数理解析研究所講究録
1144 巻 2000 年 92-100

Trace inequalities for multiple products of two matrices

北星学園大・経　安藤　　毅 (Tsuyoshi Ando)
東北大・情報科学研究科　日合　文雄 (Fumio Hiai)
北海道教育大札幌校　大久保和義 (Kazuyoshi Okubo)

1. はじめに

この研究は、C. R. Johnson による次の問題が動機となった。

問題. A, B を $n\times n$ *positive semidefinite* 行列とする。任意の自然数 m に対して、$\mathrm{Tr}(tA+B)^m=\sum_{j=0}^{m}\alpha_j t^j$ とするとき、$\alpha_j\geq 0$ $(0\leq j\leq m)$ がいえるか?

この問題に対しては $n=2$ のときは、任意の非負な実数 $p_1,\cdots,p_k,q_1,\cdots,q_k$ に対して $\mathrm{Tr}(A^{p_1}B^{q_1}\cdots,A^{p_k}B^{q_k})\geq 0$ がいえるの (Theorem 4.1 参照) で肯定的であるが、$n\geq 3$ に関しては、まだ、解決していない。

これらの問題に関して、いくつかの例を考えると、別な問題として、いずれの場合も$\sum_{i=1}^{k}p_i=\sum_{i=1}^{k}q_i=1$ のとき

$$|\mathrm{Tr}(A^{p_1}B^{q_1}\cdots,A^{p_k}B^{q_k})|\leq \mathrm{Tr}(AB) \tag{1.1}$$

となっていることに気がついた。このことにより、A, B の多重積に関するトレース不等式の研究を始めた。しかし、$n=3$ の場合でもこれらの不等式の考察はそんなに簡単ではない。

行列のトレースの不等式については、行列の固有値 (あるいはその絶対値、または特異値) の間に成り立つ log majorization 関係が大きな役割を果たす ([1],[4],[10] 参照)。$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 0$, $b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n\geq 0$ を満たす 2 つの実ベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ に対して、log majorization $\vec{a}\prec_{(\log)}\vec{b}$ を

$$\prod_{i=1}^{k}a_i\leq\prod_{i=1}^{k}b_i \quad \text{for} \quad 1\leq k\leq n$$

かつ、$k=n$ で等号が成り立つことと定義する。$\vec{a}\prec_{(\log)}\vec{b}$ のとき、weak majorization $\vec{a}\prec_w\vec{b}$ すなわち、

$$\sum_{i=1}^{k}a_i\leq\sum_{i=1}^{k}b_i \quad \text{for} \quad 1\leq k\leq n$$

が成り立つことはよく知られている。

$n\times n$ positive semidefinite 行列 A に対して、

$$\vec{\lambda}(A)=(\lambda_1(A),\lambda_2(A),\ldots,\lambda_n(A))$$

で$\lambda_1(A)\geq\lambda_2(A)\geq\cdots\geq\lambda_n(A)\geq 0$ の順に並べた A の固有値のベクトルとする。行列 X が非負な固有値をもつ場合も、同じ記号 $\vec{\lambda}(X)$ を用いる。さらに、任意の $n\times n$ 行列 X に対して

$$|\vec{\lambda}(X)|=(|\lambda_1(X)|,|\lambda_2(X)|,\ldots,|\lambda_n(X)|)$$

ただし、$\lambda_1(X), \ldots, \lambda_n(X)$ は $|\lambda_1(X)| \geq |\lambda_2(X)| \geq \cdots \geq |\lambda_n(X)|$ のように並べられた X の固有値とする。

次の Weyl の majorization theorem([4, p. 42] 参照) はよく知られている。

(1.2)
$$|\vec{\lambda}(X)| \prec_{(\log)} \vec{\lambda}(|X|),$$

ここで $|X| = (X^*X)^{\frac{1}{2}}$ とする。

$X, Y \in M_n$ で $\vec{\lambda}(Y)$ が非負なとき、$|\vec{\lambda}(X)| \prec_{(\log)} \vec{\lambda}(Y)$ が成り立てば、$|\mathrm{Tr}(X)| \leq \mathrm{Tr}(Y)$ となることが分かる。実際、

$$|\mathrm{Tr}(X)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(X)| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(Y) = \mathrm{Tr}(Y)$$

となる。

行列の不等式でよく使われる log majorization として、次の Araki's log majorization ([3] 参照) がある。
A, B を $n \times n$ positive semidefinite 行列とするとき、

(1.3)
$$\vec{\lambda}((A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^r) \prec_{(\log)} \vec{\lambda}(A^{\frac{r}{2}}B^rA^{\frac{r}{2}}) \quad \text{for} \quad r \geq 1$$

が成り立つ。このことは

(1.4)
$$\vec{\lambda}((A^{\frac{s}{2}}B^sA^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{s}}) \prec_{(\log)} \vec{\lambda}((A^{\frac{t}{2}}B^tA^{\frac{t}{2}})^{\frac{1}{t}}) \quad \text{for} \quad 0 < s \leq t$$

が成り立つことと同値である。ただし、(1.3), (1.4) で $A^0 = I$ とする。

行列の指数に関する有用な定理として次の Lie-Trotter の公式がある ([4. p.254] 参照)。すなわち、 $X, Y \in M_n$ とするとき、

$$\lim_{k \to \infty} (e^{\frac{X}{k}} e^{\frac{Y}{k}}) = e^{X+Y}$$

がいえる。この公式と Araki's log majorization を用いることにより、Golden-Thompson の不等式

(1.5)
$$\mathrm{Tr}(e^{H+K}) \leq \mathrm{Tr}(e^H e^K)$$

を改良した次の不等式を得る (Hiai-Petz [8])。

(1.6)
$$\mathrm{Tr}(e^{H+K}) \leq \mathrm{Tr}((e^{\frac{t}{2}H}e^{tK}e^{\frac{t}{2}H})^{\frac{1}{t}}) \quad \text{for} \quad t > 0$$

ただし、(1.5),(1.6) で H, K は Hermitian 行列とする。

一方、 A, B が positive semidefinite のとき、

(1.7)
$$\vec{\lambda}(|A^{p_1}B^{q_1}A^{p_2}B^{q_2}\cdots A^{p_k}B^{q_k}|) \prec_{(\log)} \vec{\lambda}(|AB|)$$

が $\sum_{i=1}^k p_i = \sum_{i=1}^k q_i = 1$, $\sum_{i=1}^j p_i \le \sum_{i=1}^j q_i$ $(1 \le j \le k-1)$, $\sum_{i=1}^{j-1} q_i \le \sum_{i=1}^j p_i$ $(2 \le j \le k-1)$ であるような $p_i, q_i \ge 0$ $(1 \le i \le k)$ についていえる (Ando-Hiai[2])。このことから、A, B, p, q が上の条件を満たすとき次のトレース不等式がいえる。

$$|\mathrm{Tr}(A^{p_1}B^{q_1}A^{p_2}B^{q_2}\cdots A^{p_k}B^{q_k})| \le \mathrm{Tr}(|AB|) \tag{1.8}$$

一般に log majorization (1.7) からトレース不等式 (1.1) は導かれない。我々の興味は $p_i, q_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{\mathrm{k}} p_i = \sum_{i=1}^{\mathrm{k}} q_i = 1$ の条件だけで、あるいはどんな条件で (1.1) が言えるだろうか、ということである。また、(1.1) の逆の不等式として

$$\mathrm{Tr}((A^{\frac{1}{k}}B^{\frac{1}{k}})^k) \le |\mathrm{Tr}(A^{p_1}B^{q_1}A^{p_2}B^{q_2}\cdots A^{p_k}B^{q_k})| \tag{1.9}$$

が考えられる。これは Golden-Thompson の不等式の拡張と見られる。本講演では、これらの不等式に関連するいくつかの結果を紹介する。以下では、A, B を positive semidefinite 行列, H, K を Hermite 行列 とする。

2. Positive semidefinite 行列に関する結果

(1.7),(1.8) に対応する log majorization 、トレース不等式として次を得る。

Theorem 2.1. $p_i, q_i \ge 0$ $(1 \le i \le k)$ が$\sum_{i=1}^k p_i = \sum_{i=1}^k q_i = 1$,

$$0 \le \sum_{i=1}^j q_i - \sum_{i=1}^j p_i \le \frac{1}{2} \quad (1 \le j \le k-1)$$

$$0 \le \sum_{i=1}^j p_i - \sum_{i=1}^{j-1} q_i \le \frac{1}{2} \quad (1 \le j \le k)$$

を満たすとする。このとき、

$$\vec{\lambda}(|A^{p_1}B^{q_1}A^{p_2}B^{q_2}\cdots A^{p_k}B^{q_k}|) \prec_{(\log)} \vec{\lambda}(AB) \tag{2.1}$$

が成り立つ。特に、

$$|\mathrm{Tr}(A^{p_1}B^{q_1}A^{p_2}B^{q_2}\cdots A^{p_k}B^{q_k})| \le \mathrm{Tr}(AB) \tag{2.2}$$

がいえる。

証明. (1.7) の証明と同様に、anti-symmetric tensor の理論から

$$\lambda_1(|A^{p_1}B^{q_1}\cdots A^{p_k}B^{q_k}|) \le \lambda_1(A^{1/2}BA^{1/2}) \tag{2.3}$$

のみを示すとよい。また、A, B が invertible と仮定してもよい。(2.3) を示すためには $\lambda_1(AB) \le 1$ ならば、$\lambda_1(|A^{p_1}B^{q_1}A^{p_2}B^{q_2}\ldots A^{p_K}B^{q_K}|) \le 1$ を示すと十分であ

る。 $\lambda_1(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}) = \lambda_1(AB) \leq 1$ から、$A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}} \leq I$ がいえ、よって、$B \leq A^{-1}$、$A \leq B^{-1}$ が言える。$0 \leq 2p_1 \leq 1$, $0 \leq 2(q_1 - p_1) \leq 1$ だから、Löwner の定理 ([4 p.149] 参照) から、

$$B^{q_1}A^{2p_1}B^{q_1} \leq B^{2(q_1-p_1)}$$

それから

$$A^{p_2}B^{q_1}A^{2p_1}B^{q_1}A^{p_2} \leq A^{p_2}B^{2(q_1-p_1)}A^{p_2} \leq A^{2(p_1+p_2-q_1)}$$

を得る。この議論をくり返して、

$$B^{q_K}A^{p_K}\cdots B^{q_1}A^{2p_1}B^{q_1}\cdots A^{p_K}B^{q_K} \leq B^{2(q_1+\cdots+q_K-p_1-\cdots-p_K)} = I$$

が示され、(2.3) が証明される。

Corollary 2.2.
(i) $|p-\frac{1}{2}|+|q-\frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ ならば, $|\mathrm{Tr}(A^pB^qA^{1-p}B^{1-q})| \leq \mathrm{Tr}(AB)$ である。
(ii) $\mathrm{Tr}((A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}})^2) \leq \mathrm{Tr}(A^{\frac{1}{2}}B^qA^{\frac{1}{2}}B^{1-q}) \leq \mathrm{Tr}(AB)$ $(0 \leq q \leq 1)$

(ii) は、$B = \sum_{i=1}^n \mu_i E_i$ として、算術幾何平均を使うと、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(A^{1/2}B^qA^{1/2}B^{1-q})\\
&\quad= \sum_{i=1}^n \mu_i \mathrm{Tr}(A^{1/2}E_iA^{1/2}E_i)\\
&\quad\quad+ \sum_{i<j}(\mu_i^p\mu_j^{1-p}+\mu_i^{1-p}\mu_j^p)\mathrm{Tr}(A^{1/2}E_iA^{1/2}E_j)\\
&\quad\geq \sum_{i=1}^n \mu_i \mathrm{Tr}(A^{1/2}E_iA^{1/2}E_i)\\
&\quad\quad\quad+ \sum_{i<j} 2\mu_i^{1/2}\mu_j^{1/2}\mathrm{Tr}(A^{1/2}E_iA^{1/2}E_j)\\
&\quad= \mathrm{Tr}((A^{1/2}B^{1/2})^2)
\end{aligned}$$

がいえることから示される。

Corollary 2.2 から Golden-Thompson の不等式は次のように改良される。

$$\mathrm{Tr}(e^{H+K}) \leq \mathrm{Tr}(e^{\frac{1}{2}H}e^{qK}e^{\frac{1}{2}H}e^{(1-q)K}) \leq \mathrm{Tr}(e^He^K) \quad \text{for} \quad 0 \leq q \leq 1$$

Corollary 2.3. l_i, m_i $(1 \leq i \leq k)$ を $\sum_{i=1}^k l_i = \sum_{i=1}^k m_i = 4$ を満たす非負な整数とする。このとき,

$$|\vec{\lambda}(A^{l_1}B^{m_1}A^{l_2}B^{m_2}\cdots A^{l_k}B^{m_k})| \prec_{(\log)} \vec{\lambda}(A^4B^4)$$

がいえる。特に

$$|\mathrm{Tr}(A^{l_1}B^{m_1}A^{l_2}B^{m_2}\cdots A^{l_k}B^{m_k})| \leq \mathrm{Tr}(A^4B^4)$$

となる。

実際、行列 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ に対して

$$\vec{\lambda}(X_1X_2\cdots X_m) = \vec{\lambda}(X_2\cdots X_mX_1).$$

だから、次の6つのケースを考えるとよい。

$$AB^3A^3B, \qquad A^2B^2AB^2A, \qquad A^2B^2A^2B^2,$$

$$A^2B^2ABAB, \quad ABAB^2ABA, \quad ABABABAB.$$

$C = A^4$, $D = B^4$ とおく、Corollary 2.3 を示すためには、上の6つの場合に

$$|\vec{\lambda}(C^{p_1/4}D^{q_1/4}C^{p_2/4}D^{q_2/4}\cdots C^{p_k/4}D^{q_k/4})|$$
$$\prec_{(log)} \vec{\lambda}(CD)$$

を示すと十分。上の条件の時、$p_j/4, q_j/4$ は Theorem 2.1 の条件を満たす。

次の結果は Corollary 2.2 の一般化であるが、これらは本質的には [5] に含まれている。

Theorem 2.4.
(i) g_1, g_2 が $[0,\infty)$ 上の非負な増加関数とすると、

$$\mathrm{Tr}(Ag_1(B)Ag_2(B)) \leq \mathrm{Tr}(A^2g_1(B)g_2(B))$$

である。
(ii) g_1 *is* $[0,\infty)$ 上の非負な増加関数で、g_2 が $[0,\infty)$ 上の非負な減少関数とすると、

$$\mathrm{Tr}(Ag_1(B)Ag_2(B)) \geq \mathrm{Tr}(A^2g_1(B)g_2(B))$$

である。
(iii) $[0,\infty)$ 上の非負な関数 g_1, g_2 に対して、

$$\mathrm{Tr}((A\sqrt{g_1g_2}(B))^2) \leq \mathrm{Tr}(Ag_1(B)Ag_2(B))$$

である。

3. Hermitian 行列に関する結果

Theorem 2.1 の証明と同様に Hermite 行列に関する Theorem 2.1 型の不等式として次のことが言える。

Theorem 3.1. H, K を *Hermitian* 行列として、l_i, m_i $(1 \le i \le k)$ を$\sum_{i=1}^{k} l_i = \sum_{i=1}^{k} m_i = N$,

$$\sum_{i=1}^{j} l_i \le \sum_{i=1}^{j} m_i \quad (1 \le j \le k-1), \quad \sum_{i=1}^{j-1} m_i \le \sum_{i=1}^{j} l_i \quad (2 \le j \le k-1)$$

を満たす非負な整数とする。このとき、

$$\vec{\lambda}(|A^{l_1}B^{m_1}A^{l_2}B^{m_2}\cdots A^{l_k}B^{m_k}|) \prec_{(\log)} \vec{\lambda}(|A^N B^N|) \tag{3.1}$$

がいえる。

Theorem 3.2. l_i, m_i $(1 \le i \le k)$ を $\sum_{i=1}^{k} l_i = \sum_{i=1}^{k} m_i = 2N$(偶数), そして,

$$0 \le \sum_{i=1}^{j} m_i - \sum_{i=1}^{j} l_i \le N \quad (1 \le j \le k-1)$$

$$0 \le \sum_{i=1}^{j} l_i - \sum_{i=1}^{j-1} m_i \le N \quad (1 \le j \le k)$$

となるような非負な整数とする。このとき，次のことがいえる。

$$\mathrm{Tr}(|H^{l_1}K^{m_1}H^{l_2}K^{m_2}\cdots H^{l_k}K^{m_k}|) \le \mathrm{Tr}(H^{2N}K^{2N}) \tag{3.2}$$

Corollary 3.3. H, K を *Hermitian* 行列とする。このとき、自然数 N に対して、

$$\mathrm{Tr}((HK)^{2N}) \le \mathrm{Tr}(|(HK)^{2N}|) \le \mathrm{Tr}(H^{2N}H^{2N})$$

がいえる。

この結果は，次の D.-W. Chang [6] の結果を含む。

H, K を Hermitian 行列、k を自然数とするとき、

$$\mathrm{Tr}((HK)^{2^k}) \le \mathrm{Tr}(H^{2^k}K^{2^k})$$

である。

4. 固有値の制限に関する結果

ここでは、A, B を positive semidefinite 行列 f_i, g_i $(i, j = 1, 2)$ を $[0, \infty)$ の非負な増加関数として、A, B の異なる固有値の数についての制限した場合の

$$f_1(A)g_1(B)f_2(A)g_2(B)$$

のトレースに関する結果について述べる。

Theorem 4.1. A, B を *positive semidefinite* 行列で A, B がともに高々*2* 個の異なった固有値をもつ。また、f_i, g_i $(1 \leq i \leq k)$ が $[0, \infty)$ 上で非負な増加関数とするとき、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathrm{Tr}(f_1(A)g_1(B)f_2(A)g_2(B)\cdots f_k(A)g_k(B)) \\ &\leq \mathrm{Tr}(f_1(A)f_2(A)\cdots f_k(A)g_1(B)g_2(B)\cdots g_k(B)) \end{aligned}$$

となる。

Theorem 4.2. A, B を *positive semidefinite* 行列で、A, B ともに高々*2* 個の異なった固有値をもつとする。また、f_1, f_2, g_1, g_2 が $[0, \infty)$ 上で非負な増加関数とすると、

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}((\sqrt{f_1 f_2}(A)\sqrt{g_1 g_2}(B))^2) \\ &\qquad \leq \mathrm{Tr}(f_1(A)g_1(B)f_2(A)g_2(B)) \end{aligned}$$

が成り立つ。

Remark 4.3. *Theorem 4.1* の固有値に関する仮定がない場合、3×3 *positive semidefinite* 行列 A, B と非負な増加関数 f_i, g_i *(i=1,2)* が存在して、

$$\mathrm{Tr}(f_1(A)g_1(B)f_2(A)g_2(B)) > \mathrm{Tr}(f_1(A)f_2(A)g_1(B)g_2(B))$$

を満たす。

この例として、

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = I + \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Q$$

とする。ただし、P, Q は

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

なる直交射影とし、unitary 行列

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

に対して $B = UAU^*$ とおく。また、$0 < a < 1$ に対して増加関数 f_1, f_2 を

$$\begin{aligned} f_1\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 - a^2, \quad f_1(1) = 1, \quad f_1\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + a, \\ f_2\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 - a, \quad f_2(1) = 1, \quad f_2\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + a^2. \end{aligned}$$

とおくと、$f_1(A)=I+aP-a^2Q$, $f_2(A)=I+a^2P-aQ$、$f_1(B)=Uf_1(A)U^*=I+aR-a^2S$, $f_2(B)=Uf_2(A)U^*=I+a^2R-aS$ となる。ここで、R,S は $R=UPU^*$, $S=UQU^*$ なる直交射影である。このとき、

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \mathrm{Tr}(f_1(A)f_2(A)f_1(B)f_2(B)) - \mathrm{Tr}(f_1(A)f_1(B)f_2(A)f_2(B)) \\ &= -\frac{1}{18}a^8+\frac{1}{4}a^7+\frac{11}{18}a^6+\frac{1}{4}a^5-\frac{1}{18}a^4 \\ &= -\frac{1}{36}a^4(a+1)^2(2a^2-13a+2)\end{aligned}$$

と計算でき、よって、$0<a<\frac{13-3\sqrt{17}}{4}$ ならば $\varphi(a)<0$ を得る。

Theorem 4.4. A,B が *positive semidefinite* 行列で、A が高々 *2* 個の異なった固有値をもち、B が高々 *3* 個の異なった固有値をもつとする。また、f_1,f_2,g_1,g_2 が $[0,\infty)$ 上の非負な増加関数とすると、

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(f_1(A)g_1(B)f_2(A)g_2(B)) \\ &\qquad \le \mathrm{Tr}(f_1(A)f_2(A)g_1(B)g_2(B))\end{aligned}$$

がいえる。特に、$0\le p,q\le 1$ に対して、

$$\mathrm{Tr}(A^pB^qA^{1-p}B^{1-q}) \le \mathrm{Tr}(AB)$$

がいえる。

Theorem 4.5. A,B を 3×3 *positive semidefinite* 行列で、λ_+,λ_- を A の最大、最小固有値とする。また、μ_+,μ_- を B の最大、最小固有値とする。このとき、次は同値である。

(i) $A\mathbf{u}_+=\lambda_+\mathbf{u}_+$, $A\mathbf{u}_-=\lambda_-\mathbf{u}_-$, $B\mathbf{v}_+=\mu_+\mathbf{v}_+$, $B\mathbf{v}_-=\mu_-\mathbf{v}_-$ *and*

$$\mathrm{Re}\,\langle\mathbf{u}_+,\mathbf{v}_+\rangle\langle\mathbf{v}_+,\mathbf{u}_-\rangle\langle\mathbf{u}_-,\mathbf{v}_-\rangle\langle\mathbf{v}_-,\mathbf{u}_+\rangle \le 0.$$

であるような A の直交固有ベクトル $\mathbf{u}_+,\mathbf{u}_-$ と B の直交固有ベクトル $\mathbf{v}_+,\mathbf{v}_-$ がある。

(ii) 仮に f_1,f_2,g_1,g_2 が $[0,\infty)$ 上の非負な増加関数とすると

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(f_1(A)g_1(B)f_2(A)g_2(B)) \\ &\qquad \le \mathrm{Tr}(f_1(A)f_2(A)g_1(B)g_2(B))\end{aligned}$$

である。

(iii) 仮に f_1,f_2,g_1 が $[0,\infty)$ 上の非負な増加関数として、g_2 が $[0,\infty)$ 上の非負な減少関数とするとき、

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(f_1(A)g_1(B)f_2(A)g_2(B)) \\ &\qquad \ge \mathrm{Tr}(f_1(A)f_2(A)g_1(B)g_2(B))\end{aligned}$$

が成り立つ。

[参考文献]

[1] T. Ando, Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* **118** (1989), 163–248.

[2] T. Ando and F. Hiai, Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities, *Linear Algebra Appl.* **198** (1994), 113–131.

[3] H. Araki, On an inequalities of Lieb and Thirring, *Lett. Math. Phys.* **19** (1990), 167–170.

[4] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer, New York, 1997.

[5] J. C. Bourin, Some inequalities for norms on matrices and operator, *Linear Algebra Appl.* **292** (1999), 139–154.

[6] D.-W. Chang, A matrix trace inequality for products of Hermitian matrices, *J. Math. Anal. Appl.* **237** (1999), 721–725.

[7] I. D. Coope, On matrix trace inequalities and related topics for products of Hermitian matrices, *J. Math. Anal. Appl.* **188** (1994), 999–1001.

[8] F. Hiai, Equality cases in matrix norm inequalities of Golden-Thompson type, *Linear and Multilinear Algebra* **36** (1994), 239–249.

[9] F. Hiai and D. Petz, The Golden-Thompson trace inequality is complemented, *Linear Algebra Appl.* **181** (1993), 153–185.

[10] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic, New York, 1979.