数理解析研究所講究録
1144 巻 2000 年 25-30

Hua の作用素不等式について

大阪教育大学　藤井　淳一 (Jun Ichi Fujii)

[9] にある、**Lo-Keng Hua の不等式** :

(1) $x_i \geq 0,\ \delta, \alpha > 0$ について、$\left(\delta - \sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 + \alpha \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \geq \frac{\alpha}{n+\alpha}\delta^2$

は、もともと数論関係の結果であるが、その出所からか東洋圏を中心にさまざまな拡張が試みられているようである。あまり注意されていないが，実際にはこれは $\delta = 1$ の場合の不等式

(1′) $$\left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 + \alpha \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \geq \frac{\alpha}{n+\alpha}$$

と同値であり，従来の拡張はそれにあまり注意を払われていないので、余計な苦労をしているように見える。

ここでは、作用素不等式として，これらを統一的に扱ってみたい。これらは、大別して Schwarz 型と Jensen 型の 2 種類になりそうだ。また、同名の不等式として，

(2) $$|\det(1 - B^*A)|^2 = \det|1 - B^*A|^2 \geq \det(1 - A^*A)\det(1 - B^*B)$$

が、縮小作用素について成立するというもの [8] もあり，直接関係はなさそうであるが，実はこれも統一的に捉えられることが分かった。この不等式を、**Hua determinant inequality** と呼んでおく。実はこの不等式に注目する一つのきっかけになったのは，Marcus [10] が多少拡張したこの行列式不等式で、さらにその本質となる不等式は（中村正弘先生が指摘されたのだが)、state φ について

(3) $$|\varphi(1 - B^*A)|^2 \geq \varphi(1 - A^*A)\varphi(1 - B^*B)$$

というものである。これが、上記の不等式を統一するものである事が後に分かった。この不等式は一見して Schwarz 型であることが分かるが，統一的に扱うためには Schwarz の不等式自身を捉えなおす必要があり、ここでは写像の “2-positivity” と解釈する :

$$\begin{pmatrix} \varphi(A^*A) & \overline{\varphi(B^*A)} \\ \varphi(B^*A) & \varphi(B^*B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(A^*A) & \varphi(A^*B) \\ \varphi(B^*A) & \varphi(B^*B) \end{pmatrix} \geq 0$$

たとえば、行列式は非線型な 2-positive map である（その Schwarz 不等式は等号であるが)。また、線形写像については、この定義は通常の 2-positive と同じである。

さて、われわれが使う道具としての Schwarz は、次の不等式である [5]：

Schwarz inequality. 2-positive map Φ と、極分解 $\Phi(B^*A) = U|\Phi(B^*A)|$ について、

$$|\Phi(B^*A)| \leq \Phi(A^*A) \ \sharp \ U^*\Phi(B^*B)U.$$

ここで、$\sharp$ は「安藤幾何平均」とする [1]：

$$A \sharp B = \max\left\{X \geq 0 \;\middle|\; \begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0\right\}.$$

これによって、

Theorem. Φ を contractive 2-positive map とし、$\Phi(B^*A) = U|\Phi(B^*A)|$ を正規作用素 $\Phi(B^*A)$ の極分解とするとき、

$$|1 - \Phi(B^*A)| \geq 1 - |\Phi(B^*A)| \geq 1 - \Phi(A^*A) \sharp U^*\Phi(B^*B)U.$$

さらに、 $\Phi(1 - A^*A)$ と $\Phi(1 - B^*B)$ が縮小作用素で Φ が線形ならば,

$$1 - \Phi(A^*A) \sharp U^*\Phi(B^*B)U \geq \Phi(1 - A^*A) \sharp U^*\Phi(1 - B^*B)U.$$

がわかる [5]。これより、(3) が得られ、後述するように (2) を導くことが出来る。また、単純な拡張はほとんどこれでカバーできる。

（注意） 作用素 $\Phi(B^*A)$ の正規性は、残念ながらはずすことが出来ない：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、$\Phi = \mathrm{id}$ について、$\Phi(B^*A) = B^*A = A$ は正規でなく，$(1-B^*A)^*(1-B^*A)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

より

$$|1-B^*A| = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

一方、 $A^*A = 1 - B = |A|$ より、

$$1 - A^*A = B = |1 - A^*A| \quad \text{で、} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$1 - B^*B = 1 - B$ だから、 $U^*(1 - B^*B)U = B$ となって、

$$(1 - A^*A) \sharp U^*(1 - B^*B)U = B \sharp B = B.$$

この Theorem の視点に立つと、次のように、複素空間で Hua の不等式をみることは、ごく自然であるが、従来の拡張は実空間にこだわっているものが多い：

複素型 Hua の不等式. $\alpha > 0$ と複素数 x_k, δ について、

$$\left|\delta - \sum_{k=1}^{n} x_k\right|^2 + \alpha\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right) \geq \frac{\alpha}{n+\alpha}|\delta|^2$$

実際、以下の拡張不等式についても複素無限化可能である：

Dragomir-Yang の拡張 [4]． y, x_k を Hilbert 空間 H のベクトルとすると、$\forall\alpha > 0$ について、

$$\left\|y - \sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 + \alpha\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \geq \frac{\alpha}{\alpha+n}\|y\|^2.$$

Radas-Šikić の拡張 [12]． $A \in B(H)$, $x, y \in H$, $\alpha > 0$ について

$$\|y - Ax\|^2 \geq \frac{\alpha}{\alpha + \|A\|^2}\|y\|^2 - \alpha\|x\|^2.$$

等号条件は, (i) $A = 0$ かつ $x = 0$, または、

(ii) $$A \neq 0, \quad Ax = \frac{\|A\|^2}{\alpha + \|A\|^2}y, \quad \|Ax\| = \|A\|\|x\|.$$

ここで、Hua determinant inequality について、コメントしておこう。Marcus [10] の方法を紹介すると、(3) から、$|1-B^*A|$ の固有ベクトル CONS$\{e_k\}$ について、

$$\det|1-B^*A|^2 = \prod_k |\langle |1-B^*A|e_k, e_k\rangle|^2$$

$$\geq \prod_k \langle (1-A^*A)e_k, e_k\rangle\langle (1-B^*B)e_k, e_k\rangle$$

となるので、Hadamard theorem より、$\displaystyle\prod_k \langle (1-A^*A)e_k, e_k\rangle\langle (1-B^*B)e_k, e_k\rangle$

$$\geq \det(1-A^*A)\det(1-B^*B)$$

と導く事ができるのである。

(注意) 片山良一先生から、外積代数を考えれば、state 一般の不等式から行列式の結果が出るとのご指摘を受けた。コメントいただけた事にここで謝意を表します。

次に、Jensen 型の Hua 不等式について述べてみよう。Hua の不等式の中の $f(x)=x^2$ の部分を、一般の凸関数に置き換えた拡張もいくつかあるが、そのなかで、Jensen の不等式を使ってうまくまとめたものは次のものである:

Pearce-Pečarić の拡張 [11]. 区間 $\mathcal{I}$ 上の凸関数と、実数 δ, $x_k \in R$, $\alpha > 0$ について、$\delta - \sum_{k=1}^n x_k$, $\delta\alpha/(\alpha+n)$, $\alpha x_k \in \mathcal{I}$ のとき、

$$f\left(\delta - \sum_{k=1}^n x_k\right) + \sum_{k=1}^n \alpha^{-1} f(\alpha x_k) \geq \frac{\alpha+n}{\alpha} f\left(\frac{\delta\alpha}{\alpha+n}\right).$$

この路線で、作用素不等式版を考えるならば、当然の事ながら、Jensen の作用素不等式を使うことになる。まとめると、次の 2 種類がある:

Jensen-Davis-Choi [1,2,3]. 作用素凸関数 f と、unital positive linear map Φ について

$$f\Big(\Phi(A)\Big) \leq \Phi\Big(f(A)\Big)$$

for $A = A^*$, $\sigma(A) \subset \mathrm{dom} f$.

Jensen-Hansen-Pedersen [6,7]．$[0,\infty)$ 上の連続実関数 f について、

$$f:\text{作用素凸}, f(0) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k^* A_k X_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} X_k^* f(A_k) X_k$$

for (uniformly bounded) positive operators A_k and $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} X_k^* X_k = 1$.

後者については、無限化してあるが、本質的には [7] に載っているといえる。実際には, 写像 $\Phi(X) = \sum_k X_k^* X X_k$ が unital なので、不等式自体は前者から出るし、区間も自由に採れる。

ただ、この場合の拡張は、Schwarz 型と違って関数が作用素凸である事が要求されるので、元の Hua の不等式の拡張にはなるが、[11] の結果の拡張ではない事に注意しよう。いくつかバリエーションがあるが、たとえば、次のような 2 つが考えられる：

Jensen 型 Hua の作用素不等式 1. $\mathcal{I}$ 上の作用素凸関数 f と $A_k = A_k^*$, 可逆 B_k, $\sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\|^2 < \infty$ となる作用素について、

$$\sigma\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k\right), \quad \sigma\left(\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^* B_k\right)^{-1}\right), \quad \sigma\left(B_k^{*-1} A_k B_k^{-1}\right) \subset \mathcal{I}$$

ならば、

$$\begin{aligned} f\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) &+ \sum_{k=1}^{\infty} B_k^* f\left(B_k^{*-1} A_k B_k^{-1}\right) B_k \\ &\geq f\left(\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^* B_k\right)^{-1}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^* B_k\right). \end{aligned}$$

Jensen 型 Hua の作用素不等式 2. $\mathcal{I}$ 上の作用素凸関数 f と、条件付期待値 Φ : $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ について、$C \in \mathcal{B}$ が可逆で, $B \in \mathcal{A}$ が

$$\sigma(1 - \Phi(B)), \quad \sigma((1 + C^* C)^{-1}), \quad \sigma(C^{*-1} B C^{-1}) \subset \mathcal{I}$$

を満たすならば、

$$f(1-\Phi(B))+C^{*}\Phi\left(f\left(C^{*-1}BC^{-1}\right)\right)C \geq f\left((1+C^{*}C)^{-1}\right)(1+C^{*}C).$$

参考文献

[1] T.Ando: *Topics on operator inequality*, Hokkaido Univ. Lecture Note, 1978.

[2] M.-D.Choi: *A Schwarz inequality for positive linear maps on C^*-algebras*, Illinois J. Math. **18** (1974), 565–574.

[3] C.Davis: *A Schwarz inequality for convex operator functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **8**(1957), 42–44.

[4] S.S.Dragomir and G.-S.Yang: *On Hua's inequality in real inner product spaces*, Tamkang J. Math., **27**(1996), 227-232.

[5] J.I.Fujii: *Operator inequalities for Schwarz and Hua*, Sci. Math. **2** (1999), 263–268.

[6] F.Hansen: *An operator inequality*, Math. Ann., **246** (1980), 249–250.

[7] F.Hansen and G.K.Pedersen: *Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem*, Math. Ann., **258**(1982), 229–241.

[8] L.K.Hua: *Inequalities involving determinants*, Acta Math. Sinica, **5**(1955), pp 463-470.

[9] L.K.Hua: *Additive theory of prime numbers*(tranlated by N.B.Ng), Translation of Mathematical Monographs, **13**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965.

[10] M.Marcus: *On a determinant inequality*, Amer. Math. Monthly, **65**(1958), pp 266-268.

[11] C.E.M.Pearce and J.E.Pečarić: *A remark on the Lo-Keng Hua ineqaulity*, J. Math. Anal. Appl. **188**(1994), 700-702.

[12] S.Radas and T.Šikić: *A note on the generalization of Hua's inequality*, Tamkang J. Math., **28**(1997), 321-323.