

### 3次元直方体の intersection graph に対する 独立点集合問題の近似困難について

長島 弘幸 (Hiroyuki Nagashima),  
山崎 浩一 (Koichi Yamazaki)

群馬大学 工学部 情報工学科  
群馬県 桐生市 天神町 1-5-1

{hiroyuki,koichi}@comp.cs.gunma-u.ac.jp

キーワード: 近似困難, PTAS, 独立点集合問題, intersection graph

#### 1 はじめに

$n$ 次元直方体における intersection graph は, その応用上の興味から古くから研究されている [1, 7]. 特に2または3次元における独立点集合問題に関する研究は盛んで [2, 3, 4, 5, 8, 10]. VLSI チップや生物学上への応用が良く知られている (例えば, [5] 9.3.3 節). 2次元直方体における intersection graph の最大独立点集合問題に対し, 何も制限がつかない場合は NP 困難で  $O(\log n)$  近似可能, 弱非包含 (詳しくは定義を参照) の制限がつくと定数近似可能, サイズが全て等しいという制限の下では, PTAS を持つことが知られている. 弱非包含の制限の下で, PTAS を持つか否かはまだ知られていない. 我々の研究の目的は, 2次元で弱非包含の制限の下で, PTAS を持つか否かの判定である. 今回, 3次元において弱非包含の制限の下でも PTAS を持たないことを示した.

#### 2 諸定義

本稿では, 自己ループと多重辺を含まない, 無向で連結なグラフのみを扱う. グラフ  $G$  に対して, その頂点集合を  $V(G)$  で, 辺集合を  $E(G)$  で表す. グラフ  $G$  に対して, ある頂点集合  $I \subseteq V(G)$  が  $\forall u, v \in I$  について  $\{u, v\} \notin E(G)$  を満たすとき,  $I$  を  $G$  の 独立点集合 と呼ぶ.  $G$  の最大の独立点集合を, 最大独立点集合 と呼び,  $\alpha(G)$  で表す.

$\mathcal{F} = \{S_1, \dots, S_k\}$  を, ある集合  $S$  の空でない部分集合の族とする. ここでは, 集合  $S$  を host, 部分集合  $S_i$  を object という.  $(\mathcal{F}, S)$  を 表現 と呼び, 文脈から明らかな場合は  $\text{host } S$  を省略し単に  $\mathcal{F}$  と略記する.  $V(G) = \mathcal{F}$  かつ, 任意の  $S_i, S_j (i \neq j)$ ,  $\{S_i, S_j\} \in E(G)$  iff  $S_i \cap S_j \neq \emptyset$  を満たすとき, グラフ  $G$  を  $(\mathcal{F}, S)$  により表現される intersection graph と呼び,  $G(\mathcal{F}, S)$  または単に  $G(\mathcal{F})$  と表す.

特に本稿では,  $\mathbb{R}^n$  上の  $n$ 次元直方体 (主に  $n = 3$ ) の intersection graph を扱う.  $R = \{(x_1, \dots, x_n) \mid$

$a_i \leq x_i \leq b_i, a_i, b_i \in \mathbb{R} (1 \leq i \leq n)\}$  を  $n$ 次元直方体と呼ぶ.  $\{R \mid R \text{ は } n \text{次元直方体}\}$  を  $P_n$  で表す.  $\mathcal{R}$  は  $P_n$  のある有限部分集合とする.  $R \in \mathcal{R}$  から, ある座標軸  $l$  への射影を  $I_l(R)$  で表す. 任意の  $R_i, R_j (i \neq j) \in \mathcal{R}$  と任意の座標軸  $l$  に対し,  $I_l(R_i) \not\subseteq I_l(R_j)$  となるとき,  $\mathcal{R}$  を 弱非包含 と呼ぶ.

3DWNP-MIS とは,  $G(\mathcal{R})$  の独立点集合に関する最適化問題のことで, ここで  $\mathcal{R}$  は3次元の弱非包含の有限集合  $\mathcal{R} \subset P_3$  である.

#### 3DWNP-MIS

インスタンス :  $P_3$  の弱非包含な有限部分集合  $\mathcal{R}$ ,  
実行可能解 :  $G(\mathcal{R})$  の独立点集合  $I$ ,  
評価 :  $I$  のサイズ.

本稿では,  $\mathcal{R}$  の変数も高々5つの節にしか現れない  $n$ 変数,  $m$ 節の3SAT を考える. この特別な形をした3SAT を 3SAT-5 と呼ぶ.

#### 3 結果

##### 変換グラフの構成法

まず, ある3SAT-5のインスタンスから変換グラフ  $G$  の構成方法を述べる. 節  $C_i$  に対応するグラフ  $T_i$  (図1左) と変数  $x_j$  に対応するグラフ  $W_j$  (図1右), そしてそれらをいくつかの辺で結ぶことにより構成される.

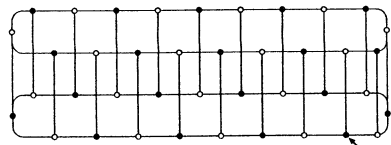


図1: グラフ  $T_i$  と  $W_j$

すなわち, 各  $C_i (1 \leq i \leq m)$  に対応するグラフ  $T_i$  を  $V(T_i) = \{p_i^1, p_i^2, p_i^3, q_i^1, q_i^2, q_i^3, r_i^1, r_i^2, r_i^3\}$ ,  $E(T_i) = \{\{x_i^1, x_i^2\}, \{x_i^2, x_i^3\} \mid x \in \{p, q, r\}\} \cup$

$\{\{p_i^3, q_i^3\}, \{q_i^3, r_i^3\}, \{r_i^3, p_i^3\}\}$ . とする.  $l = 22$  とする. あるサイクル  $W_{top}$  を,  $V(W_{jtop}) = \{w^{j1}, \dots, w^{jl}\}$ ,  $E(W_{jtop}) = \{\{w^{ji}, w^{ji+1}\} \mid \forall 1 \leq i \leq l - 1\} \cup \{\{w^{jl}, w^{j1}\}\}$  とし, 同様にあるサイクル  $W_{bottom}$  を,  $V(W_{jbottom}) = \{w_{j1}, \dots, w_{jl}\}$ ,  $E(W_{jbottom}) = \{\{w_{ji}, w_{ji+1}\} \mid \forall 1 \leq i \leq l - 1\} \cup \{\{w_{jl}, w_{j1}\}\}$  とする. 各変数  $x_j (1 \leq j \leq n)$  に対応するグラフ  $W_j$  を  $V(W_j) = V(W_{jtop}) \cup V(W_{jbottom})$ ,  $E(W_j) = E(W_{jtop}) \cup E(W_{jbottom}) \cup \{\{w^{ji}, w_{ji}\} \mid \forall 1 \leq i \leq l\}$ . とする.

$$\text{グラフ } V(\hat{G}) = \bigcup_{i=1}^m V(T_i) \cup \bigcup_{j=1}^n V(W_j),$$

$E(\hat{G}) = \bigcup_{i=1}^m E(T_i) \cup \bigcup_{j=1}^n E(W_j)$  を (変換グラフ  $G$  の

一歩手前の) 中間グラフ  $\hat{G}$  と呼ぶ. 中間グラフ  $\hat{G}$  から変換グラフ  $G$  を以下のように構成する:  $\{w_{jk} \mid k \text{ は偶数 (奇数)}\}$  を  $W_{jbottom}^{even}$  ( $W_{jbottom}^{odd}$ ) で表す. 以下を満たすとき  $v$  は フリー という.

$$\begin{cases} \bigcup_{1 \leq i \leq m} \{p_i^1, q_i^1, r_i^1\} \cap N(v) = \emptyset & v \in W_{jbottom} \\ W_{jbottom} \cap N(v) = \emptyset & v \in \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{p_i^1, q_i^1, r_i^1\} \end{cases}$$

各  $C_i, x_j (x_j \in C_i)$  に対し, 以下の操作を繰り返す.

操作 節  $C_i$  が変数  $x_j$  を肯 (否) 定の形でもつとき,  $W_{jbottom}^{even}$  ( $W_{jbottom}^{odd}$ ) のあるフリーな頂点と  $\{p_i^1, q_i^1, r_i^1\}$  のあるフリーな頂点とを辺で結ぶ.

この操作の繰り返しにより最終的に得られるグラフを変換グラフ  $G$  とする. □

$G$  を変換グラフとし  $I$  を  $G$  の独立点集合とする. 全ての  $i (1 \leq i \leq n)$  において  $|V(W_i) \cap I| = \frac{|V(W_i)|}{2}$  であるとき,  $I$  は fixed form という. □

補題 3.1 変換グラフは 3次元直方体の *intersection representation* をもつ.

証明 具体例を示し証明は省く. 例えば図 2 に示される変換グラフ  $G$  は, 図 4 に示すように, 立方体でかつ弱非包含で構成することができる.

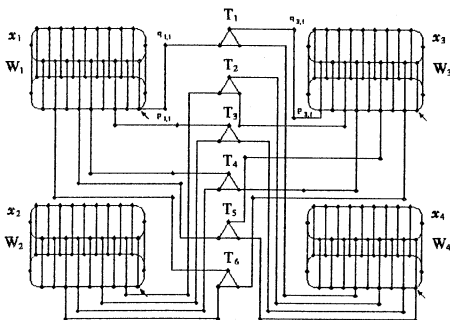


図 2: 変換グラフ  $G$

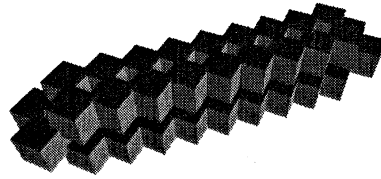


図 3: 変換グラフの中の  $W_j$  の立方体でかつ弱非包含での表現

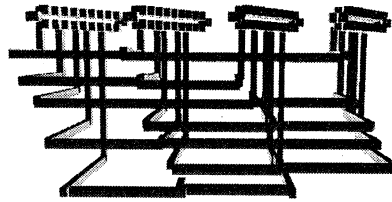


図 4: 変換グラフ  $G$  の立方体でかつ弱非包含での表現

補題 3.2  $G$  を変換グラフとし  $I$  を  $G$  の独立点集合とする. このとき,  $|I'| \geq |I|$  かつ  $I'$  は fixed form となるような  $G$  の独立点集合  $I'$  が存在する.

補題 3.3  $G$  を 3SAT-5 のあるインスタンスの変換グラフとし,  $I$  を  $G$  の fixed form な独立点集合とする. このとき,  $|\{T_i \mid V(T_i) \cap I = 4\}| = \max_{\text{all assignments}} |\{C_i \mid C_i \text{ は真}\}|$ .

証明 各  $W_j (1 \leq j \leq n)$  に対し,  $I$  は fixed form なので  $W_{jbottom}^{odd} \subset I$  または  $W_{jbottom}^{even} \subset I$  のどちらか一方が必ず成り立つ. 各  $W_j$  に対し,  $W_{jbottom}^{odd}$  ( $W_{jbottom}^{even}$ ) が独立点として選択されているとき  $W_j$  に対応する変数  $x_j$  に true(false) を割り当てることにより, 変数への true, false のある割当が得られる. この割当を  $A$  で表す.

$C_i = (l_a, l_b, l_c)$  ( $l_a, l_b, l_c$  はリテラル) をある節とし, 節  $C_i$  に対応するグラフを  $T_i$ , リテラル  $l_a, l_b, l_c$  に対応する変数をそれぞれ  $W_a, W_b, W_c$  とする.  $T_i$  の頂点と隣接している  $W_x (x \in \{a, b, c\})$  の頂点を  $w_x$  で表す.

このとき,  $w_a, w_b, w_c \in I$  iff  $V(T_i) \cap I = 3$ .  
 $\neg(w_a, w_b, w_c \in I)$  iff  $V(T_i) \cap I = 4$  が成り立つ.  
 すなわちこれは,  $A$  において, 節  $C_i$  が真になる必要十分条件が  $V(T_i) \cap I = 4$  であることを意味する.  $\square$

例 次にあげる 3SAT-5 のインスタンス  $S_1$  に対し, 図 5 の変換グラフを得る.

$$S_1 = (x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$$

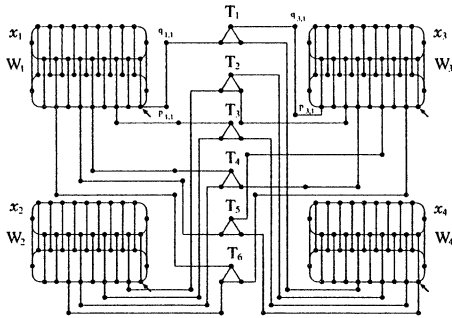


図 5:  $S_1$  に対する変換グラフ

$T_1, \dots, T_6$  と  $S_1$  の節が左から順に対応している.  
 $W_1, \dots, W_4$  は 4 個の変数  $x_1, \dots, x_4$  に対応している.  
 図 6 での最大独立点集合は, 割当  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$  が, 図 7 での最大独立点集合は, 割当  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$  が, 対応している.

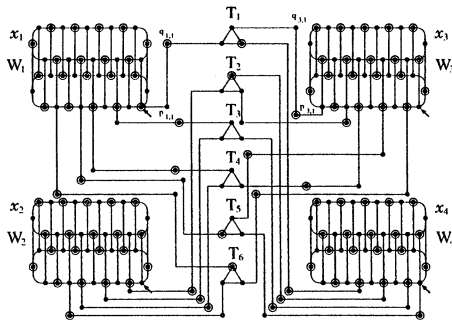


図 6: 割当  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$

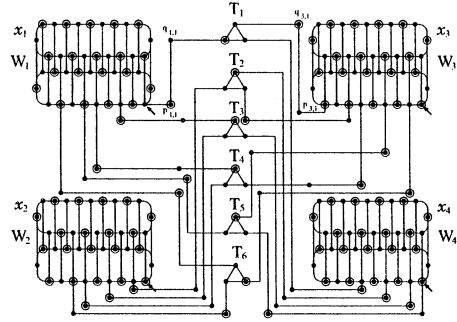


図 7: 割当  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$

定理 3.4 3DWNP-MIS は ( $P \neq NP$  の仮定のもとで) PTAS を持たない.

証明 まず, 3DWNP-MIS を  $\frac{1}{1+\epsilon}$  近似する近似アルゴリズム  $A$  が存在すると仮定する.

次に, ある 3SAT-5 ( $n$  変数  $m$  節) のインスタンス  $S$  から変換グラフ  $G$  を作る. 補題 3.2 より変換  $G$  について *fixed form* である独立点集合  $I$  が存在する.  $\frac{|V(W_i)|}{2} = c$ ,  $|\{T_i \mid V(T_i) \cap I = 4\}| = t$  とする. アルゴリズム  $A$  を利用して  $\alpha(G)$  を近似し, その近似解を  $d$  で表す. このとき,  $d \geq \frac{1}{1+\epsilon}(nc + 3m + t)$  であるから,

$$\begin{aligned} t &= \alpha(G) - (nc + 3m) \\ &\geq d - nc - 3m \\ &\geq \frac{1}{1+\epsilon}(nc + 3m + t) - (nc + 3m) \\ &\geq \frac{1}{1+\epsilon}t - \left(\frac{\epsilon}{1+\epsilon}(nc + 3m)\right). \end{aligned}$$

3SAT-5 であるから, リテラルの数は  $m$  以上であり変数は高々 5 回現れるので  $5n$  以下であるから  $m \leq$  リテラルの数  $\leq 5n$  である. 変換グラフ  $G$  において, 節に対応するグラフ  $T_1, \dots, T_m$  のそれぞれから変数に対応するグラフ  $W_1, \dots, W_n$  へ高々 3 本しか辺がでないので  $3m \geq n$  である. 少なくとも  $\frac{m}{2}$  節が真になることが知られているので  $t \geq \frac{m}{2} \geq \frac{n}{6}$  となり,

$$\begin{aligned} t &\geq \frac{1}{1+\epsilon}t - \left(\frac{\epsilon}{1+\epsilon}(c+15)n\right) \\ &\geq \frac{1}{1+\epsilon}t - \left(\frac{\epsilon}{1+\epsilon}c'6\right)t \\ &= \left(\frac{1}{1+\epsilon} - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}c'6\right)t. \end{aligned}$$

$\epsilon' > 0$  とすると  $\frac{1}{1+\epsilon'} < 1$  であり,

一方  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+\epsilon} - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}c'6\right) = 1$  である. 従って, 十分小さい任意の  $\epsilon'$  に対し,  $\left(\frac{1}{1+\epsilon} - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}c'6\right) \geq \frac{1}{1+\epsilon'}$  であるような  $\epsilon$  が存在する. つまり, 十分小さ

い任意の  $\epsilon'$  に対し, 任意の 3SAT-5 のインスタンス  $S$  について  $A'(S) \geq \frac{1}{1+\epsilon'} OPT(S)$  が成り立つ近似アルゴリズム  $A'$  が存在する. しかしこれは 3SAT-5 は PTAS を持つことを意味するが, 3SAT-5 は PTAS を ( $P \neq NP$  の仮定のもとで) 持たないことが知られている [6] ので矛盾. よって 3DWNP-MIS は ( $P \neq NP$  の仮定のもとで) PTAS を持たない.  $\square$

## 参考文献

- [1] E.Asplund and B.Grünbaum, On a coloring problem, *Math. Scand.* 8 (1960) 181-188.
- [2] V.Bafna, B.Narayanan, and R.Ravi, Nonoverlapping local alignments (Weighted independent sets of axis parallel rectangles), *Discrete Applied Math.* 71 (1996) 41-53.
- [3] D.S.Hochbaum, Efficient bounds for the stable set, vertex cover and set packing problems, *Discrete Appl. Math.* 6 (1983) 243-254.
- [4] D.S.Hochbaum and W.Maass, Approximation schemes for covering and packing problems in image processing and VLSI, *JACM* 32 (1985) 130-136.
- [5] D.S.Hochbaum, Various notions of approximations: good, better, best, and more, in: D.S.Hochbaum, ed., *Approximation Algorithms for NP-HARD PROBLEMS* PWS Publishing Company (1997) 339-446.
- [6] S. Arora and C. Lund, Hardness of Approximations in: D.S.Hochbaum, ed., *Approximation Algorithms for NP-HARD PROBLEMS* PWS Publishing Company (1997) 339-446.
- [7] H.Imai and T.Asano, Finding the connected components and a maximum clique of an intersection graphs of rectangles in the plane, *J. Algorithms*, 4 (1983) 310-323.
- [8] S.Khanna, S.Muthukrishnan and M.Paterson, On approximating rectangle tiling and packing, *Proceedings of the Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, (1998) 384-393.
- [9] G.J.Minty, On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 28 (1980) 284-304.
- [10] D.T.Lee, and J.Y-T.Leung, On the 2-dimensional channel assignment problem, *IEEE Trans. Comput.* c-33 (1984) 2-6.