに従う一様等方乱流では、Jacobi場の $L^2$ -ノルムの時間発展は次のように評価されます:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int Q_\xi(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \geq 1.057 C_K \epsilon^{2/3} \int k^{4/3} Q_\xi(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}. \quad (54)$$

### 3.3 注意

本研究ではJacobi場の時間発展の解析をしました。得られた結果は形式的にはRichardsonの法則と同じ形をしています。しかし、これは初期に距離 $l = 2\pi/|\mathbf{k}|$ だけ離れた粒子の相対拡散のダイナミクスではないことに注意しなくてはなりません。そうではなく、Jacobi場のうち、相関長が $l = 2\pi/|\mathbf{k}|$ となるコヒーレントな運動成分は、 $l^{2/3}$ に比例するタイムスケールで変化することを意味しています。初期のLagrange粒子対の相対距離はあくまでも $O(\alpha)$ の無限小なのです。

## References

- [1] Arnol'd, V. I., *Mathematical methods of classical mechanics* 2nd Ed, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [2] Arnold, V., "Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits", *Ann. Inst. Fourier* **16** (1966) pp.319-361.
- [3] Arnol'd, V. I., Khesin, B. A., *Topological methods in hydrodynamics*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [4] Vladimirov, V. A., Moffat, H. K., and Ilin, K. I., "On general transformations and variational principles for the magnetohydrodynamics of ideal fluids. Part 4. Generalized isovorticity principle for three-dimensional flows", *J. Fluid Mech.* **390** (1999) pp.127-150, and references therein.
- [5] Kaneda, Y., "Renormalized expansions in the theory of turbulence with the use of the Lagrangian position function", *J. Fluid Mech.* **107** (1981) pp.131-145.
- [6] Batchelor, G. K., *An introduction to hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1967, §3.1.