数理解析研究所講究録
1147 巻 2000 年 16-27

解析関数の因子を求める方法とその精度保証

筑波大学電子・情報工学系　櫻井鉄也 (Tetsuya Sakurai)
名古屋大学工学研究科情報工学専攻　杉浦　洋 (Hiroshi Sugiura)

1　はじめに

本論文では実数 $R>0$ に対して $|z|<R$ で解析的な関数 $f(z)$ について，その 1 つの多項式因子を含むような多項式の集合を求める方法を考える．

反復解法を用いて非線形方程式の解を求めるときに，多重解や近接解は反復回数の増大や計算途中でのオーバーフローの原因となる．また，ニュートン法などで精度保証を行うときには区間内に唯一の解の存在を仮定する場合が多く，このような方法では近接解に対して精度保証を与えることが困難である．

任意次数の因子を求める方法を用いると近接解や多重解を一つの因子として求めることができるため，多重解に対しても収束次数の低下が起こらず，近接解と多重解を区別する必要もなくなる．また，因子の係数は近接解を個別に求める場合に比べて精度良く求めることが可能である．Bauer と Samelson[2] は多項式 $f(z)$ に対して $f(z)/q(z)$ に関する Newton 法を考えることにより $f(z)$ の 1 つの零点を求める方法を示した．ここで $q(z)$ は次数が $\deg f$ 以下の多項式である．Jenkins と Traub [10] は各反復において $q(z)$ を修正することで収束次数を高めた．これらの方法は 2 つの近似因子 $p(z)=z-z_0$ および $q(z)$ に関する反復法とみなすことができる．Stewart[17] はこれらの方法を $p(z)$ が 1 次式ではなく任意の次数の場合に一般化した．$p(z)$ が 2 次式の場合にはこの方法は Bairstow 法 [1] を含んでいる．文献 [18] では，この方法と qd-algorithm や König の定理との関係が考察されている．解析関数の 1 つの因子を求める方法では，infinite block Toeplitz 行列の問題に帰着させる方法も提案されている [3].

Grau の方法 [7] は多項式に対する N 個の近似因子 $p_1(z),\dots,p_N(z)$ を同時に修正する．これらの近似因子がすべて 1 次式の場合には Durand-Kerner 法 [6] となる．$N=2$ のときには Grau の方法は文献 [17] の方法と一致する．この方法は 2 次収束であるが，有理 Hermite 補間式を用いることで任意の収束次数の方法に拡張できる ([4]).

初期近似因子の推定では与えられた領域内のすべての零点，または極を求める大域的な方法が用いられる ([5, 12, 19])．領域内に近接した零点があるときには，領域内のすべての零点を求めることは悪条件問題となる．これに対して領域内の近接した零点の重心とそのクラスタ内に含まれる零点の個数を求めることは，クラスタが互いによく分離されていれば悪条件とはならない．クラスタを求める方法 ([9, 11, 15]) は因子を求める方法の初期近似因子を求めるために利用できる．

次節では解析関数 $f(z)$ の 1 つの因子に収束する多項式列を求める方法を示す．第 3 節では因子に対する不動点反復公式を示す．この公式に基づいて $f(z)$ の因子を含む多項式の集合を求める方法について考察する．第 4 節では複素円板演算を用いて因子を求める方法を提案する．第 5 節ではこの方法を用いたいくつかの数値例を示す．

2 因子を求める方法

まず，$f(z)$ が $m+n$ 次の多項式の場合について考える．$p^*(z)$ は m 次のモニック多項式で，$q^*(z)$ は $p^*(z)$ と共通因子を持たない n 次の多項式とし，$f(z)=p^*(z)q^*(z)$ とする．$p(z)$ と $q(z)$ はそれぞれ $p^*(z)$ と $q^*(z)$ の近似因子とする．Samelson の方法 [17] は $p^*(z)$ に対する修正された近似因子 $p(z)+s(z)$ を次式を，満たす多項式 $s(z)$，$t(z)$ から求める．

$$sq+tp=r, \quad \deg s<m, \quad \deg t<n, \tag{1}$$

ここで $r(z)=f(z)-p(z)q(z)$．多項式 s と t は p と q が互いに素であれば一意に求められる．式 (1) から s と t の係数に関する連立一次方程式が導かれる．これらの係数はまた Euclid の互除法によっても求められる ([16, 20])．

関数 g は p の零点上で有限な値をとるものとし，v は $g-v$ が p で割り切れるような高々 $\deg p-1$ 次の多項式とする．このとき $v=\mathrm{mod}(g,p)$ と表すことにする．g が多項式のときには $\mathrm{mod}(g,p)$ はちょうど g を p で割った剰余多項式となる．式 (1) から

$$\left(\frac{r}{q}\right)-s=p\left(\frac{t}{q}\right), \quad \deg s<\deg p$$

を得る．そのため $s=\mathrm{mod}(r/q,p)$ と表される．

文献 [16, 20] で示された次の補題は本論文で述べる因子を求める方法において本質的である．同様の結果は文献 [18] でも示されている．多項式に対して記号 $\|\cdot\|$ はその係数のベクトルに対する 1 ノルムとする．

補題 2.1 p と q はそれぞれ m 次，n 次の互いに素な多項式とする．r は高々 $m+n$ 次の多項式とする．もし $\|p\|=O(1)$，$\|q\|=O(1)$，および十分に小さな $\varepsilon>0$ について $\|r\|=O(\varepsilon)$ であれば $\|s\|=O(\varepsilon)$，$\|t\|=O(\varepsilon)$．

式 (1) を次のように繰り返し適用することで多項式の列 $\{s^{(k)}\}$ と $\{t^{(k)}\}$ を得る．

$$s^{(k)}(q+t^{(k-1)})+t^{(k)}p=r, \quad k=1,2,\ldots, \tag{2}$$

ここで $t^{(0)}\equiv 0$．

多項式 $s^{(k)}$，$t^{(k)}$ は次の性質を持っている．

補題 2.2 $s^{(k)}$ と $t^{(k)}$ は式 *(2)* で求められるとする．補題 *2.1* と同様の仮定の下で $k=1,2,\ldots$ に対して

$$\|s^{(k)}-s^{(k-1)}\|=O(\varepsilon^k), \quad \|t^{(k)}-t^{(k-1)}\|=O(\varepsilon^k) \tag{3}$$

である．ここで $s^{(0)}\equiv 0$, $t^{(0)}\equiv 0$．

証明　$k=1$ の場合には補題 2.1 から明らかである．式 (3) は $k-1$ まで成り立つとする．このとき $\|s^{(k-1)}-s^{(k-2)}\|=O(\varepsilon^{k-1})$，$\|t^{(k-1)}-t^{(k-2)}\|=O(\varepsilon^{k-1})$．式 (2) から

$$(s^{(k)}-s^{(k-1)})q+(t^{(k)}-t^{(k-1)})p=s^{(k)}(t^{(k-1)}-t^{(k-2)}) \tag{4}$$

を得る．$\|r\|=O(\varepsilon)$ であるので，補題 2.1 より $\|s^{(k)}\|=O(\varepsilon)$ となる．よって $\|s^{(k)}(t^{(k-1)}-t^{(k-2)})\|=O(\varepsilon^k)$．ゆえに，式 (4) より式 (3) を得る．□

次の定理は式 (2) により因子が求められることを示している．

定理 2.3 もし $\|r\| = O(\varepsilon)$ ならば式 *(2)* で求められる $s^{(k)}$ について

$$\|p + s^{(k)} - p^*\| = O(\varepsilon^{k+1}) \tag{5}$$

である．

証明　式 (2)，および $f = p^*q^*$ より

$$(p + s^{(k)} - p^*)(q + t^{(k)}) + (q + t^{(k)} - q^*)p^* = s^{(k)}(t^{(k)} - t^{(k-1)}). \tag{6}$$

補題 2.2 より

$$\|s^{(k)}(t^{(k)} - t^{(k-1)})\| = O(\varepsilon^{k+1}).$$

$\|t^{(k)}\| = O(\varepsilon)$ であるので十分に小さな ε について $q + t^{(k)}$ と p^* は互いに素であるとみなせる．ゆえに式 (6) より式 (5) を得る．　□

q と r を $f = qp + r$, $\deg r < \deg p$ であるように選んだとき，$\|p - p^*\| = O(\varepsilon)$ であるので $\|r\| = O(\varepsilon)$ となる．そのため初期近似因子 p が p^* に十分に近ければ多項式列 $p + s^{(k)}$ は p^* に収束する．$k = 0$ で $m = 2$ のときにはこの方法は Bairstow 法に一致する．以後 $p^{(k)} := p + s^{(k)}$，$q^{(k)} := q + t^{(k)}$ と表すことにする．

ここで f が $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ と表される場合を考える．R は正の実数とする．f は $|z| < R$ で解析的でその零点 $\zeta_i, i = 1, 2, \ldots$ は $|\zeta_1| \le \cdots \le |\zeta_m| < |\zeta_{m+1}| \le \cdots$ であるとする．また，$\|f\| = O(1)$ とする．$p^* = \prod_{i=1}^{m}(z - \zeta_i)$ とし，q^* は $f = p^*q^*$ であるような解析関数とする．

$\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ は原点を中心として半径 $\delta < R$ の小さな円内に分布してクラスタを形成しているものとする．このとき $p = z^m$ は因子 p^* に対して十分によい近似因子とみなすことができる．このとき式 (2) を満たす $s^{(k)}$，$t^{(k)}$ は以下のように置くことで求めることができる．

$$r(z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k, \quad q(z) = \sum_{k=m}^{n+m} c_k z^{k-m}. \tag{7}$$

さらに

$$h(z) = \sum_{k=m+n+1}^{\infty} c_k z^{k-m-n-1} \tag{8}$$

とすると

$$f = p^*q^* = r + pq + z^{m+n+1}h \tag{9}$$

となる．ここで

$$s^{(k)}(z) = \sigma_0^{(k)} + \sigma_1^{(k)} z + \cdots + \sigma_{m-1}^{(k)} z^{m-1}$$

および

$$t^{(k)}(z) = \tau_0^{(k)} + \tau_1^{(k)} z + \cdots + \tau_{n-1}^{(k)} z^{n-1}$$

とおく．式(2)の係数を比較することで次の関係を得る．

$$\begin{pmatrix} c_m^{(k-1)} & & & \\ c_{m+1}^{(k-1)} & c_m^{(k-1)} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{2m-1}^{(k-1)} & \cdots & \cdots & c_m^{(k-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0^{(k)} \\ \sigma_1^{(k)} \\ \vdots \\ \sigma_{m-1}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{m-1} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} \tau_0^{(k)} \\ \tau_1^{(k)} \\ \vdots \\ \tau_{n-1}^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{2m}^{(k-1)} & c_{2m-1}^{(k-1)} & \cdots & c_{m+1}^{(k-1)} \\ c_{2m+1}^{(k-1)} & c_{2m}^{(k-1)} & \cdots & c_{m+2}^{(k-1)} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{2m+n-1}^{(k-1)} & c_{2m+n-2}^{(k-1)} & \cdots & c_{m+n}^{(k-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0^{(k)} \\ \sigma_1^{(k)} \\ \vdots \\ \sigma_{m-1}^{(k)} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

ここで $c_{m+j}^{(k-1)} = c_{m+j} + \tau_j^{(k-1)}$, $j \geq 0$.

$1/f = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ とする．$m = 1$ のとき，式(10)と(11)より $\sigma_0^{(k)} = -d_{k-1}/d_k$ が得られる．よって $p^{(k)} = z + \sigma_0^{(k)}$ は $z = 0$ における f の $[1/k-1]$-パデ近似式の分子である．

f が多項式でないときには方法の収束を考えるときに $z^{m+n+1}h$ の項を考慮する必要がある．

定理 2.4 $p = z^m$ とし，r, q, h は式 *(7)* と *(8)* で定義されているとする．$n = mK - 1$ とする．もし $\|\Delta p\| := \|p - p^*\| = O(\varepsilon)$ ならば

$$\|p^{(k)} - p^*\| = O(\varepsilon^{\hat{k}+1})$$

ここで $\hat{k} = \min(k, K)$.

証明

$$f = p^* q^* = (p - \Delta p) q^* = z^m q^* - \Delta p q^*$$

であり，$\|q^*\| = O(1)$ であることから

$$\|r\| = O(\|\Delta p\|) = O(\varepsilon).$$

式(2)，(9)より

$$(p^{(k)} - p^*) q^{(k)} + (q^{(k)} - q^*) p^* = s^{(k)} (t^{(k)} - t^{(k-1)}) - z^{m+n+1} h. \tag{12}$$

h は $|z| < R$ で解析的であり，p^* のすべての零点は半径 $\delta < R$ の円内にあるため，$w = \mathrm{mod}(z^{m+n+1}h, p^*)$ は求めることができる．$u = (z^{m+n+1}h - w)/p^*$ とおくと

$$z^{m+n+1} h = w + p^* u.$$

これを式(12)に代入することで

$$(p^{(k)} - p^*) q^{(k)} + (q^{(k)} - q^* + u) p^* = s^{(k)} (t^{(k)} - t^{(k-1)}) - w \tag{13}$$

を得る． $\mathrm{mod}(z^{m+n+1}, p^*) = \mathrm{mod}((\Delta p)^{K+1}, p^*)$ であるので

$$\|w\| = \|\mathrm{mod}(z^{m+n+1}h, p^*)\| = O(\varepsilon^{K+1}).$$

さらに補題2.2より

$$\|s^{(k)}(t^{(k)} - t^{(k-1)})\| = O(\varepsilon^{k+1}).$$

これらの関係より結果を得る． □

これより p が p^* に十分に近く，q の次数が十分に大きければ $p^{(k)}$ は p^* に近づくことがわかる．

3 近似因子の精度保証

この節では前節で示した方法により求めた近似因子に精度保証を与える方法について述べる．

式 (13) より p^* に関する次の不動点反復公式を得る．

定理 3.1 $w = \mathrm{mod}(z^{m+n+1}h, p^*)$ とする．もし $q^{(k)}$ と p^* が互いに素であれば

$$p^* = p^{(k)} - \mathrm{mod}\left(\frac{s^{(k)}(t^{(k)} - t^{(k-1)}) - w}{q^{(k)}}, p^*\right). \tag{14}$$

$\boldsymbol{p}$ は $p^* \in \boldsymbol{p}$ であるような多項式の集合とし，$\boldsymbol{w}$ は $w \in \boldsymbol{w}$ であるような多項式の集合とする．

定理 3.2 十分に小さな $\varepsilon > 0$ について $\|r\| = O(\varepsilon)$ とする．もし q が $\tilde{p} \in \boldsymbol{p}$ に含まれるすべての多項式と互いに素であれば

$$p^* \in \boldsymbol{p}^{(k)} - \mathrm{mod}\left(\frac{s^{(k)}(t^{(k)} - t^{(k-1)}) - \boldsymbol{w}}{q^{(k)}}, \boldsymbol{p}\right). \tag{15}$$

証明　$\|t^{(k)}\| = O(\varepsilon)$ であり，q は $\tilde{p} \in \boldsymbol{p}$ に含まれるすべての多項式と互いに素であることから，十分に小さな ε について $q^{(k)} = q + t^{(k)}$ は $\tilde{p}$ と互いに素であるとみなせる．ゆえに

$$\mathrm{mod}\left(\frac{s^{(k)}(t^{(k)} - t^{(k-1)}) - w}{q^{(k)}}, \tilde{p}\right)$$

は一意に求めることができる．式 (14) において $\boldsymbol{p}$ を p^* と置き換え，$\boldsymbol{w}$ を w と置き換えると inclusion property によって式 (15) を得る． □

よってもし $\boldsymbol{w}$，および

$$\boldsymbol{s}^{(k)}q^{(k)} + \boldsymbol{t}^{(k)}\boldsymbol{p} = s^{(k)}(t^{(k)} - t^{(k-1)}) - \boldsymbol{w}$$

であるような $\boldsymbol{s}^{(k)}$，$\boldsymbol{t}^{(k)}$ を求めることができれば

$$p^* \in \boldsymbol{p}^{(k)} := \boldsymbol{p} + \boldsymbol{s}^{(k)}$$

となる．

ここで $\boldsymbol{w}$ を求める方法について述べる．行列

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0/a_m \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1/a_m \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2/a_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m-1}/a_m \end{pmatrix}$$

は多項式

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m \quad (a_m \neq 0).$$

の companion 行列とする．記号 $\hat{p}$ は多項式 $p(z)$ の係数のベクトル $(a_0, a_1, \ldots, a_m)^T$ を表すものとする．

次の補間に関する性質が文献 [18] で示されている．

定理 3.3 p は m 次の多項式とし $z_1, \ldots, z_m$ は p の異なる零点とする．g は z_i に極を持たない有理関数とする．多項式 v の係数は

$$\hat{v} = g(C_p)e_1$$

とする．ここで $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$ とする．このとき

$$v(z_i) = g(z_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

z_i のいくつかが重なっているときでも多項式 v は求めることができる ([18])．このとき v は p の零点上での g の適当な Hermite 補間式となる．これは $g - v$ が p で割り切れることを意味し，ゆえに $v = \mathrm{mod}(g, p)$ である．

ここで次の表記法を導入する．$A = (\alpha_{ij})$ に対して，$|A|$ は $|\alpha_{ij}|$ を要素に持つ行列とする．表記 $A \leq B$ はすべての i と j について要素が $\alpha_{ij} \leq \beta_{ij}$ であることを表す．ここで $B = (\beta_{ij})$．また複素数の閉集合 $\boldsymbol{\alpha}$ に対して $|\boldsymbol{\alpha}| := \max_{\alpha \in \boldsymbol{\alpha}} |\alpha|$ とする．

定理 3.4 $0 < \eta < 1$ について $|\gamma_k| < \eta^k$ とし，$h = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k$ とする．$v = \mathrm{mod}(h, p^*)$ とし，$\hat{v}$ は v の係数のベクトルとする．もし $|C\boldsymbol{p}|$ のスペクトル半径 $\rho(|C\boldsymbol{p}|)$ が η^{-1} よりも小さいならば

$$|\hat{v}| \leq (I - \eta|C\boldsymbol{p}|)^{-1} e_1.$$

証明　$v^{(k)}(z) = \mathrm{mod}(z^k, p^*)$ とする．定理 3.3 により，$v^{(k)}$ の係数のベクトル $\hat{v}^{(k)}$ は

$$\hat{v}^{(k)} = (C_{p^*})^k e_1$$

によって得られる．ゆえに

$$\hat{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \hat{v}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (C_{p^*})^k e_1.$$

すべての k について $|\gamma_k| < \eta^k$ であるので $p^* \in \boldsymbol{p}$ に対して $|C_{p^*}| \le |C\boldsymbol{p}|$ であり，よって

$$|\hat{v}| \le \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k |C_{p^*}|^k e_1 \le \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k |C\boldsymbol{p}|^k e_1.$$

仮定 $\rho(|C\boldsymbol{p}|) < \eta^{-1}$ により $\sum_{k=0}^{\infty} \eta^k |C\boldsymbol{p}|^k$ は存在する (たとえば [8] を参照)．よって定理の結果を得る． □

もし多項式 $\boldsymbol{v}$ を

$$|\hat{\boldsymbol{v}}| = (I - \eta|C\boldsymbol{p}|)^{-1} e_1$$

となるように定義すると上記の定理より $v \in \boldsymbol{v}$ を得る．よって $\boldsymbol{w} = \mathrm{mod}(z^{m+n+1}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p})$ によって $\boldsymbol{w}$ を得る．$\boldsymbol{p}$ の係数を用いて $|C\boldsymbol{p}|$ に対応した多項式の零点を含む円の半径の上限を見積もる方法がある（たとえば [13] を参照）．よってもし集合 $\boldsymbol{p}$ に属するすべての多項式の零点が小さな半径の円内に収まるならば $\rho(|C\boldsymbol{p}|)$ はまた小さいものとみなせる．

4 アルゴリズム

複素円板演算を用いて因子を求めるアルゴリズムを示す．中心が $c = \mathrm{mid}(\boldsymbol{z})$，半径が $d = \mathrm{rad}(\boldsymbol{z})$ の複素円板 $\boldsymbol{z} := \{z \mid |z - c| \le d\}$ を $\boldsymbol{z} := \{c, d\}$ と表記することにする．多項式 $\boldsymbol{p} = \sum_{k=0}^{m} \boldsymbol{a}_k z^k$ に対して，表記 $\mathrm{mid}(\boldsymbol{p})$ は多項式 $\sum_{k=0}^{m} \mathrm{mid}(\boldsymbol{a}_k) z^k$ を表すものとする．

係数 $\boldsymbol{c}_k$, $0 \le k \le m+n$ が与えられているとする．$k > m+n$ については $|\boldsymbol{c}_k| < M\eta^{k-m-n-1}$ を満たす M と η だけがわかっているものとする．f の m 個の零点を含む円の半径 δ が得られているものとする．このとき以下のアルゴリズムは複素円板を係数とする f の因子を含む多項式を与える．

ALGORITHM

Input: $\{\boldsymbol{c}_k\}_{k=0}^{m+n}$, M, η, δ, m, n, ϵ, k_{max}
Output: $\boldsymbol{p}^{(k)}$
$p \leftarrow z^m$
$r \leftarrow \sum_{k=0}^{m-1} \boldsymbol{c}_k z^k$
$q \leftarrow \sum_{k=m}^{m+n} \boldsymbol{c}_k z^{k-m}$
$\boldsymbol{p} \leftarrow (z - \{0, \delta\})^m$
$s^{(0)} \leftarrow 0$
$t^{(0)} \leftarrow 0$
for $k = 1, 2, \ldots, k_{max}$
  compute $s^{(k)}$ and $t^{(k)}$ such that
    $s^{(k)}(q + \mathrm{mid}(t^{(k-1)})) + t^{(k)}p = r$
  If $\|s^{(k)} - s^{(k-1)}\| \le \epsilon$ **then** exit for loop

end for

$\boldsymbol{v} \leftarrow (1, z, \ldots, z^{m-1})(I - \eta|C_{\boldsymbol{p}}|)^{-1}e_1$

$\boldsymbol{w} \leftarrow \mathrm{mod}(Mz^{m+n+1}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p})$

$\boldsymbol{s}^{(k)} \leftarrow \mathrm{mod}\left(\frac{s^{(k)}(t^{(k)}-t^{(k-1)})-\boldsymbol{w}}{q^{(k)}}, \boldsymbol{p}\right)$

$\boldsymbol{p}^{(k)} \leftarrow (p + s^{(k)} - \boldsymbol{s}^{(k)}) \cap \boldsymbol{p}$

5 数値例

数値例はINTLABパッケージ[14]を利用してMATLAB上で複素円板演算を行って求めた．

数値例1.

$$
\begin{aligned}
p^*(z) &= (z-10^{-3})(z+10^{-3}/2)(z-10^{-3}/4) \\
&= z^3 - 7.50 \times 10^{-4}z^2 - 3.75 \times 10^{-7}z + 1.25 \times 10^{-10}
\end{aligned}
$$

とし，

$$
q^*(z) = e^x \prod_{k=1}^{5}(z-k)\prod_{k=1}^{3}(2z+k)
$$

とした．係数c_kは多項式と適当な次数でうち切ったe^xのMaclaurin展開を掛けて求めた．

パラメータは$m=3$, $n=12$, $\delta=10^{-2}$, $\eta=1/2$, $M=1$とした．数値の下線は正しい桁を示している．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}^{(1)} &= z^3 - \{\underline{7.4999}80503774 \times 10^{-4}, 8.5 \times 10^{-8}\}z^2 \\
&\quad -\{\underline{3.74999}0236502 \times 10^{-7}, 8.4 \times 10^{-10}\}z \\
&\quad +\{\underline{1.24999}6747551 \times 10^{-10}, 2.8 \times 10^{-12}\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}^{(2)} &= z^3 - \{\underline{7.50000000}27622 \times 10^{-4}, 1.2 \times 10^{-10}\}z^2 \\
&\quad -\{\underline{3.7500000}13836 \times 10^{-7}, 1.2 \times 10^{-12}\}z \\
&\quad +\{\underline{1.25000000}4609 \times 10^{-10}, 4.0 \times 10^{-15}\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}^{(3)} &= z^3 - \{\underline{7.4999999999}56 \times 10^{-4}, 1.9 \times 10^{-13}\}z^2 \\
&\quad -\{\underline{3.7499999999}78 \times 10^{-7}, 1.9 \times 10^{-15}\}z \\
&\quad +\{\underline{1.24999999999}3 \times 10^{-10}, 6.3 \times 10^{-18}\}.
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{p}^{(3)}$はp^*を含んでおり，その係数の円板の半径は十分に小さくなっていることがわかる．

数値例 2.

$$p^*(z) = (z - 10^{-3}) \left(z + \frac{10^{-3}}{2}\right) \left(z - \frac{10^{-3}}{4}\right) \left(z + \frac{10^{-3}}{6}\right) \left(z - \frac{10^{-3}}{8}\right)$$

とする．q^* は数値例 1 と同様とした．パラメータは $m = 5$, $n = 15$, $\delta = 10^{-2}$, $\eta = 1/2$, $M = 1$ とした．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}^{(1)} &= z^5 - \{\underline{7.08331}6917107 \times 10^{-4}, 1.4 \times 10^{-7}\}z^4 \\
&\quad -\{\underline{4.27082}3418524 \times 10^{-7}, 2.7 \times 10^{-9}\}z^3 \\
&\quad +\{\underline{1.249997}100176 \times 10^{-10}, 2.6 \times 10^{-11}\}z^2 \\
&\quad +\{\underline{1.302080}955610 \times 10^{-14}, 1.3 \times 10^{-13}\}z \\
&\quad -\{\underline{2.610}812137458 \times 10^{-18}, 2.6 \times 10^{-16}\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}^{(2)} &= z^5 - \{\underline{7.0833333}55294 \times 10^{-4}, 1.9 \times 10^{-10}\}z^4 \\
&\quad -\{\underline{4.27083333}46599 \times 10^{-7}, 3.6 \times 10^{-12}\}z^3 \\
&\quad +\{\underline{1.25000000}03879 \times 10^{-10}, 3.6 \times 10^{-14}\}z^2 \\
&\quad +\{\underline{1.30208333}7377 \times 10^{-14}, 1.8 \times 10^{-16}\}z \\
&\quad -\{\underline{2.60416667}4751 \times 10^{-18}, 3.5 \times 10^{-19}\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}^{(3)} &= z^5 - \{\underline{7.0833333333}01 \times 10^{-4}, 2.7 \times 10^{-13}\}z^4 \\
&\quad -\{\underline{4.2708333333}14 \times 10^{-7}, 5.4 \times 10^{-15}\}z^3 \\
&\quad +\{\underline{1.24999999999}4 \times 10^{-10}, 5.3 \times 10^{-17}\}z^2 \\
&\quad +\{\underline{1.3020833333}27 \times 10^{-14}, 2.6 \times 10^{-19}\}z \\
&\quad -\{\underline{2.6041666666}55 \times 10^{-18}, 5.3 \times 10^{-22}\}.
\end{aligned}$$

数値例 3.

$$\begin{aligned}
f &= (\sinh(2z^2) + \sinh(10z) - 1) \times (\sinh(2z^2) + \sinh(10z) - 1.01) \times \\
&\quad (\sinh(2z^2) + \sinh(10z) - 1.02)
\end{aligned}$$

とする．この関数は単位円内部に 21 個の零点を持つ．これらは 3 個ずつが近接しており，7 個のクラスタに分かれる．この関数は文献 [11, 15] において各クラスタの中心を求める方法の例として示された．これらの文献の数値例では一つのクラスタの重心として $z = 8.777826159 \times 10^{-2}$ を与えており，またそのクラスタの半径は $O(10^{-3})$ と推定していた．また，このクラスタと最寄りのクラスタとの中心間の距離は約 0.32 と見積もられていた．

これらの結果から，本論文では係数 c_k を半径 0.1 の円周上に等間隔点に分布した 64 点での関数値から FFT によって求めた．数値例の結果を確かめるために，Mathematica の多倍長演算によって零点を求めることで次のような p^* をみつもった．

$$\begin{aligned} p^* &= z^3 + 7.3711680121192 \times 10^{-4} z^2 \\ &\quad -4.7678119480547 \times 10^{-5} z \\ &\quad -1.1197980731788 \times 10^{-8}. \end{aligned}$$

パラメータは $m = 3$, $n = 12$, $\delta = 10^{-1}$, $\eta = 0.5$, $M = 1$ とした．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}^{(1)} &= z^3 + \{\underline{7.3711}670951 \times 10^{-4}, 1.6 \times 10^{-7}\} z^2 \\ &\quad -\{\underline{4.767811}3222 \times 10^{-5}, 1.4 \times 10^{-8}\} z \\ &\quad -\{\underline{1.1197}979540 \times 10^{-8}, 4.4 \times 10^{-10}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}^{(2)} &= z^3 + \{\underline{7.3711680}211 \times 10^{-4}, 5.4 \times 10^{-11}\} z^2 \\ &\quad -\{\underline{4.767811947}8 \times 10^{-5}, 4.8 \times 10^{-12}\} z \\ &\quad -\{\underline{1.1197981}010 \times 10^{-8}, 1.6 \times 10^{-13}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}^{(3)} &= z^3 + \{\underline{7.3711680}206 \times 10^{-4}, 3.9 \times 10^{-12}\} z^2 \\ &\quad -\{\underline{4.767811947}4 \times 10^{-5}, 3.5 \times 10^{-13}\} z \\ &\quad -\{\underline{1.1197981}009 \times 10^{-8}, 2.0 \times 10^{-14}\}. \end{aligned}$$

6 おわりに

本論文では解析関数 $f(z)$ の多項式因子 $p^*(z)$ を求める反復法を示した．$p^*(z)$ に関する不動点反復公式を示し，これに基づいて $p^*(z)$ を含む多項式の集合を求める方法を提案した．この方法は $f(z)$ の近接解に対して精度保証を与えるときに有効である．

参考文献

[1] Bairstow, L.: 1914-1995, 'The solution of algebraic equations with numerical coefficients in the case where several pairs of complex roots exist', *Advisory Committee for Aeronautics*, pp. 239–252.

[2] Bauer, F. L., Samelson, K.: 1957, 'Polynomkerne und iterationsverfahren' *Math. Z.* **Vol. 67**, pp. 93–98.

[3] Bini, D. A., Gemignani, L., Meini, B.: 1998, 'Factorization of analytic functions by means of Koenig's theorem and Toeplitz computations' (preprint).

[4] Carstensen, C., Sakurai, T.: 1995, 'Simultaneous factorization of a polynomial by rational approximation', *J. Comput. Appl. Math.* **Vol. 61**, pp. 165–178.

[5] Delves, L. M., Lyness, J. N.: 1967, 'A numerical method for locating the zeros of an analytic function', *Math. Comp.* **Vol. 21**, pp. 543–560.

[6] Durand, E.: *Solutions Numeriques des Equations Algebriques*, Masson, Paris, 1960.

[7] Grau, A. A.: 1971, 'The simultaneous Newton improvement of a complete set of approximate factors of a polynomial', *SIAM J. Numer. Anal.* **Vol. 8**, pp. 425–438.

[8] Householder, A. S.: *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell, New York, 1964.

[9] Hribernig, V., Stetter, H. J.: 1997, 'Detection and validation of clusters of polynomial zeros', *J. Symbolic Computation* **Vol. 24**, pp. 667–681.

[10] Jenkins, M. A., Traub, J. F.: 1970, 'A three-stage variable-shift iteration for polynomial zeros and its relation to generalized Rayleigh iteration', *Numer. Math.* **Vol. 14**, pp. 252–263.

[11] Kravanja, P., Sakurai, T., Van Barel, M.: 1998, 'A method for finding clusters of zeros of analytic function', *K.U.Leuven, Dept. Computer Science Report*, TW 280.

[12] Li, T. Y.: 1983, 'On locating all zeros of an analytic function within a bounded domain by a revised Delves/Lyness method', *SIAM J. Numer. Anal.* **Vol. 20**, pp. 865–871.

[13] Petković, M., Herceg, D., Ilić, S.: *Point Estimation Theory and its Applications*, Institute of Mathematics, Movi Sad, 1997.

[14] Rump, S. M.: 'INTLAB - INTerval LABoratory', http://www.ti3.tu-harburg.de/˜rump/ intlab/index.html.

[15] Sakurai, T., Torii, T., Ohsako, N., Sugiura, H.: 1996, 'A method for finding clusters of zeros of analytic function', *Proc. ICIAM'95*, Hamburg, pp. 515–516.

[16] 園田信吾, 櫻井鉄也, 杉浦洋, 鳥居達生: 1991, 分割統治法による多項式の因数分解, 日本応用数理学会論文誌, **Vol. 1** (4), pp. 277–290.

[17] Stewart, G.W.: 1970, 'On Samelson's iteration for factoring polynomials', *Numer. Math.* **Vol. 15**, pp. 306–314.

[18] Stewart, G. W.: 1971, 'On a companion operator for analytic functions', *Numer. Math.* **Vol. 18**, pp. 26–43.

[19] Torii, T., Sakurai, T.: 1993, 'Global method for the poles of analytic function by rational interpolant on the unit circle', *World Sci. Ser. Appl. Anal.* **Vol. 2**, pp. 389–398.

[20] Torii, T., Sakurai, T., Sugiura, H.: 1993, 'An application of Sunzi's theorem for solving algebraic equations', *Proc. 1st China-Japan Seminar on Numerical Mathematics*, pp. 155–167.