

## 回転球殻内の渦と磁場の相互作用

名古屋大学 理学研究科 石原典雄 (Norio ISHIHARA)  
文部省核融合科学研究所 木田重雄 (Shigeo KIDA)

### 1 はじめに

地球をはじめとするさまざまな天体は磁場を保持していることが知られている。その形成・維持の機構としてはダイナモ(発電)作用が最も有力である。これは Larmor[1] の『太陽のような回転体はどのようにして磁石となるか』という論文の中ではじめて登場した。この中では磁場の発生する機構として3つの可能性が示されており、そのひとつとして論じられている。すなわち、回転している物体の中で、導電性の流体が磁力線を横切ると、電磁誘導の法則にしたがって電流が発生し、それがもとの磁場を強める形の磁場を生成することができるのではないか、というものである。ダイナモ作用は流体からなり磁場を伴う天体の普遍的な現象であると考えられている [2]。

ダイナモの物理は定性的にエネルギーの循環を用いて次のように考えることができる。まず、熱エネルギーの供給により粘性散逸に抗して熱対流が組織される。これに磁場の攪乱が加わるとアンペールの法則から電流が生成され、ローレンツ力を通して磁気エネルギーが生成される。このエネルギーの流れは、磁場からのフィードバックにより磁気エネルギーから運動エネルギーへの逆流が生じる可能性もあり必ずしも一方向的ではない。原理的には、運動エネルギーから供給される磁気エネルギーがジュール熱による散逸を上まわり続ければ発電作用により磁場構造の維持が可能になる。しかし、『天体に磁場がなぜ存在しているのだろうか』という疑問に対してダイナモ作用は中間的な解答であり、どのように形成・維持されるのかという問いにはいまなお明解な答えはないといえる。

ダイナモによる磁場形成・維持の問題の研究方法として、流れ場を固定した運動学的なダイナモと流れ場と磁場を連立して解く方法がある。運動学的ダイナモではローレンツ力からの反作用を考慮することができない。近年のコンピュータサイエンスの進歩により、ダイナモの支配方程式を直接数値的に解くことにより現実的な MHD ダイナモの多様な解の振舞いが明らかになりつつある [3-13]。その中でも特に磁場形成の機構のプロセスを詳細に調べた研究例として陰山等 [6,7]、北内等 [10] のものがあるが、現象に関する知見は、主として静的構造である。しかし、たとえば、地球の磁場の極性反転や磁場パターンの西方移動などに見られるように、天体に付随する磁場は定常的ではない。したがって、天体の基礎現象の理解には現象の時間発展の動力学がより重要となり、動的な形成過程の知見が必要である。流れ場と磁場はローレンツ力によってのみ結合しており相互作用の要因はローレンツ力の流れ場の変形である。これは、磁場の飽和および極性反転を実現する上で重要な要素になると考えられ、その機構の理解のヒントになる可能性がある。しかし、これまでローレンツ力が流れ場に対してどのような影響を及ぼすかについて明確に示した例は少なくその理解は十分であるとはいえない。ダイナモ現象の本質が非線形であるから流れ

場の反作用を詳細に解析すれば興味深い MHD ダイナモの特徴を引き出すことができると期待される。

そこで本稿では、MHD プシネスク方程式の直接数値シミュレーション (DNS) により、回転球殻内の渦と磁場の相互作用による構造の変化の様子を詳細に解析することで、どのように流れのトポロジーが変化するかを考察する。

## 2 ダイナモモデルと数値計算法

熱対流ダイナモによる磁場の形成過程を調べるために、一定角速度  $\Omega$  で回転する 2 つの同心球の間に満たされた流体が、球の中心からの距離に比例する重力場  $\mathbf{g} = -\rho\gamma\mathbf{r}$  ( $\rho$  は流体の質量密度、 $\gamma$  は比例定数、 $\mathbf{r}$  は球の中心を始点とする位置ベクトル) のもとで運動する系を考える (図 1)。内球と外球をそれぞれ一定の温度に保ち、内球は外球より高温とする。簡単のために内球内は絶縁体、外球外は真空とし、すべての物性値 (動粘性係数  $\nu$ 、熱拡散係数  $\kappa$ 、磁気拡散係数  $\lambda$ 、透磁率  $\mu$ 、熱膨張係数  $\alpha$ 、質量密度  $\rho$ ) は全空間で一様とする。

流れ場の長さスケールを球殻の厚さ  $d$ 、時間スケールを熱拡散時間  $d^2/\kappa (= \tau_\kappa)$ 、温度スケールを内外球の温度差  $\Delta T$ 、磁場スケールを  $\sqrt{\mu\rho}\kappa/d$  で無次元化すると、球殻とともに回転する系におけるプシネスク流体の運動方程式、連続の式、電磁誘導方程式、磁場非発散の式、および熱伝導方程式はそれぞれ、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla P + P_r R_a T \mathbf{r} + P_r T_a^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} + P_r \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + R_o \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u} T) + \nabla^2 T \quad (5)$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{u}$  は速度、 $P$  は圧力、 $T$  は温度、 $\mathbf{b}$  は磁束密度、 $\hat{\mathbf{z}}$  は回転軸方向の単位ベクトルである。無次元パラメーター、

$$R_a = \frac{\alpha \Delta T \gamma d^4}{\kappa \nu}, \quad T_a = \left( \frac{2\Omega d^2}{\nu} \right)^2, \quad P_r = \frac{\nu}{\kappa}, \quad R_o = \frac{\lambda}{\kappa} \quad (6)$$

はそれぞれ、レイリー数、テイラー数、プラントル数、およびロバーツ数である。<sup>1</sup> 流体の運動方程式 (1) の右辺は順に、圧力項、浮力項、コリオリ項、移流項、ローレンツ項、粘性項である。また、磁場の発展方程式 (3) は誘導項と拡散項からなる。内外球面上で、球殻内外の磁場が連続であると、速度場には粘着条件、温度場には固定条件を採用すると、

$$\text{内球面上で } \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}^{(i)}, \quad T = 1, \quad (7)$$

<sup>1</sup>ロバーツ数の一般的な定義は  $R_o = \kappa/\lambda$  であるが、ここでは便宜上その逆数を用いている。

$$\text{外球面上で } \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}^{(o)}, \quad T = 0 \quad (8)$$

となる。ただし、内球内の磁束密度  $\mathbf{b}^{(i)}$ 、および外球外の磁束密度  $\mathbf{b}^{(e)}$  は、いずれも調和関数、

$$\nabla^2 \mathbf{b}^{(i)} = \nabla^2 \mathbf{b}^{(e)} = \mathbf{0} \quad (9)$$

である。5つの無次元パラメーター ( $R_a$ ,  $T_a$ ,  $P_r$ ,  $R_o$ , および内外球の半径比  $\eta$ ) のいろいろな値に対して、方程式 (1)–(9) を直接数値的に解く。以下では、 $R_a = 1.6 \times 10^4$ ,  $T_a = 1.6 \times 10^6$ ,  $P_r = 1.0$ ,  $R_o = 2.0 \times 10^{-2}$ ,  $\eta = 0.5$  の場合のシミュレーション結果について述べる。これらのパラメーターの値は、実際の地球に対して見積もられている値 ( $T_a \approx 10^{30}$ ,  $R_o \approx 10^5$ ) とずいぶんかけ離れている。しかし、回転する球殻という幾何形状のもとでの熱対流ダイナモの特徴は、本シミュレーションでも定性的に捉えることができると期待される。

数値計算では、空間微分に球面調和関数 (角度方向) とチェビシェフ多項式 (動径方向) を展開関数として用いる。角度方向に選点法、動径方向にはタウ法を用いて境界条件を満たすように解く。展開関数の切断波数は動径方向に 64、緯度方向に 64、経度方向に 128 である。時間微分に対しては、粘性項に 2 次の Crank-Nicolson 法、その他の項に 2 次の Adams-Bashforth 法を用いる。時間刻みとして  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4}$  を与える。

### 3 流れ場と磁場の構造

#### 3.1 熱対流場の形成

数値シミュレーションは熱対流場の形成とダイナモのシミュレーションの 2 段階で行った。はじめに、わずかに不安定な静止熱伝導状態に温度場と速度場のランダムな摂動を与え、その時間発展を調べた。その結果、回転軸方向に伸びた 6 対のサイクロン (球殻と同じ方向に回転する) 渦柱とアンチサイクロン渦柱が、回転軸のまわりに交互に並んだ定常熱対流場が生成された。この対流場は、赤道面に対して鏡面对称で、回転軸まわりに 6 回対称である [図 2]。

図 3(a) は、2 つの子午面と赤道面で切り出した球殻の一部を、北半球側から見たものである。回転軸方向に伸びた半透明の円筒状領域が渦度の強い領域で、灰色と白色の柱がそれぞれサイクロン渦柱とアンチサイクロン渦柱を表している。実際には、内外球面に沿って渦度の極めて強いエクマン境界層があるが、内部が見えるようにこの層を取り除いてある。このため、渦柱の一部が切り取られている。これらの渦柱は、互いの相対位置を変えることなく、一定角速度で、球殻に相対的に東に向かって移動している。子午面の切口は温度分布を表し、内球が高温 (濃い灰色) で外球に近いほど低温 (薄い灰色) となる。外球面は渦度強度を表し、黒は弱く白いほど強い。この強い渦度パターンは渦柱に対応している。

渦柱とともに動く座標系 (渦柱静止系) では、流体は全体として西向きに流れる。白い点は淀み点で、黒い線はこれらの点を結んでいる流線である。淀み点は、赤道面内に、サイクロン渦柱とアンチサイクロン渦柱の内部、内球とアンチサイクロン渦柱の間、外球とサイクロン渦柱の間にそれ

ぞれ6個ずつある。また、北半球と南半球のサイクロン渦柱の上方にも6個ずつ存在している。これらの淀み点のまわりの流れには、楕円的なものと双曲的なものがある。楕円的なものは、流出型(アンチサイクロン渦柱)と流入型(サイクロン渦柱)がある。白色の渦柱には赤道面内から時計回りにらせん状に回転する上昇流がある。図に示す渦柱内の2本の流線のうち一方はすぐ上方にある淀み点に入る。他方は2つ西隣りの灰色の渦柱に入り下降する。灰色の渦柱には、この他に、白色の渦柱の上方の淀み点からの流入もある。白色の渦柱の上方にある淀み点どうしは、東から西に向かっている流線で結ばれている。

赤道面での流れ場の様子を図3(b)に示す。白点は渦柱静止系における淀み点、黒線は流線である。面内のパターンは渦度強度の分布を表している。内球近くと中央部でらせん状流線を伴う淀み点は、それぞれアンチサイクロン渦柱とサイクロン渦柱に対応している。サイクロン渦柱の中で、赤道面内まで反時計回りに下降した流線は、外球付近の双曲的淀み点に流入する。この淀み点からは、東隣の淀み点からの流入と西隣の淀み点への流出がある。また、球の中心方向に向かって流出した流体は、西方に移動しつつ内球面に近づいていく。そして、何回か周回した後、灰色の柱に時計回りに巻き上げられる。

### 3.2 ダイナモのシミュレーション

次に、この定常熱対流場に極めて弱い磁場の一様攪乱を加え、その時間発展を調べた。はじめ磁気エネルギーは時間とともに指数関数的に増大するが、やがて磁気エネルギーが運動エネルギーの約30%程度に到達すると、突然、運動エネルギーは磁気拡散時間( $50 \tau_K$ )の10分の1程度の時間スケールで減少し、その後、準定常状態が実現された(図4)。準定常状態では、磁気エネルギーは運動エネルギーの3~4倍程度を維持し続けている。以下では、生成された磁場構造を、線形成長と遷移段階の2つの時間帯について考察する。磁場と速度場の空間構造は、ともに球殻に対して相対的に移動しているが、以下では、渦柱とともに移動する系で解析する。

磁場が線形に成長する初期時間帯では、ローレンツ力が小さく磁場との非線形相互作用が無視できるため、速度場は磁場の影響のない定常熱対流場とほとんど同じである。したがって、ここでの議論は運動学的ダイナモの範囲である。時刻20における速度場と磁場の構造を図6に示す。速度場の構造については前節で述べた。図6(a)で、濃灰色の等値面は強磁場領域を表す。これらの強い磁場はいずれも流線に沿って形成されている。図6(b)には、赤道面における磁場強度(黒→白の順に強くなる)を示す。強い磁場は内球および外球近傍にある双曲的な淀み点から流出する流れに沿って生成されている。図5は、双曲的淀み点近傍の流れ構造を模式的に示したものである。実線で示した流体要素は、流れの流出する方向へ点線で示したように引き延ばされる。したがって、淀み点近傍の強磁場は磁力線の伸張強化によって形成されたと考えられる。なお、この淀み点および流線のパターンは、磁場が線形に成長している時刻10と20とでほとんど同一であり、また磁場構造も相似である。

磁気エネルギーの線形成長から準平衡状態への遷移過程では、磁気エネルギーが運動エネルギーより大きくなり磁場との相互作用は無視できない。図7に飽和する前後の流れ場と磁場強度の分布を示す。時刻  $t = 25$  から  $t = 25.5, 26, 26.5$  と経過するにつれて、磁気エネルギーは増大する。この増大により淀み点はアンチサイクロンに付随する楕円的淀み点と双曲的淀み点のうち、外側にある双曲的淀み点が球の中心に向かって移動し、楕円的なものと対となって消滅する。これは、磁場の成長に伴う東西流の変化に原因があるように思われる。磁気エネルギーが飽和する前後で東向き速度成分が加速されている。これを渦柱とともに動く座標系から見ると流れパターンは西向きの一様流が付加されるように見え、淀み点が接近し消滅すると解釈できる。その後、強磁場はアンチサイクロンの縁に形成されるようになる。しかし、アンチサイクロンはその渦形状を強固に保ち、内球に接する流れパターンのトポロジーはほとんど変化していない。

#### 4 まとめ

回転球殻内の熱対流ダイナモにより形成される磁場構造を直接数値シミュレーションにより解析した。まず、磁気エネルギーが線形に成長する段階では、強い磁場は渦柱とともに動く座標系から見た淀み点から流出する流線に沿って形成される。これに対して、線形成長から準平衡状態に遷移する過程では、ローレンツ力によりサイクロン渦柱に付随する外球側の双曲型淀み点が内球側のらせん的淀み点に接近し、消滅する。すなわち、双曲的淀み点を伴う流れ構造は強磁場に対して不安定であると結論づけることができる。流れ場のトポロジーは双曲的淀み点の消滅により回転軸回りの大きな帯状流へと変化している。しかし、アンチサイクロン渦柱を含む内球付近では流れ場のトポロジーは大きくは変化していない。強磁場が、この流れ構造の変化によってアンチサイクロン渦柱の縁で生成されるようになったが、その機構の理解には今後の研究が必要である。

#### 5 謝辞

数値シミュレーションには、文部省核融合科学研究所 理論・シミュレーション研究センターのスーパーコンピューター SX4/64M2 を用いて行った。

#### 参考文献

- [1] J. Larmor, How could a rotating body such as the Sun become a magnet ?, Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci. 159-160. (1919)
- [2] H. K. Moffatt, Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids. Cambridge Univ Press. (1978)

- [3] G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conductive inner core and mantle, *Phys. Earth Planet. Inter* **91** (1995) 63-75.
- [4] G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, A three dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal, *Nature* **377** (1995) 203-209.
- [5] W. Kuang and J. Bloxham, An earth-like numerical dynamo model, *Nature* **389** (1997) 371-374.
- [6] A. Kageyama and T. Sato, Generation mechanism of a dipole field by a magnetohydrodynamic dynamo, *Phys. Rev. E* **55** (1997) 4617-4626.
- [7] A. Kageyama and T. Sato, Velocity and magnetic field structures in a magnetohydrodynamic dynamo, *Phys. Plasmas* **4** (1997) 1569-1575.
- [8] Marcia M. Ochi, A. Kageyama and T. Sato, Dipole and octapole field reversals in a rotating spherical shell :Magnetohydrodynamic dynamo simulation, *Phys. Plasmas* **6** (1999) 777-787.
- [9] H. Kitauchi, K. Araki and S. Kida, Flow structure of thermal convection in a rotating spherical shell, *Nonlinearity* **10** (1997) 885-904.
- [10] H. Kitauchi and S. Kida, Intensification of magnetic field by concentrate-and-stretch of magnetic flux lines, *Phys. Fluids* **10** (1998) 457-468.
- [11] H. Kitauchi, Topological structure of magnetic flux lines generated by thermal convection in a rotating spherical shell, *J. Phys. Soc. Jpn* **67** (1998) 1243-1249.
- [12] S. Kida and K. Araki and H. Kitauchi, Periodic Reversals of magnetic field generated by thermal convection in a rotating spherical shell, *J. Phys. Soc. Jpn* **66** (1997) 2194-2201.
- [13] S. Kida and H. Kitauchi, Chaotic reversal of dipole moment of thermally driven magnetic field in a rotating spherical shell, *J. Phys. Soc. Jpn* **67** (1998) 2950-2951.

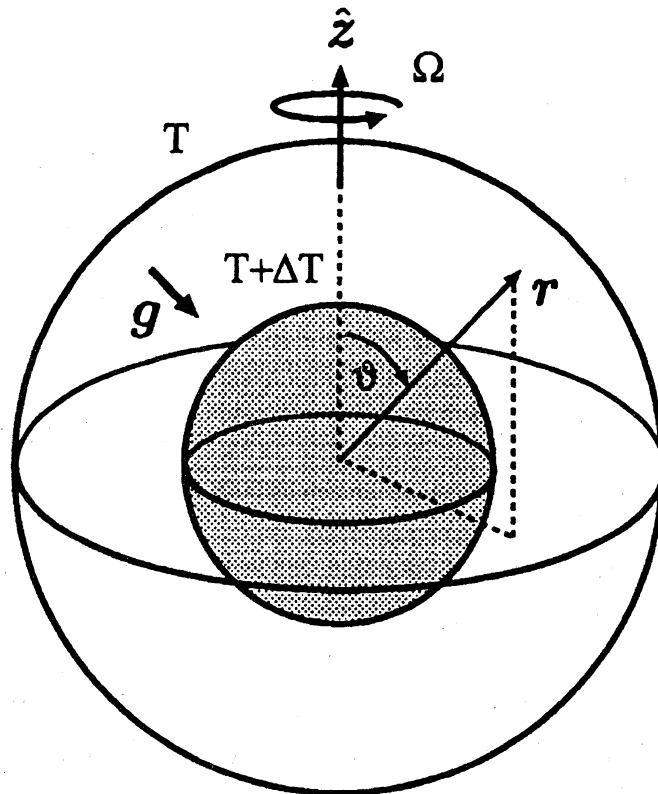


図 1：回転球殻熱対流モデル

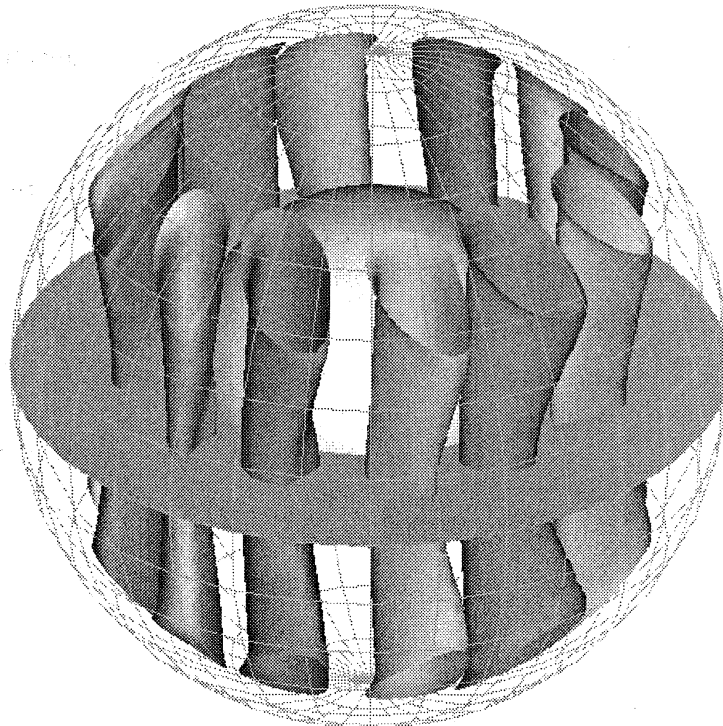


図 2：ダイナモシミュレーションの初期条件

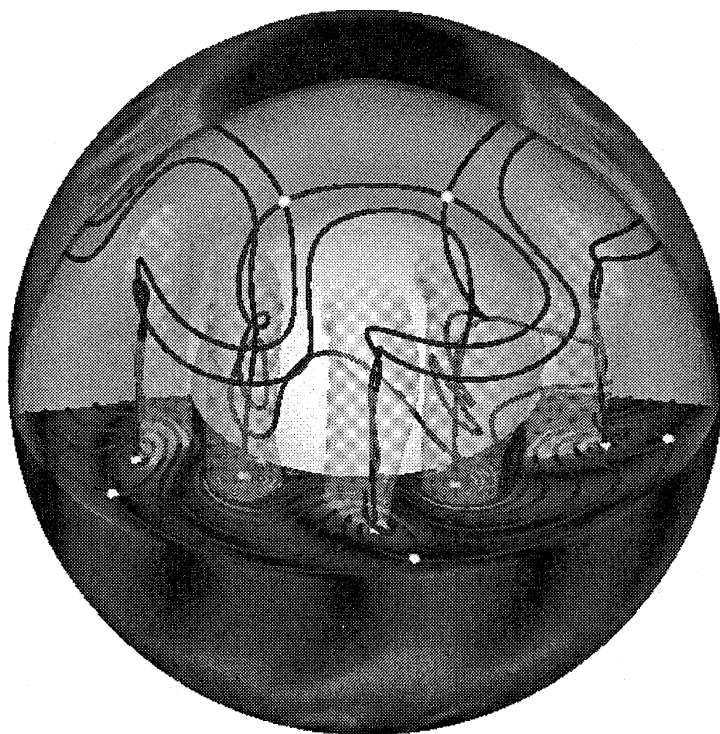


図 3 : (a) 流れ場の 3 次元構造

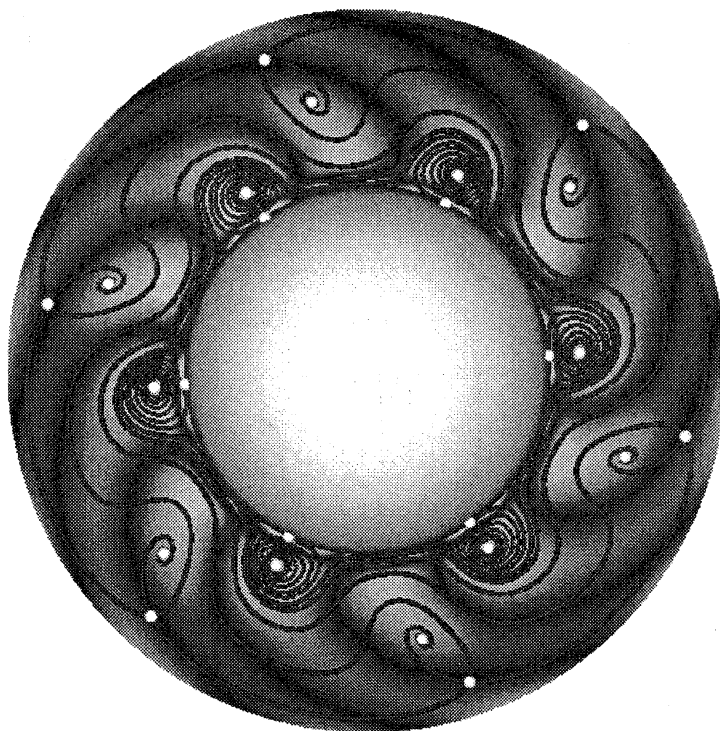


図 3 : (b) 赤道面内の流れ場の構造



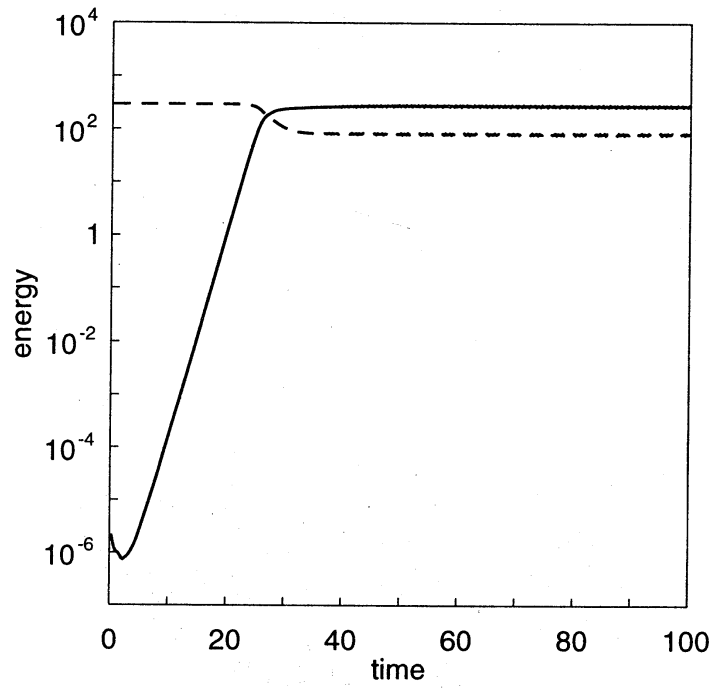


図 4 : 運動エネルギー及び磁気エネルギーの時間発展

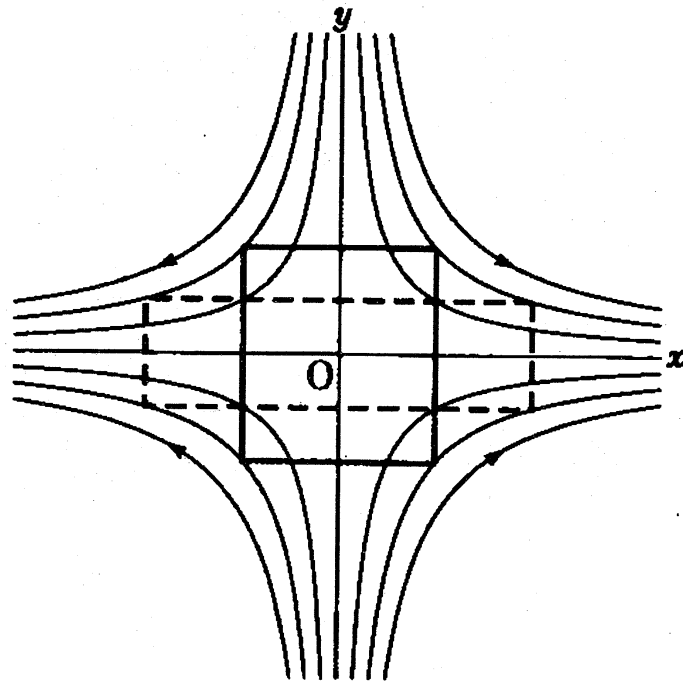


図 5 : 双曲的淀み点近傍の流体要素の変形

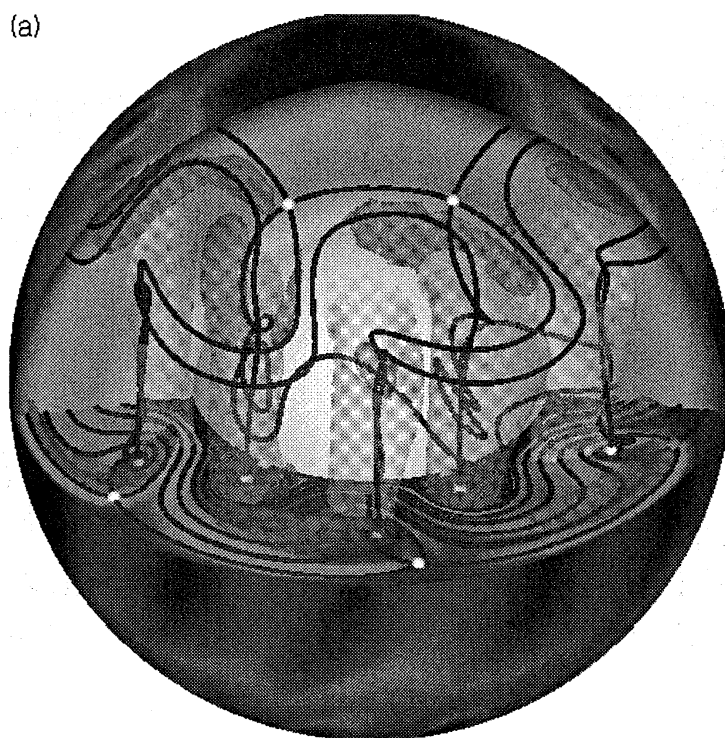


図 6 : (a) 線形成長段階の 3 次元磁場構造

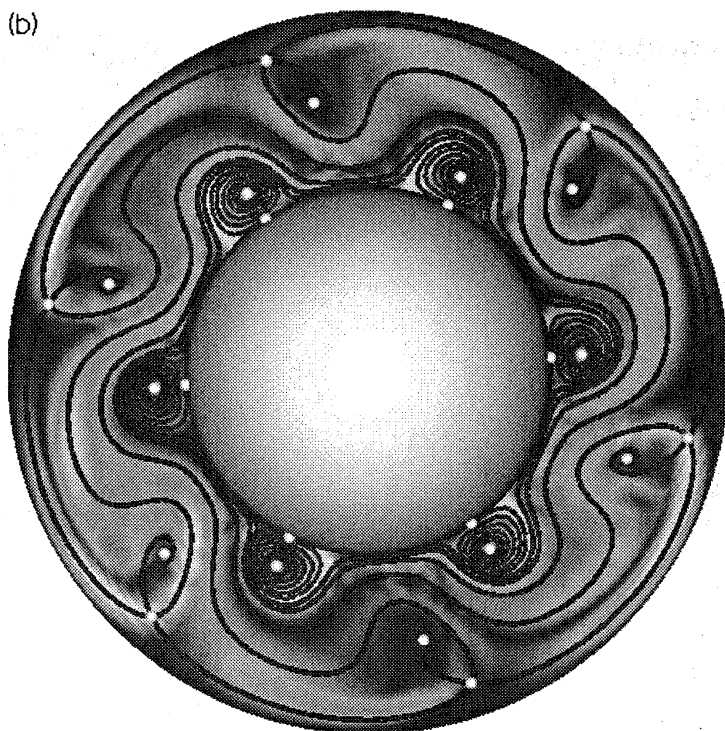


図 6 : (b) 線形成長段階における赤道面内の磁場構造

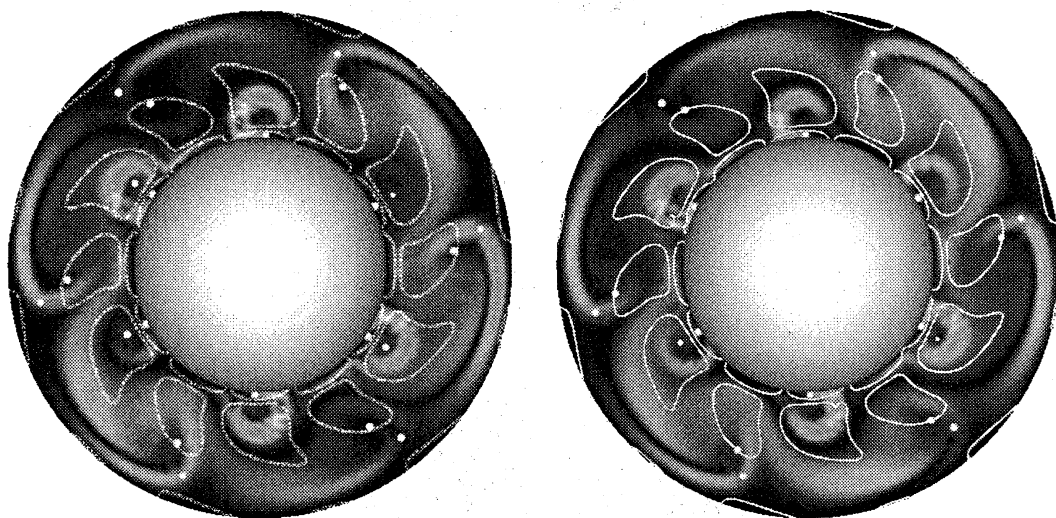
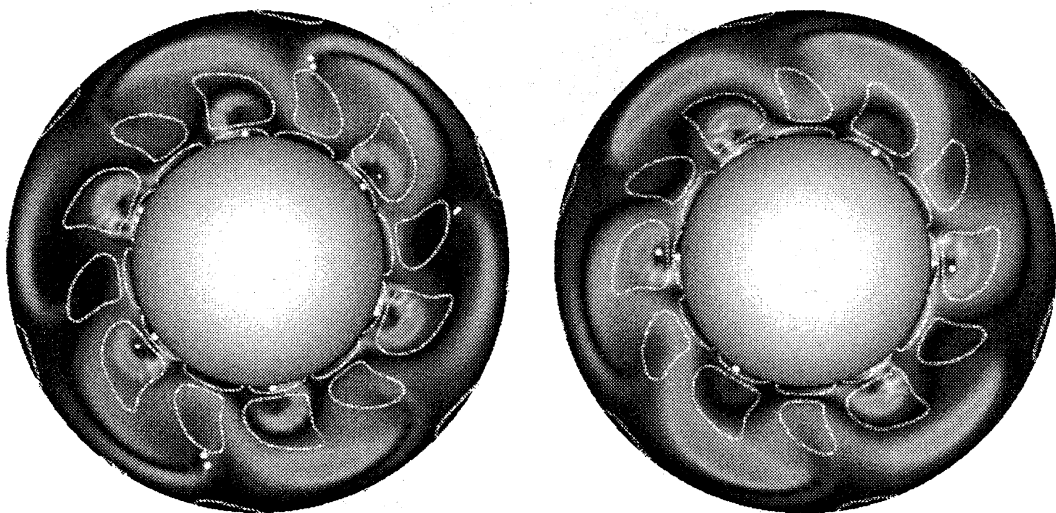
(a)  $t = 25$ (b)  $t = 25.5$ (c)  $t = 26$ (d)  $t = 26.5$ 

図 7 : 遷移段階における赤道面内の流れ場と磁場構造の変化