数理解析研究所講究録
1144巻 2000年 59-63



# 可換な縮小作用素の集まりの同時ユニタリ伸張

山形大学理学部　岡安隆照 (Takateru Okayasu)

**1.** $T_1, \ldots, T_n$をヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の可換な縮小作用素とする. もしも$\mathcal{H}$を含むヒルベルト空間$\mathcal{K}$と$\mathcal{K}$上の可換なユニタリ作用素$U_1, \ldots, U_n$が存在して任意の整数$k_1, \ldots, k_n \geq 0$に対して

$$T_1^{k_1} \ldots T_n^{k_n} = PU_1^{k_1} \ldots U_n^{k_n}|_{\mathcal{H}}$$

を満たすならば, $T_1 \ldots T_n$は**同時ユニタリ伸張**$U_1, \ldots, U_n$ をもつという. また, 任意の整数$m$と, $m^2$個の任意の$p_{11}, \ldots, p_{mm} \in \mathcal{P}^n$に対して不等式

$$\left\| \begin{pmatrix} p_{11}(T_1, \ldots, T_n) & \ldots & p_{1m}(T_1, \ldots, T_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m1}(T_1, \ldots, T_n) & \ldots & p_{mm}(T_1, \ldots, T_n) \end{pmatrix} \right\|$$

$$\leq \sup_{z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{T}} \left\| \begin{pmatrix} p_{11}(z_1, z_2, \ldots, z_n) & \ldots & p_{1m}(z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m1}(z_1, z_2, \ldots, z_n) & \ldots & p_{mm}(z_1, z_2, \ldots, z_n) \end{pmatrix} \right\|$$

を満たすならば, $T_1, \ldots, T_n$は**von Neumannの不等式**を満たすという; $\mathcal{P}^n$は$n$変数の多項式の全体, $\mathbf{T}$は平面$\mathbf{C}$上の単位円周である.

これらの概念は, 次の定理が述べる通り, 別のものではない:

**定理 1** (cf. [5]). $T_1, \ldots, T_n$が同時ユニタリ伸張をもつこととvon Neumannの不等式を満たすことは互いに同値である.

**2.** 任意の縮小作用素$T$が任意の$p \in \mathcal{P}^1$に対して不等式

$$||p(T)|| \leq \sup_{z \in \mathbf{T}} ||p(z)||$$

を満たすことはvon Neumann による古典的な結果である; それがユニタリ伸張をもつことはSz.-Nazy による [9]. 安藤[1] は任意の2個の可換な縮小作用素が同時ユニタリ伸張をもつことを示した. Parrott は同時ユニタリ伸張をもたない3個の可換な縮小作用素の例をあげた[7], cf. [10].

一方, 任意有限個の可換な等距離作用素が同時ユニタリ伸張をもつこと, 任意有限個の複可換な縮小作用素が同時ユニタリ伸張をもつこと, など, が知られている [9]; ここに作用素$S$が$T$と複可換であるとは$ST = TS$と共に$T^*S = ST^*$が成り立つときにいう.

**3.** 次の事実が成り立つ [6], cf. [5]:

**定 理 2.** 可換な縮小作用素$S_1, \ldots, S_m$, 可換な縮小作用素$T_1, \ldots, T_n$ は共に同時ユニタリ伸張をもち, $S_i$ $(1 \leq i \leq m)$ と$T_j$ $(1 \leq j \leq n)$が複可換であるとする. このとき, $T_1, \ldots, T_n$が**単射的な**von Neumann環(または単射的な$C^*$環) を生成するならば, $S_1, \ldots, S_m, T_1, \ldots, T_n$は同時ユニタリ伸張をもつ.

単射的な$C^*$環, von Neumann環については$C^*$環, von Neumann環の文献を見て頂きたい.

$C^*$環の部分空間から$C^*$環への線形写像$\phi$ が**完全縮小写像**であるとは, 任意の整数$m$に対して写像$\phi \otimes \mathrm{id}_m$が縮小写像であるときにいい, 単位をもつ$C^*$環の単位をもつ自己共役な部分空間から$C^*$環への線形写像$\phi$が**完全正値写像**であるとは, 任意の整数$m$に対して写像$\phi \otimes \mathrm{id}_m$ が正値写像であるときにいう; ここに$\mathrm{id}_m$は$m$次の行列の全体$M_m$上の恒等写像である. 完全縮小写像と完全正値写像は互いに緊密な関係にある; $T_1, \ldots, T_n$がvon Neumann の不等式を満たすとは,

$$\phi(p) = p(T_1, \ldots, T_n)$$

によって定義される写像 $\phi : \mathcal{P}^n \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が完全縮小写像であることに他ならない [8].

**定理** 2 の証明の概略は次の通りである. 仮定から

$$\phi(p) = p(S_1, \dots, S_m), \quad \psi(q) = q(T_1, \dots, T_n)$$

によって定義される写像 $\phi : \mathcal{P}^m \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\psi : \mathcal{P}^n \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は単位を保存する完全縮小写像である. 従って

$$\tilde{\phi}(\bar{p}_1 + p_2) = p_1(S_1, \dots, S_m)^* + p_2(S_1, \dots, S_m),$$

$$\tilde{\psi}(\bar{q}_1 + q_2) = q_1(T_1, \dots, T_n)^* + q_2(T_1, \dots, T_n)$$

によって定義される写像$\tilde{\phi} : \mathcal{S}_1 = (\mathcal{P}^m)^- + \mathcal{P}^m \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\tilde{\psi} : \mathcal{S}_2 = (\mathcal{P}^n)^- + \mathcal{P}^n \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は完全正値写像である. 仮定から$\tilde{\psi}$による$\mathcal{S}_2$の像$\tilde{\psi}(\mathcal{S}_2)$ は$T_1, \dots, T_n$によって生成される単射的なvon Neumann環$\mathcal{R}$に含まれるから, $\tilde{\psi}$ は完全正値写像$\Psi : C(\mathbf{T}^n) \longrightarrow \mathcal{R}$ に拡張される. $\tilde{\phi}(\mathcal{S}_1)$ と$\mathcal{R}$は可換だから

$$\Theta(f \otimes g) = \tilde{\phi}(f)\Psi(g), \quad f \in \mathcal{S}_1, \quad g \in C(\mathbf{T}^n)$$

によって定義される写像$\Theta : \mathcal{S}_1 \otimes_{\max} C(\mathbf{T}^n) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は完全正値写像である. $\mathcal{S}_1 \otimes_{\max} C(\mathbf{T}^n)$ が整合的に$C(\mathbf{T}^{m+n})$ に埋め込まれることから ([8], Exercises 10.6), $\Theta$の$\mathcal{P}^{n+m}$への制限$\theta : \mathcal{P}^{n+m} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は完全縮小写像である. そして,

$$\theta(r) = r(S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n)$$

が成り立つ. このことは $S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n$が同時ユニタリ伸張をもつことを意味している.

$T_1, \dots, T_n$が単射的な$C^*$環を生成するとしても議論は同様である.

次の系が得られる:

**系 1.** 可換な縮小作用素$S_1, \dots, S_m$は同時ユニタリ伸張をもち, $T_1, \dots, T_n$はGCR縮小作用素で, $T_i$と$T_j$が複可換 $(i \neq j)$, $S_i$ $(1 \leq i \leq m)$ と$T_j$ $(1 \leq j \leq n)$ が複可換であるとする. このとき, $S_1$, ..., $S_m$, $T_1$, ..., $T_n$は同時ユニタリ伸張をもつ.

ここに, GCR縮小作用素とはGCR環を生成する縮小作用素である [4].

**系 2.** 可換な縮小作用素$S_1,\ldots,S_m$, 可換なコンパクト縮小作用素$T_1,\ldots,T_n$ は共に同時ユニタリ伸張をもち, $S_i$ $(1 \leq i \leq m)$ と$T_j$ $(1 \leq j \leq n)$ は複可換であるとする. このとき, $S_1,\ldots,S_m,T_1,\ldots,T_n$は同時ユニタリ伸張をもつ.

**4.** 定理2の改良を図りたい.

**定 理 3.** ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の可換な縮小作用素$S_1,\ldots,S_m$, 可換な縮小作用素$T_1,\ldots,T_n$は共に同時ユニタリ伸張をもち, $S_i$ $(1 \leq i \leq m)$ と$T_j$ $(1 \leq j \leq n)$ は複可換であるとする. $\mathcal{K}$を$T_1,\ldots,T_n$の**極小の**同時ユニタリ伸張$U_1,\ldots,U_n$が作用するヒルベルト空間, $\mathcal{A}$を$U_1,\ldots,U_n$が$\mathcal{K}$上の恒等作用素と共に生成する$C^*$環, $V$を$\mathcal{H}$の$\mathcal{K}$への埋め込みとするとき, $S_1,\ldots,S_m$が任意の$V^*AV$ $(A \in \mathcal{A})$ と可換ならば, $S_1,\ldots,S_m,T_1,\ldots,T_n$は同時ユニタリ伸張をもつ.

証明の概略は次の通りである. $\phi : \mathcal{P}^m \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を

$$\phi(p) = p(S_1,\ldots,S_m)$$

によって定義される完全縮小写像, $\eta : (V^*\mathcal{A}V)' \longrightarrow \mathcal{A}' \cap \{VV^*\}$ を

$$VR = \eta(R)V, \quad R \in (V^*\mathcal{A}V)'$$

を満たす* 同型写像とする (Arveson [3], Theorem 1.3.1). このとき $\eta \circ \phi : \mathcal{P}^m \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$ は完全縮小写像で,

$$(\eta \circ \phi)(p) = p(\eta(S_1),\ldots,\eta(S_m))$$

を満たす. よって $\eta(S_1),\ldots,\eta(S_m)$ は同時ユニタリ伸張をもつ. $\eta(S_1), \ldots,\eta(S_m)$ と$U_1, \ldots, U_n$は複可換で, $U_1, \ldots, U_n$は可換な, 従って, 単射的なvon Neumann環を生成する. よって $\eta(S_1), \ldots, \eta(S_m), U_1, \ldots, U_n$は同時ユニタリ伸張をもつ. このことから$S_1, \ldots, S_m, T_1, \ldots, T_n$ は同時ユニタリ伸張をもつことがわかる.

$T$が縮小作用素で, 閉単位円盤$\mathbf{D}$の近傍における解析関数$f_i$が

$$|f_i(z)| \leq 1, \quad z \in \mathbf{D}$$

を満たすとする $(1 \leq i \leq n)$. このとき, 縮小作用素 $T_1 = f_1(T), \ldots, T_n = f_n(T)$ は同時ユニタリ伸張をもつことが示される. しかし更に次の定理が成り立つ. その証明は**定理** 3 の証明と本質的に同じである:

**定 理 4.** 可換な縮小作用素 $S_1, \ldots, S_m$ は同時ユニタリ伸張をもち, 縮小作用素 $T, T_1, \ldots, T_n$ は今述べた通りのものとする. また, $S_i$ $(1 \leq i \leq m)$ は $T$ と複可換であるとする. このとき, $S_1, \ldots, S_m, T_1, \ldots, T_n$ は同時ユニタリ伸張をもつ.

これから直ぐに次の系が得られる:

**系 3** (cf. [2]). 可換な縮小作用素 $S_1, \ldots, S_m$ が同時ユニタリ伸張をもち, 各 $S_1, \ldots, S_m$ が縮小作用素 $T$ と複可換であるとする. このとき, $S_1, \ldots, S_m, T$ は同時ユニタリ伸張をもつ.

## References


[1] T. Andô, On a pair of commuting contractions, Acta Sci. Math. (Szeged) 24 (1963), 88-90.

[2] T. Andô, Unitary dilations for a triple of commuting contractions, Bull. l'Acad. Polonaise Sci., Sér. Sci. Math., Astr. Phys. 24 (1976), 851-853

[3] W. B. Arveson, Subalgebras of $C^*$-algebras, Acta Math. 123 (1969), 141-224.

[4] T. Okayasu, On GCR-operators, Tôhoku Math. Journ. 21 (1969), 573-579.

[5] T. Okayasu, The von Neumann inequality and dilation theorems for contractions, "Op. Theory and Complex Analy.", Sapporo, 1991, Op. Theory Adv. Appl. 59 (1992), 285-291.

[6] T. Okayasu, On simultaneous unitary dilations for commuting contractions, To appear.

[7] S. Parrott, Unitary dilations for commuting contractions, Pacif. J. Math. 34 (1970), 481-490.

[8] V. I. Paulsen, Completely bounded maps and dilations, Pitman Res. Notes Math. Ser. 146, 1986.

[9] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North-Holland, 1970.

[10] N. Th. Varopoulos, On an inequality of von Neumann and application of the metric theory of tensor products to operator theory, J. Funct. Analy. 16 (1974), 83-100.