

量子ホワイトノイズによる量子確率共鳴現象

早大理工 湯浅 一哉* (Kazuya YUASA)
今福 健太郎† (Kentaro IMAFUKU)

概要

周期的外力が加えられたスピン・ボゾン系における量子確率共鳴現象について, Accardi *et al.* の確率極限近似の方法によって導入される量子ホワイトノイズを用いて解析を行う. 環境ボゾン系と相互作用しているスピン系の, 周期的外力に対する応答の SN 比の温度依存性がある適当な温度のところに最大値をもつことを確認することで, この系における確率共鳴現象の可能性が示される. また, パラメータによってはスピン系が全く応答しなくなる温度が存在しうることが明らかとなる. これらの現象においては, 環境系との相互作用にともなうスピン系の振動数の補正—Lamb シフト—の温度依存性が重要な役割を担っている.

1 はじめに

ノイズが, 信号をかき消すことなく, かえってそれを増幅するという一見矛盾した現象—確率共鳴現象 (stochastic resonance)—が発見され, 注目を集めている [1, 2]. その特徴は,

- (i) ある適当な強度 N_R のノイズを加えると (あるいは, ある適当な温度 T_R で), 周波数 Ω の入力に対する系の応答のパワー・スペクトルが, 周波数 Ω のところに主たるピークをもつ.
- (ii) ノイズレベルに対する応答の大きさの比—SN 比 (Signal-to-Noise ratio)—のノイズ強度 (温度) に対する振る舞いが, $N_R (T_R)$ のところに最大値をもつ.

とまとめられるが, 一言でいえば, “適当な” 強度のノイズの助けによって信号が増幅されるという現象である. この現象は氷河期と間氷期の周期的な移り変わりの問題をはじめ, 化学反応系, ザリガニの尾の神経系などさまざまな分野で発見され, 幅広く興味を惹いている.

確率共鳴現象は量子スケールにおいても起こるか—量子確率共鳴現象 (quantum stochastic resonance) [1]?—これがここでの主題である. その際に問題となるのは, 量子力学の枠内で “ノイズ” を導入しなければならないということである. “量子ノイズ”, もしくは, “量子系における散逸現象の記述” の問題それ自体, 大変興味深いテーマである. これらの概念は, 量子力学における基本的な問題に対して非常に重要であると考えられる. 例えば, 実験的に観測されているスピン緩和現象の記述, 位相相関の喪失—デコヒーレンス—の問題, (それが重要であろう) 観測問題などである. しかし, 因果的なユニタリ—時間発展によって支配される理論として書かれている量子力学において, これらの概念を導入することはそれほど簡単ではない. そのような中であってもっとも有名な方法の一つは, 無限の自由度をもついわゆる “環境系” (あるいは “熱浴”) を導入し, (“注目している系” の) 物理量を計算する際には, 詳細を

*Email: yuasa@hep.phys.waseda.ac.jp

†Email: imafuku@mn.waseda.ac.jp

知る必要のない環境の自由度について“部分トレース”をとるという方法であろう [3, 4, 5]. 環境との相互作用によって“散逸”を実現し, “量子揺動散逸定理”と呼ぶにふさわしい関係式を通じて“量子ノイズ”を導入しようというのである.

また, 熱平衡状態へと緩和していく量子ダイナミクスも興味深いテーマである. van Hove 極限 [van Hove limit: 弱結合極限 (weak coupling limit)+ 時間の粗視化 (coarse-graining in time)] [6] の下で, 熱浴と相互作用する系が正準分布で特徴づけられる熱平衡状態へ向かうことはよく知られているが [7], この極限を取り扱う一つの枠組みが Accardi *et al.* によって確立され, “確率極限近似” (stochastic limit approximation) と呼ばれている [8, 9]. この近似の下で, 熱平衡状態にあるボゾン系と相互作用するスピン系が熱平衡状態へと緩和することが, 第3節において確認されよう. また, この枠組みでは, 熱浴との相互作用にともなう系の振動数の補正—Lamb シフト—の温度依存性といった, 量子散逸現象における重要な性質を議論することができる点も興味深い.

ここでは, この確率極限近似によって導入される量子ノイズに注目し, これによって引き起こされる量子確率共鳴現象を議論していく. そこでは, 振動数補正の温度依存性が重要な役割を果たしている.

2 スピン・ボゾン系

以下で取り扱うモデルを説明しよう [1, 5, 10]. ここでは, 二安定系における確率共鳴現象を考えることにする (図 1). すなわち, 二つの安定状態をもつポテンシャル中をノイズ (ランダム力) の影響を受けながら運動する粒子の, 周期的外力 (振動数 Ω) に対する応答を見るのである. ノイズが存在しない場合, その摂動の振幅が小さいと, 左側の安定状態にいる粒子は障壁を越えて右側の安定状態へと遷移することができない [図 1(a)]. ここにノイズを加えると, 粒子が山を越える可能性が出てくるが [図 1(b),(c)], ここで肝要なのは, ただ越えるというのではなく, ノイズ強度が適当な大きさの場合に, 周期的摂動に追従して二状態間を行き来するようになるということである [図 1(b)]. これが確率共鳴現象である. ノイズが強すぎてもいけない. 振動数 Ω という入力信号はかき乱されてしまう [図 1(c)]. 以上のような振る

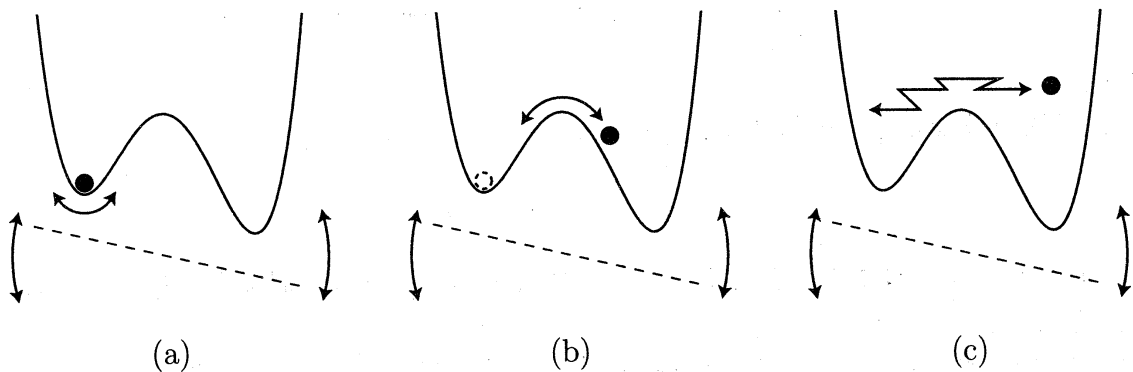


図 1: ノイズ強度 N (温度 T) を (a) 小さく, (b) 適当に, (c) 大きくした際の系の応答.

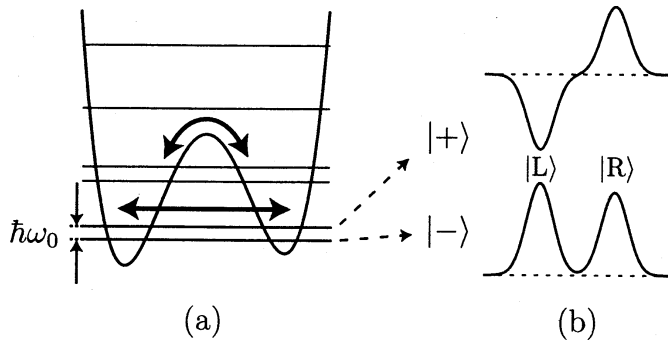


図 2: (a) エネルギー・スペクトルと, (b) 基底状態 $|-\rangle$, 第一励起状態 $|+\rangle$ の波動関数.

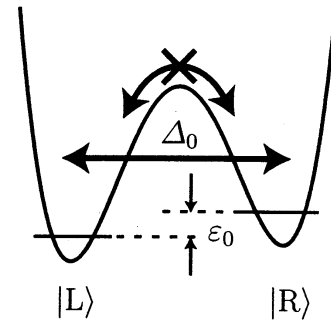


図 3: 二準位系.

舞いを要約すると, 第 1 節の冒頭にまとめた二項目になろう.

この系を量子力学的に扱うことを考えよう. ただし, 摂動がない場合の系のエネルギーは図 2(a) のように離散的であるが, 極低温で第二励起状態より上への熱揺らぎによる励起が無視できるような状況を考えることにする. この場合, 系の時間発展は基底状態 $|-\rangle$ と第一励起状態 $|+\rangle$ の二状態ですべて記述できることになる. また, それらの状態 $|\pm\rangle$ は, 障壁が十分高いような場合に “左, 右の安定状態に局在した状態” と呼ぶにふさわしい $|L\rangle, |R\rangle$ を, 対称, 反対称に重ね合わせた状態である [図 2(b)]. そこで, これらの $|L\rangle, |R\rangle$ を基底として, 摂動がない場合の系のハミルトニアン H_S を, 次の形に書き下すことにする.

$$H_S = \frac{1}{2}\epsilon_0\sigma_3 + \frac{1}{2}\Delta_0\sigma_1. \quad (2.1)$$

本質的にスピン系のハミルトニアンである. ここで, $\sigma_3 = |R\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L|$, $\sigma_1 = |R\rangle\langle L| + |L\rangle\langle R|$ であり, ϵ_0 は状態 $|R\rangle$ と $|L\rangle$ とのエネルギー差, Δ_0 は $|R\rangle, |L\rangle$ 間のトンネル確率を特徴づけるパラメータである (図 3). もちろん, $|\pm\rangle$ を基底として書くと H_S は対角化され,

$$H_S = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 (|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|), \quad \hbar\omega_0 = \sqrt{\epsilon_0^2 + \Delta_0^2} \quad (2.2)$$

である.

また, 周期的摂動は, その振幅を W_0 として,

$$W = W_0\sigma_3 \sin\Omega t \quad (2.3)$$

のハミルトニアンで与えることにする. $\sigma_3 = |R\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L|$ は位置変数に相当する演算子であることを注意しよう.

さらに, 第 1 節で述べたように “環境” を導入する. ここではボゾンの集まり

$$H_B = \int dk \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k, \quad [a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k - k') \quad (2.4)$$

を環境として採用し、注目するスピン系と、相互作用ハミルトニアン

$$\lambda V = i\hbar\lambda\sigma_3 \int dk (g_k a_k^\dagger - g_k^* a_k) \quad (2.5)$$

を通じて相互作用するものとする。後ほど弱結合極限をとる都合上、結合の強さを表すパラメータ λ を入れておいた。

すなわち、我々が取り扱うモデルは、

$$H = H_0 + \lambda V + W, \quad H_0 = H_S + H_B \quad (2.6)$$

である。そして、周期的摂動 W に対する系の応答としては、左右の安定状態間の行き来を見るべく、 σ_3 の振る舞いを調べることになる。また、二安定状態間の遷移はトンネリングのみにより、障壁を超えての遷移はないことに注意しよう (図3)。

3 確率極限近似

つづいて、摂動がない場合 ($W = 0$) について、Accardi *et al.* の確率極限近似の方法を説明しよう [9]。出発点は相互作用描像の Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_I^{(\lambda)}(t) = \lambda V_I(t) U_I^{(\lambda)}(t), \quad U_I^{(\lambda)}(0) = 1, \quad (3.1)$$

$$V_I(t) = i\hbar \sum_{\alpha} (D_{\alpha} A_{\alpha}^{\dagger}(t) - D_{\alpha}^{\dagger} A_{\alpha}(t)) \quad (3.2)$$

である。ただし、 α は $\alpha = \{+, -, 0\}$ をとり、 D_{α} は注目スピン系の演算子で

$$D_+ = |+\rangle\langle -| = D_-^{\dagger}, \quad D_0 = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| = H_S/\hbar\omega_0, \quad (3.3)$$

$A_{\alpha}(\tau)$ は環境ボゾン系の演算子で

$$A_{\pm}(t) = -\frac{\Delta_0}{\hbar\omega_0} \int dk g_k^* a_k e^{-i(\omega_k \pm \omega_0)t}, \quad A_0(t) = -\frac{\varepsilon_0}{\hbar\omega_0} \int dk g_k^* a_k e^{-i\omega_k t} \quad (3.4)$$

である。さて、この方程式において van Hove 極限をとる。まず、 $t \mapsto \tau = \lambda^2 t$ と時間スケールの変換をし、 $\lambda \rightarrow 0$ の極限をとるのである。つまり、弱結合極限と時間の粗視化とを同時に行うのである。Schrödinger 方程式 (3.1) に時間スケール変換 $t = \tau/\lambda^2$ を施すと

$$\frac{d}{d\tau} U_I^{(\lambda)}(\tau/\lambda^2) = \sum_{\alpha} \left(D_{\alpha} \frac{1}{\lambda} A_{\alpha}^{\dagger}(\tau/\lambda^2) - D_{\alpha}^{\dagger} \frac{1}{\lambda} A_{\alpha}(\tau/\lambda^2) \right) U_I^{(\lambda)}(\tau/\lambda^2) \quad (3.5)$$

であるが、極限 $\lambda \rightarrow 0$ の下で $U_I^{(\lambda)}(\tau/\lambda^2) \rightarrow U_I(\tau)$, $A_{\alpha}(\tau/\lambda^2)/\lambda \rightarrow b_{\alpha}(\tau)$ がある意味において存在することが示されており [8]、その意味において、van Hove 極限をとった Schrödinger 方程式を

$$\frac{d}{d\tau} U_I(\tau) = \sum_{\alpha} \left(D_{\alpha} b_{\alpha}^{\dagger}(\tau) - D_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha}(\tau) \right) U_I(\tau) \quad (3.6)$$

と書くことにする.

ここで, 環境系の演算子 $b_\alpha(\tau)$, $b_\alpha^\dagger(\tau)$ の交換関係について触れておこう.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\lambda} A_\alpha(\tau/\lambda^2), \frac{1}{\lambda} A_{\alpha'}^\dagger(\tau'/\lambda^2) \right] \\ &= C_{\alpha\alpha'} \frac{1}{\lambda^2} \int dk |g_k|^2 e^{-i(\omega_\alpha - \omega_{\alpha'})(\tau + \tau')/2\lambda^2} e^{-i\{\omega_k + (\omega_\alpha + \omega_{\alpha'})/2\}(\tau - \tau')/\lambda^2} \\ &\rightarrow 2C_{\alpha\alpha'} J(-\omega_\alpha) \delta_{\alpha\alpha'} \delta(\tau - \tau') \quad \text{as } \lambda \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

により (ただし, $\omega_\alpha = \{\omega_0, -\omega_0, 0\}$, $C_{\alpha\alpha'}$ は $\varepsilon_0/\hbar\omega_0$, $\Delta_0/\hbar\omega_0$ からなる定数),

$$[b_\alpha(\tau), b_{\alpha'}^\dagger(\tau')] = \gamma_\alpha \delta_{\alpha\alpha'} \delta(\tau - \tau'), \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_- = (\Delta_0/\hbar\omega_0)^2 J(\omega_0), \quad \gamma_+ = \gamma_0 = 0 \quad (3.9)$$

である. ここで, $J(\omega)$ は

$$J(\omega) = \pi \int dk |g_k|^2 \delta(\omega_k - \omega) \quad (3.10)$$

で与えられ, スペクトル関数と呼ばれている. この交換関係 (3.8) は, 異なる時刻の $b_\alpha(\tau)$ が可換であることを示しており, すなわち, 確率過程の言葉でいうところの Markov 性を表している. この意味で, 環境の演算子 $b_\alpha(\tau)$ は “量子ホワイトノイズ” と呼ぶにふさわしいであろう. それはひとえに, 時間の粗視化 $t \mapsto \tau = \lambda^2 t$ ($\lambda \rightarrow 0$) を行い, 相関時間が見えない時間スケールに移行したことによっている. もちろん, “ノイズ” と呼ぶのは, スピン系に特徴的な振動数が新しい τ の時間スケールにおいて有意な有限値をもつ, すなわち, $\omega_R = \omega_0/\lambda^2$ が有限の値をもつものとしているからである.

さて, 注目しているスピン系の演算子 D_α の時間発展を考えよう. その Heisenberg 描像の演算子 $D_\alpha(\tau)$ は $U_I(\tau)$ を用いて $D_\alpha(\tau) = U_I^\dagger(\tau) D_\alpha e^{i\omega_\alpha \tau/\lambda^2} U_I(\tau)$ と書かれるが, 環境の詳細には興味がないので, その状態についての平均をとってしまうことを考える. ただし, 時刻 $\tau = 0$ においてはスピン系と環境系との間に相関はないものとし, かつ, 環境の初期状態は温度 T の熱平衡状態 $\rho_{\text{th}} = e^{-\beta H_B}/Z$ であるとする ($\beta = 1/kT$ で k は Boltzmann 定数, Z は規格化定数である), それは

$$D_\alpha^\theta(\tau) = \text{tr}_B \left(\rho_{\text{th}} U_I^\dagger(\tau) D_\alpha e^{i\omega_\alpha \tau/\lambda^2} U_I(\tau) \right) \quad (3.11)$$

を与える. ここで, tr_B は環境の自由度についてのトレースをとることを意味し, これがいわゆる “部分トレース” の処方である. このとき, $D_\alpha^\theta(\tau)$ は依然として演算子であることに注意.

この $D_\alpha^\theta(\tau)$ の時間発展を決める方程式は, Schrödinger 方程式 (3.6) をもとに, 次のようにして得られる. 簡単のため, 環境の初期温度が $T = 0$ の場合を考える. Schrödinger 方程式 (3.5) の形式解

$$U_I^{(\lambda)}(\tau/\lambda^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_0^\tau d\tau_1 \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n \frac{1}{\lambda} V_I(\tau_1/\lambda^2) \cdots \frac{1}{\lambda} V_I(\tau_n/\lambda^2) \quad (3.12)$$

から,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\lambda} A_\alpha(\tau/\lambda^2), U_I^{(\lambda)}(\tau/\lambda^2) \right] \\ &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau d\tau_1 \left[\frac{1}{\lambda} A_\alpha(\tau/\lambda^2), \frac{1}{\lambda} V_I(\tau_1/\lambda^2) \right] U_I^{(\lambda)}(\tau_1/\lambda^2) + \dots \\ &\rightarrow C_{\alpha\alpha} \gamma(-\omega_\alpha) D_\alpha U_I(\tau) \quad \text{as } \lambda \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

が得られる. すなわち,

$$[b_\alpha(\tau), U_I(\tau)] = C_{\alpha\alpha} \gamma(-\omega_\alpha) D_\alpha U_I(\tau) \quad (3.14)$$

である. ここで, $\gamma(\omega)$ は

$$\gamma(\omega) = J(\omega) - iI(\omega), \quad I(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{J(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (3.15)$$

で与えられる. これに気をつけて $b_\alpha(\tau)$ と $U_I(\tau)$ を入れ換えていくと, $T=0$ の場合の $D_\alpha^\theta(\tau)$ [= $D_\alpha^{(0)}(\tau)$] に対する方程式が得られる.

$$\frac{d}{d\tau} D_\pm^{(0)}(\tau) = -\left(\frac{1}{2}\gamma \mp i\omega_R^{(0)}\right) D_\pm^{(0)}(\tau), \quad \frac{d}{d\tau} D_0^{(0)}(\tau) = -\gamma D_0^{(0)}(\tau) - \gamma. \quad (3.16)$$

ただし,

$$\omega_R^{(0)} = \omega_R - \sigma, \quad \sigma = \left(\frac{\Delta_0}{\hbar\omega_0}\right)^2 (I(\omega_0) - I(-\omega_0)). \quad (3.17)$$

TFD のテクニック [11] を用いるなどすると, 有限温度の場合に関しても同様にして得られ,

$$\frac{d}{d\tau} D_\pm^\theta(\tau) = -\left(\frac{1}{2}\gamma^\theta \mp i\omega_R^\theta\right) D_\pm^\theta(\tau), \quad \frac{d}{d\tau} D_0^\theta(\tau) = -\gamma^\theta D_0^\theta(\tau) - \gamma. \quad (3.18)$$

ただし, それぞれが温度依存性をもって,

$$\frac{1}{2}\gamma^\theta = \left(\frac{\Delta_0}{\hbar\omega_0}\right)^2 \coth \frac{1}{2}\beta\hbar\omega_0 J(\omega_0), \quad \omega_R^\theta = \omega_R - \sigma^\theta, \quad (3.19)$$

$$\sigma^\theta = \left(\frac{\Delta_0}{\hbar\omega_0}\right)^2 (I^\theta(\omega_0) - I^\theta(-\omega_0)), \quad I^\theta(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \coth \frac{1}{2}\beta\hbar\omega' \frac{J(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (3.20)$$

と変更を受けている. 方程式 (3.18) は直ちに解けて,

$$D_\pm^\theta(\tau) = D_\pm e^{-(\gamma^\theta/2 \mp i\omega_R^\theta)\tau}, \quad D_0^\theta(\tau) = \left(D_0 + \tanh \frac{1}{2}\beta\hbar\omega_0\right) e^{-\gamma^\theta\tau} - \tanh \frac{1}{2}\beta\hbar\omega_0 \quad (3.21)$$

を得る.

環境との相互作用の影響で, 緩和定数 γ^θ とともに, 振動数に対する補正 σ^θ —Lamb シフト—が現れている点が興味深い. そして, これらはいずれも式 (3.10) のスペクトル関数 $J(\omega)$ を用いて与えられている. 部分トレースをとることによって環境の自由度を見えなくしてしまったが, 環境との相互作用の影響はすべて $J(\omega)$ に込められているのである.

また, 解 (3.21) の長時間極限 $D_0^\theta(\tau) \rightarrow -\tanh(\beta\hbar\omega_0/2)$, $D_\pm^\theta(\tau) \rightarrow 0$ は, $(D_0^\theta(\tau), D_\pm^\theta(\tau))$ が演算子であるにもかかわらず) いずれも c-数である. このことは, スピン系の状態が初期状態

によらない状態に向かうことを意味している (スピン系の任意の物理量に関して, その期待値の長時間極限值は初期状態によらない). しかも, その極限は温度 T の熱平衡状態なのである. 実際, $D_\alpha^\theta(\tau)$ の期待値 $\langle D_\alpha^\theta(\tau) \rangle$ からスピン系の密度演算子 $\rho_S(\tau) = \text{tr}_B \rho(\tau)$ ($\rho(\tau)$ は全系の密度演算子) の行列要素 $\langle -|\rho_S(\tau)|+, \langle \pm|\rho_S(\tau)|\pm \rangle$ を求めることができ, 解 (3.21) から直ちに

$$\langle -|\rho_S(\tau)|+ \rangle = \langle D_+(\tau) \rangle \rightarrow 0, \quad (3.22)$$

$$\langle \pm|\rho_S(\tau)|\pm \rangle = \frac{1}{2} \left(1 \pm \langle D_0^\theta(\tau) \rangle \right) \rightarrow \frac{e^{\mp\beta\hbar\omega_0/2}}{e^{\beta\hbar\omega_0/2} + e^{-\beta\hbar\omega_0/2}} \quad (3.23)$$

が得られるが, これはまさに, デコヒーレンス (3.22) を経て, 系が熱平衡状態に達する

$$\rho_S(\tau) \rightarrow e^{-\beta H_S} / \text{tr}_S e^{-\beta H_S} \quad (3.24)$$

ことを示している.

4 量子確率共鳴現象

いよいよ周期的摂動 W を加えて, 量子確率共鳴現象の議論に入ろう. 左右の二安定状態間の行き来を見るオーダーパラメータである

$$\sigma_3^\theta(\tau) = \text{tr}_B \left(\rho_{\text{th}} U_I^\dagger(\tau) e^{iH_0\tau/\lambda^2} \sigma_3 e^{-iH_0\tau/\lambda^2} U_I(\tau) \right) \quad (4.1)$$

(Heisenberg 演算子の部分トレースをとったもの) の振る舞い—周期的摂動に対する系の応答—を前節の方法にしたがって計算し, その SN 比の温度依存性を見ることで, 量子確率共鳴現象を確認することにする.

ハミルトニアンは式 (2.6) で与えられ, 相互作用描像の Schrödinger 方程式は

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_I^{(\lambda)}(t) = (\lambda V_I(t) + W_I(t)) U_I^{(\lambda)}(t), \quad U_I^{(\lambda)}(0) = 1, \quad (4.2)$$

$$W_I(t) = W_0 \left[\frac{\varepsilon_0}{\hbar\omega_0} D_0 - \frac{\Delta_0}{\hbar\omega_0} \left(D_+ e^{i\omega_0 t} + D_- e^{-i\omega_0 t} \right) \right] \sin\Omega t \quad (4.3)$$

である. ここで, 前節の手続きにしたがって van Hove 極限 ($t \mapsto \tau = \lambda^2 t, \lambda \rightarrow 0$) を施した方程式を

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} U_I(\tau) &= \sum_\alpha \left(D_\alpha b_\alpha^\dagger(\tau) - D_\alpha^\dagger b_\alpha(\tau) \right) U_I(\tau) \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} W_R \left[\frac{\varepsilon_0}{\hbar\omega_0} D_0 - \frac{\Delta_0}{\hbar\omega_0} \left(D_+ e^{i\omega_R \tau} + D_- e^{-i\omega_R \tau} \right) \right] \sin\Omega_R \tau U_I(\tau) \end{aligned} \quad (4.4)$$

と書く. ただし, 時間スケール変換にともなって, $\omega_R = \omega_0/\lambda^2, \Omega_R = \Omega/\lambda^2, W_R = W_0/\lambda^2$ と変更した. 物理的には, これらの量が有意な値をもつものとする.

やはり前節と同様にすると, スピン系の演算子 $D_\alpha^\theta(\tau)$ に対する方程式が

$$\frac{d}{d\tau} D_\pm^\theta(\tau) = - \left(\gamma^\theta \mp i\omega_R^\theta \right) D_\pm^\theta(\tau) \pm \frac{2i}{\hbar} W_R \left(\frac{\varepsilon_0}{\hbar\omega_0} D_\pm^\theta(\tau) + \frac{1}{2} \frac{\Delta_0}{\hbar\omega_0} D_0^\theta(\tau) \right) \sin\Omega_R \tau, \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{d\tau} D_0^\theta(\tau) = -\gamma^\theta D_0^\theta(\tau) - \gamma + \frac{2i}{\hbar} W_R \frac{\Delta_0}{\hbar\omega_0} (D_+^\theta(\tau) - D_-^\theta(\tau)) \sin\Omega_R\tau \quad (4.6)$$

と得られる。ただ、これを厳密に解くのは困難なので、ここでは摂動論が有効であるものと想定し(第2節の冒頭で紹介したように、もともと確率共鳴現象では、小さな摂動に対する応答に興味がある)、 $O(W_R)$ までの近似解を求めた。その定常解 ($\tau \gg 1/\gamma^\theta$ における振る舞い)は、

$$D_\pm^\theta(\tau) \rightarrow \mp \frac{i}{2\hbar} W_R \frac{\Delta_0}{\hbar\omega_0} \tanh \frac{1}{2} \beta \hbar \omega_0 \left[\frac{1}{(\omega_R^\theta - \Omega_R) \pm i\gamma^\theta} e^{\pm i\Omega_R\tau} - \frac{1}{(\omega_R^\theta + \Omega_R) \pm i\gamma^\theta} e^{\mp i\Omega_R\tau} \right], \quad (4.7)$$

$$D_0^\theta(\tau) \rightarrow -\tanh \frac{1}{2} \beta \hbar \omega_0 \quad (4.8)$$

である。これらの $D_\alpha^\theta(\tau)$ を組み合わせると、オーダーパラメータである $\sigma_3^\theta(\tau)$ の定常的振る舞いが得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_3^\theta(\tau) &= \frac{\varepsilon_0}{\hbar\omega_0} D_0^\theta(\tau) - \frac{\Delta_0}{\hbar\omega_0} (D_+^\theta(\tau) + D_-^\theta(\tau)) \\ &\rightarrow -\frac{\varepsilon_0}{\hbar\omega_0} \tanh \frac{1}{2} \beta \hbar \omega_0 + \frac{1}{\hbar} W_R A^\theta(\Omega_R) \sin(\Omega_R\tau - \phi^\theta(\Omega_R)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

ただし、応答の振幅 $A^\theta(\Omega_R)$ と位相の遅れ $\phi^\theta(\Omega_R)$ は

$$A^\theta(\Omega_R) = \frac{2(\Delta_0/\hbar\omega_0)^2 \omega_R^\theta}{\sqrt{(\omega_R^\theta{}^2 - \Omega_R^2 + \gamma^{\theta 2})^2 + (2\gamma^\theta \Omega_R)^2}} \tanh \frac{1}{2} \beta \hbar \omega_0, \quad (4.10)$$

$$\tan \phi^\theta(\Omega_R) = \frac{2\gamma^\theta \Omega_R}{\omega_R^\theta{}^2 - \Omega_R^2 + \gamma^{\theta 2}} \quad (4.11)$$

で与えられる。この $\sigma_3^\theta(\tau)$ が周期的摂動に対する系の応答である。

さて、

$$R^\theta(\Omega_R) = |A^\theta(\Omega_R)|/\gamma^\theta \quad (4.12)$$

で定義される SN 比の温度依存性を見てみよう。 $R^\theta(\Omega_R)$ がある適当な温度のところで最大値をとるならば、量子確率共鳴現象が確認できたといってよいであろう。その入力振動数 Ω_R に対する依存性は単純である。式(4.10)の $A^\theta(\Omega_R)$ の分母の根号内が最小値をとるときに最大値をとる。具体的には、 $\omega_R^\theta > \gamma^\theta$ の場合に $\Omega_R = \sqrt{\omega_R^\theta{}^2 - \gamma^{\theta 2}}$ で共鳴する。しかし、温度依存性となるとそう簡単ではない。式(3.20)で与えられる振動数補正 σ^θ の温度依存性が大きなカギを握っている。

その依存性は、どのような環境との相互作用を想定するのか、すなわち $J(\omega)$ の関数形に大きく依存することになる。ここでは、その $J(\omega)$ の具体形として図4(b)のような分布を仮定して行った解析を示そう。現実的には図4(a)のように、スピン系と相互作用する環境ボゾン系の分布には上限—カットオフ—が存在するであろう。しかし、環境としてのボゾン系の構成は、スピン系の特徴的な振動数である ω_0 に比して十分大きい振動数の成分を多く含んでいらずであるから(そうでなければ、ノイズと呼ぶにふさわしくない)、そのカットオフは ω_0

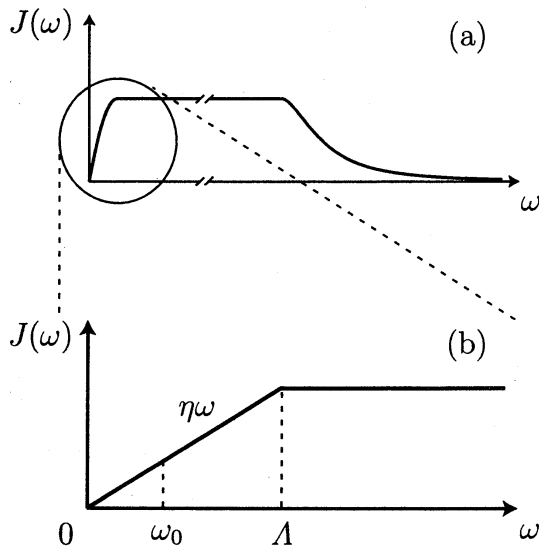


図 4: (a) より現実的なスペクトル関数の概形と, (b) 今回採用したモデルとしての $J(\omega)$.

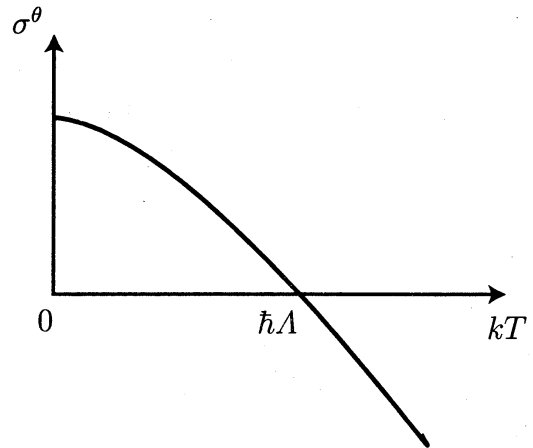


図 5: 振動数補正 σ^θ の温度依存性の概形.

と比べれば無限に大きいとみなしても大きな影響はないであろう. そこで, 図 4(b) のような分布を仮定することにした. ここでは, その $\omega \sim 0$ 付近の形 $J(\omega) = \eta\omega$ から, これで特徴づけられる環境を “Ohmic 環境” と呼ぶことにする. また, この形を採用した場合, $I^\theta(\omega)$ の評価で現れる無限大は σ^θ の評価の際には相殺し, σ^θ は有限値をもつということを付け加えておこう [式 (3.20) の σ^θ の定義式を見よ]. その σ^θ のおおよその関数形は図 5 である.

図 6 に, $R^\theta(\Omega_R)$ の温度 T , η に対する依存性を, 等高線グラフで示す. η を固定して温度の方向に切れば, 温度依存性のグラフが得られるが, η の値によってそのグラフにピークがあったり, なかったりすることがわかるであろう. $\eta = 3.5$ の場合の温度依存性を図 7(a) に示す. ピークがあり, 確率共鳴現象を確認できる. また, 興味深いのは, 例えば $\eta = 0.5$ の場合の温度依存性である [図 7(b)]. $R^\theta(\Omega_R) = 0$ となる温度が存在している. その温度においては, 系は全く応答しないということである. これは, 振動数補正 σ^θ が大きくなり, $\omega_R^\theta = 0$ となったことによる. これもある意味, 共鳴と呼んでもよいかもしれない.

5 まとめ

周期的摂動を加えたスピン・ボゾン系における量子確率共鳴現象について, Accardi *et al.* の確率極限近似による方法によって導入される量子ホワイトノイズを用いて解析を行った.

この量子ホワイトノイズそれ自体, 大変興味深い. 環境系について部分トレースをとることによって, 環境との相互作用の影響はすべてスペクトル関数 $J(\omega)$ に代表され, それを与えられると, スピン系の緩和定数 γ^θ や振動数に対する補正 σ^θ が決まる形になっている. また, スピン系がデコヒーレンスによって熱平衡状態 $\sim e^{-\beta H_S}$ へと向かっていくことも, あからさまに確認することができた.

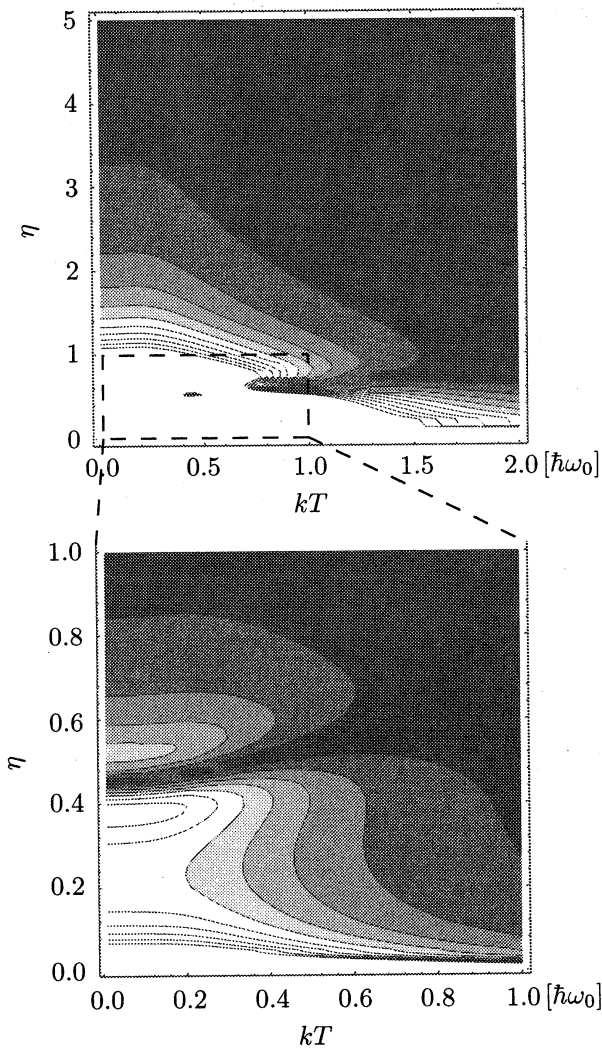


図 6: SN 比 $R^\theta(\Omega_R)$ の温度 T , η 依存性.

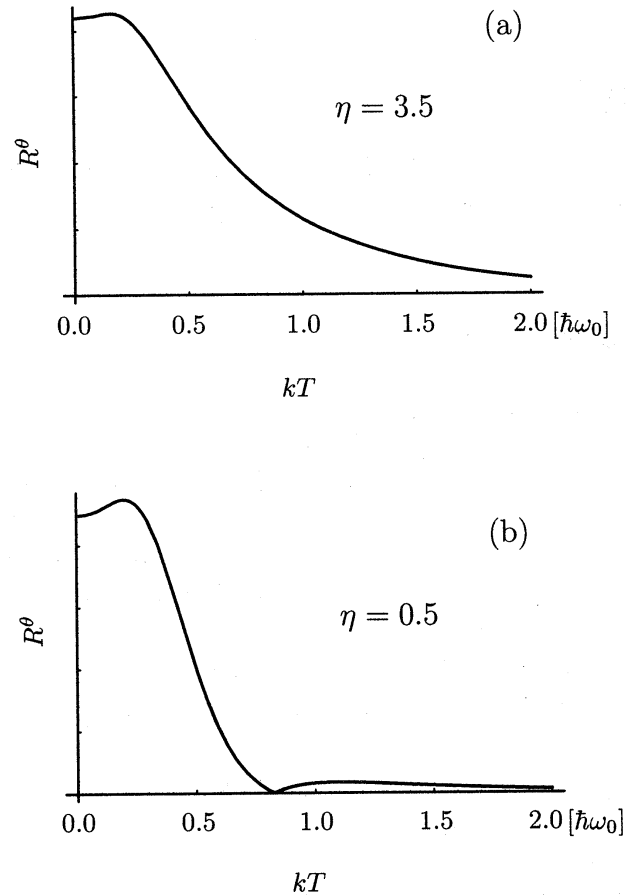


図 7: SN 比 $A^\theta(\Omega_R)$ の温度依存性. (a) $\eta = 3.5$, (b) $\eta = 0.5$.

そして、SN 比の温度、 η 依存性を見て、この系における量子確率共鳴現象の可能性を確認できた。ただし、例えば η の値によって、共鳴が起こったり、起こらなかったりする点に気をつけなければならない。また、普通の意味の確率共鳴現象以外にも、系が全く応答しなくなる温度が存在することが明らかになった。これらの振る舞いは、振動数補正 σ^θ の温度依存性が重要な役割を担っているといえよう。そして、その依存性はスペクトル関数 $J(\omega)$ の形に大きく依存することになる。

最後に、実験的確認の可能性について触れておこう。昨今の実験技術の向上により、空洞内に閉じ込められた電磁場（ボゾン系に対応）と原子（スピン系に対応）との相互作用を調べる Cavity QED で、電磁場のモードの変化（ $J(\omega)$ の変化）に基づいた、原子の不安定状態の寿命の制御に成功している。すなわち、Cavity QED で研究されている系において、何らかの意味でハミルトニアン (2.6) が実現されれば、検証実験への見込みがあるのではないだろうか。

その他, 克服しなければならない技術的困難も少なからず存在するが, 以上のような理由により, 我々はここで扱った問題が十分に実験的検証可能な範囲にあるのではないかと考えている.

謝辞

本研究を発表する場を与えてくださった主催者の方々に, また, 研究集会において温かく声をかけてくださった方々に感謝致します.

参考文献

- [1] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70** (1998) 223.
- [2] 内山 智香子, *パリティ* Vol. 13, No. 06 (丸善, 1998) 20.
- [3] R. P. Feynman and F. L. Vernon, *Ann. Phys.* **24** (1963) 118;
R. P. Feynman and A. R. Hibbs, “量子力学と経路積分” (みすず書房, 1995).
- [4] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Ann. Phys.* **149** (1983) 374; **153** (1984) 445(E); *Physica* **121A** (1983) 587; **130A** (1985) 374(E).
- [5] A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **59** (1987) 1.
- [6] L. van Hove, *Physica* **21** (1955) 517.
- [7] E. B. Davies, *Commun. Math. Phys.* **39** (1974) 91.
- [8] L. Accardi, A. Frigerio and Y. G. Lu, *Commun. Math. Phys.* **131** (1990) 537;
L. Accardi, J. Gough and Y. G. Lu, *Rep. Math. Phys.* **36** (1995) 155.
- [9] L. Accardi, S. V. Kozyrev and I. V. Volovich, *Phys. Rev.* **A56** (1997) 2557.
- [10] M. Grifoni and P. Hänggi, *Phys. Rep.* **304** (1998) 229.
- [11] H. Umezawa, “場の量子論：ミクロ, マクロ, そして熱物理学の最前線” (培風館, 1995).