

# レベル付き依存グラフを用いた効率のよいソフトウェア・パイプライン化法について

三重大学工学部 武市雅俊 (Masatoshi Takeichi)  
三重大学工学部 大山口通夫 (Michio Oyamaguchi)  
三重大学工学部 太田義勝 (Yoshikatsu Ohta)

## 1. はじめに

近年VLIWやスーパスカラ、マルチプロセッサといった、複数の命令を同時に実行することのできるアーキテクチャが広く普及している。これらのアーキテクチャではコンパイラによって、並列実行度の高いコードを生成することが重要である。一般にプログラムの実行時間の多くはループの実行に費やされる。そのためループを最適化することで、多大な効果を期待することができる。

ループの最適化手法の中でも命令の並列性を抽出するための非常に重要な手法としてソフトウェア・パイプライン化法 (SP法) がある。

SP法とは、ループを解析してパイプライン化し、並列実行度の高い新しいループに再構成しなおすことにより実行効率を高める手法であり (図1)、これまで多くの研究者によって盛ん

に研究されてきた[1~7]。その基本となる本質的なアイデアは、1個の基本ブロックを本体にもつ1重のループ(以後、単純ループと呼ぶ)に限定し、かつ資源(プロセッサ数、レジスタ数など)の制約条件を加味しない場合について提案されたSP法にあり、これまでの研究成果は、次の2つに分類することができる。

まず一つは、実行サイクルが最適となるものである[1]。このとき新しいループ本体の命令数は、元のループ本体のより増加する場合があります、キャッシュ容量を越えるなどで効果が低減する場合があります。またカーネル部の作成に多大な時間を要する場合もある。

もう一つのアプローチは新しいループ本体の命令数の増加を許さない発見的スケジューリングである[3][4][5]。この方法では効率よくスケジューリングが完了するが、並列実行度を最大限引き出すことができるとは限らない。

本研究では、依存グラフにレベルの概念を導入したものをを用いることにより、2つのアプローチのギャップを埋める、効率のよいSP法を提案する。

## 2. 準備

ここでは準備として本研究で用いる用語等について述べる。ループ本体の  $i$  ( $>0$ ) 回目の実行を  $i$  回目の イタレーション と呼ぶ。プログラム中の命令間にはある命令  $u$  の実行が終了しないと、ある命令  $v$  の実行が開始できないという依存関係が存在する。命令の依存関係を本手法で大きく二つに分類する。同じイタレーション中に現れる2つの命令  $u$  と  $v$  に依存がある場合、その依存は ループ内依存 と呼び、 $(u, v)$  と表記する。  $i$  回目のイタレーション中に現れる

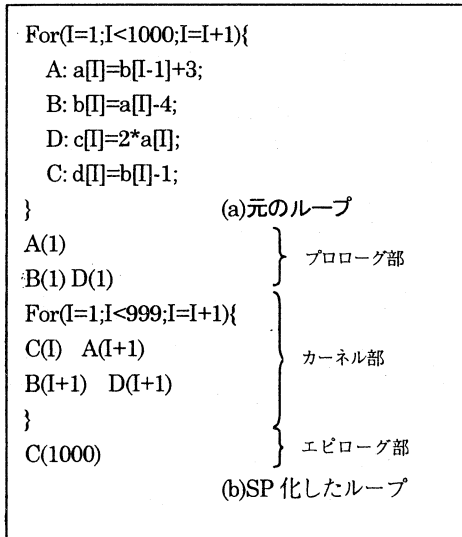


図1 ソフトウェア・パイプライン

命令  $u$  から  $i+j$  回目のイタレーション中に現れる命令  $v$  に依存がある場合、その依存をループ運搬依存と呼び、 $[u,v]$  と表記する。但し  $j \geq 1$ 。なお、 $j > 1$  であるループ運搬依存があるときは、 $(j-1)$  回のループ展開を行うことにより  $j=1$  のループ運搬依存に変更可能である。本研究では、すべてのループ運搬依存に対して  $j=1$  と仮定して話を進める。

### 2.1. 依存グラフ

命令の依存関係を表す依存グラフは、各命令に対応する表す頂点の集合  $V$  と、依存関係を表す有向辺の集合  $E \cup E'$  によって表現される(図2)。ここで、 $E$  はループ内依存の集合、 $E'$  はループ運搬依存の集合である。ループ内依存のエッジは実線で、ループ運搬依存は破線で表す。部分グラフ  $G=(V,E)$  は非循環有向グラフ(dag)となる。親を持たないノードを根と呼び、子を持たないノードを葉と呼ぶ。グラフ  $G$  に対し、次の関数を与える。ここで、 $v \in V$ 。

- $Des(v)$  は命令  $v$  の子孫の集合
- $dep(v)$  は命令  $v$  の深さ
- $hei(v)$  は命令  $v$  の高さ
- $L$  は  $G$  の高さ、即ち根から葉への路の長さの最大値。

dag において根は複数個存在しうる。高さ  $L$  の根を主根と呼ぶ。

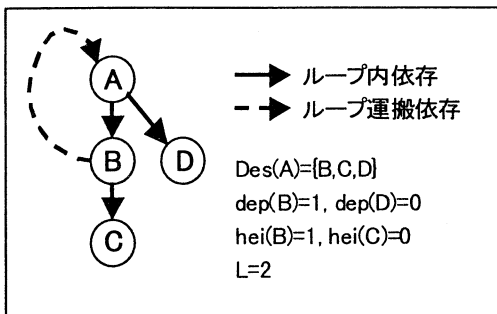


図2 依存グラフ

### 2.2. スケジューリング

本稿では関数  $s_G: V \rightarrow \mathbb{N}$  を dag  $G$  のスケジューリングと呼ぶ。ここで  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  である。 $G$  が明らか場合は省略する。

スケジューリング  $s$  は次の条件を満たすとき正当であると呼ぶ。

$$\text{条件: } \forall (u,v) \in E \quad s(u) < s(v)$$

これは全てのループ内依存を満たすということである。定義より、関数  $dep$  は  $G$  の正当なスケジューリングである。

$s(v)=0$  を満たす命令  $v$  が存在するとき、標準スケジューリングと呼ぶ。スケジューリング  $s$  に対して  $m = \text{Min} \{s(v) \mid v \in V\}$  とするとき、 $s'(v) = s(v) - m$  で定義される  $s'$  を  $s$  の標準スケジューリングと呼ぶ。この新しいスケジューリング  $s$  を  $\text{norm}(s)$  又は  $s-m$  と表す。

スケジューリング  $s$  に対して、 $h_s: V \rightarrow \mathbb{N}$ 、 $L_s \in \mathbb{N}$  を次のように定義する。

$$h_s(v) = \begin{cases} 0 & v \text{ が葉のとき} \\ \text{Max} \{s(u) - s(v) \mid u \in \text{Des}(v)\} & v \text{ が葉以外のとき} \end{cases}$$

$$L_s = \text{Max} \{s(v) + h_s(v) \mid v \in V\} \\ (= \text{Max} \{s(v) \mid v \in V\})$$

$h_s$  はスケジューリング  $s$  において命令  $v$  から、命令  $v$  の子で最も遅くスケジューリングされた命令の実行までにかかる時間を表す。 $L_s$  は  $s$  の実行にかかる時間を表す。

正当なスケジューリング  $s$ 、 $s'$  に対して、その組  $(s, s')$  が両立するとは、

$$\forall (u,v) \in E' \quad s(u) < s'(v)$$

が成立するときである。 $(s, s')$  が両立するとき、 $s$  と  $s'$  はそれぞれ  $i$  回目と  $i+1$  回目のイタレーションのスケジューリングにすることができる。

### 2.3. レベル付き依存グラフ

本手法では、イタレーションごとにスケジューリングを行う。そのため命令間の依存関係とそのイタレーションのスケジューリングを同時に表現するために、依存グラフにレベルの概念を導入する。

依存グラフの各ノードにはレベルの属性を持たせる。レベルは各命令の実行順を表し、同じレベルをもつノードは、同じ時刻に実行されることを表す。図3は図2のグラフにおいて、ノード  $D$  に異なるレベルをつけたものである。こ

のようにレベル付き依存グラフを用いることで、同じ依存グラフに対しても異なるスケジューリングを表現することができる。

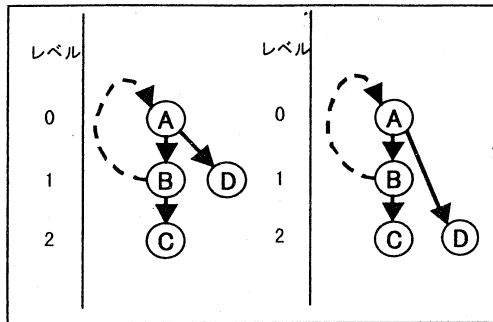


図 3 レベル付き依存グラフ

### 3. 従来の SP 法

ここでは従来提案された SP 法のうち、アプローチの異なる手法を 1 つずつ簡単に述べる。

#### 3.1. OLP 法

Aiken らによって提案された手法 (OLP 法) [1] は最適スケジューリングを行うものである。各命令は可能な限り早い時刻にスケジューリングされる。スケジューリングが進むと、命令は幾つかのグループに分かれて出現するようになる。同じグループが出現するようになれば、グループ間にできた、命令が一つもスケジューリングされていない区間 (ギャップ) を詰め繰り返しパターンを見つける。図 4 (b) は図 4 (a) のループに OLP 法の適用を行った例である。

OLP 法ではリソースが無制限ならば実行時間が最適となるコードを得ることができる。しかしカーネル部の命令数が指数関数的に大きくなる場合があり、リソースが充分でない場合は、キャッシュ容量を上回るなどで効果が低減する。またパターンの発見までに多大な時間を要する場合もある。

#### 3.2. URPR 法

Su らは URPR 法 (UnRolling, Pipelining and Rerolling) という手法を提案している [4]。アルゴリズムはまずループを圧縮することから始まる。圧縮されたループに対し、展開数を決定するために次の値を計算する。

$$D = \text{Max } \{ \text{dep}(u) - \text{dep}(v) + 1 \mid [u, v] \in E' \}$$

$D$  は命令の移動を行わずに、ループ運搬依存を満足させる為に必要な値である。次にループ展開 (unrolling) を展開数  $K = L/D$  回で行う。展開されたループはイタレーションごとに、グラフの形を変えることなく  $D$  ずつずらしてスケジューリングされる。そしてループの巻き戻し (rerolling) を行いカーネル部、プロローグ部、エピローグ部が作成される。リソース競合がなければカーネル部は高さ  $D$  となる。アルゴリズムの計算量は元のループ本体の命令数を  $n$  とすれば  $O(n^2)$  である。図 4 (c) は図 4 (a) のループに URPR 法の適用を行った例である。

### 4. 新しい SP 法

従来提案された SP 法は、計算時間や並列実行度、カーネル部の命令数増加などいくつかの問題を持っている。そこで本研究では、従来の SP 法を改善した新しい SP 法を提案する。

#### 4.1. 遅延幅

本研究では各イタレーションの開始の間隔を遅延幅と呼ぶことにする。従来提案された SP 法において、遅延幅に相当する値は計算しない [1]、あるいは元のループに対して 1 回しか計算しない [3][4][7]。本手法ではより適切な遅延幅を求めるために、遅延幅はイタレーションのスケジューリングごとに新たに計算を行う。

本手法のスケジューリングでは各イタレーションはその高さを変えないようにスケジューリングを行い、アルゴリズムの効率化を図る。新しくスケジューリングされるイタレーションが高さ  $L_s$  を保存するため、スケジューリング  $s$  に対して、遅延幅  $d_s$  は次式となる。

$$d_s = \text{Max } \{ s(u) + 1 + h_s(v) - L_s \mid [u, v] \in E' \}$$

ちなみに URPR 法の遅延幅は

$$\text{Max } \{ s(u) + 1 + (L_s - s(v)) - L_s \\ = s(u) - s(v) + 1 \mid [u, v] \in E' \}$$

と与えられる。

#### 4.2. 次のイタレーションのスケジューリング

遅延幅の計算が終わると、それを用いて次のイタレーションをスケジューリングする。正当なスケジューリング  $s$  から次のイタレーション

のスケジューリング  $s'$  を次のように定義する。

$$s'(v) = \text{Max}(\{s(u)+1 \mid [u,v] \in E'\} \cup \{s'(u)+1 \mid (u,v) \in E\} \cup \{s(v)+d_s\})$$

この新しいスケジューリング  $s'$  を  $\text{next}(s)$  で表す。

**定理 1**  $s$  を正当なスケジューリング、 $s' = \text{next}(s)$  とする。そのとき、次の(1)、(2)が成立する。

- (1)  $s'$  は正当なスケジューリングである。
- (2) 組  $(s, s')$  は両立する。

定理 1 は  $s'$  の定義より明らかに成り立つ。

標準スケジューリング  $s$  から得られた  $s' = \text{next}(s)$  に対し、次の性質 1 ~ 4 が成立する。

**性質 1**  $\forall v \in V \quad s'(v) + h_s(v) \leq d_s + L_s$

(証明)  $\text{dep}(v)$  に関する帰納法で示す

$v$  が根のとき ( $\text{dep}(v) = 0$ )

- ・  $s'(v) = s(v) + d_s$  のとき  
 $L_s$  の定義より、 $s(v) + h_s(v) \leq L_s$   
ゆえに、性質 1 を満たす。
- ・  $s'(v) = s(u) + 1$  (但し  $(u, v) \in E'$ ) のとき  
 $d_s$  の定義より、 $s(u) + 1 + h_s(v) - L_s \leq d_s$   
従って、 $s'(u) + 1 + h_s(v) - L_s \leq d_s$   
ゆえに性質 1 を満たす

$v$  が根でないとき ( $\text{dep}(v) > 0$ )

- ・  $s'(v) = s(u) + 1$  (但し  $(u, v) \in E'$ ) のとき  
 $d_s$  の定義より、 $s(u) + 1 + h_s(v) - L_s \leq d_s$   
従って性質 1 をみたとす
  - ・  $s'(v) = s'(u) + 1$  (但し  $(u, v) \in E$ ) のとき  
帰納法の仮定より、 $s'(u) + h_s(v) \leq d_s + L_s$   
 $s(u) < s(v)$  より、 $h_s(v) \leq h_s(u) - 1$   
従って  

$$s'(v) + h_s(v) \leq s'(u) + 1 + h_s(u) - 1$$

$$= s'(u) + h_s(u) \leq d_s + L_s$$
ゆえに性質 1 を満たす
  - ・  $s'(v) = s(v) + d_s$  のとき  
 $L_s$  の定義より、 $s(u) + h_s(v) \leq d_s + L_s$   
従って、 $s'(u) + h_s(v) \leq d_s + L_s$   
ゆえに性質 1 を満たす。(証明終わり)
- 性質 1 より次の性質 2 が成立する。

**性質 2**  $\forall v \in V \quad d_s \leq s'(v) \leq d_s + L_s$

従って、 $L_s \leq d_s + L_s$

(証明)  $s'(v) \leq d_s + L_s$  は性質 1 より、 $d_s \leq s'(v)$  は  $s'$  の定義より明らか (証明終わり)

性質 2 より  $s' - d_s$  は正当な標準スケジューリングである。

スケジューリングの系列  $S = \langle s_0, s_1, \dots \rangle$  を次のように定義する。

- (1)  $s_0 = \text{dep}$ 、 $s'_0 = s_0$
- (2)  $i > 0$  のとき、 $s_i = \text{next}(s_{i-1})$ 、 $s'_i = \text{norm}(s_j)$

そのとき、次の性質が成立する。

**性質 3**  $L = L_{s_0} = L_{s_1} = \dots$

(証明)  $s_0 = \text{dep}$  より、 $L_{s_0} = L$  が成立するのは定義より明らか。従って性質 2 より  $d_s \leq s'(v) \leq d_s + L_s$

従って、 $s'_1 = s_1 - d_s$  より  $L_{s_1} \leq L$

$s'_1$  が正当なスケジューリングかつ  $\text{Max}(\text{dep}(v)) = L$  より  $L_{s_1} \geq L$  ゆえに  $L_{s_1} = L$  同様の議論により、 $i > 1$  においても  $L_{s_i} = L$  が成立する。(証明終わり)

性質 2 と 3 より、頂点  $v$  が主根であれば任意の  $i > 0$  に対して  $s_i(v) = d_{s_i}$  かつ  $s'_i(v) = 0$  が成立する。

**性質 4**  $\forall i \geq 0, \forall v \in V \quad s'_i(v) \leq s_{i+1}(v)$

(証明)  $\text{next}$  の定義より

$$\forall v \quad s_{i+1}(v) \geq s'_i(v) + d_{s_i}$$

したがって、 $s_{i+1}(v) \geq s'_i(v)$  (証明終わり)

**定義** スケジューリングの系列  $S = \langle s_0, s_1, \dots \rangle$  が 単調増加 とは、

$$\forall i \geq 0, \forall v \in V \quad s_i(v) \leq s_{i+1}(v)$$

が成立するときである。

**定理 2** スケジューリングの系列  $S' = \langle s'_0, s'_1, \dots \rangle$  は単調増加である。但し  $s'_0 = \text{dep}$ 、 $s_{i+1} = \text{norm}(\text{next}(s'_i)) (i > 0)$  である。さらに、

$$\exists j \leq L \cdot |V| \quad s'_j = s_{j+1}$$

(証明) 単調増加は性質 4 より明らか、従って、スケジューリング  $s$  に対して  $D_s = \sum_{v \in V} s(v)$  と定義すると、 $\forall i \geq 0 \quad D_{s_i} \leq D_{s_{i+1}}$

性質 3 より  $D_s \leq L \cdot |V|$  が成立する。ゆえに定理が成立する。(証明終わり)

### 4.3. アルゴリズム

本手法は以上に述べた関数を用いて次のアル

ゴリズムによってSP化をおこなう。

(開始)

1. 初期スケジューリング  $s_0 = \text{dep}$
2. スケジューリング  $s_i$  に対して、
  - ・  $d_s$  を計算する。
  - ・  $\text{next}(s_i)$  を計算し  $s_{i+1}$  とする。 $\text{norm}(s_{i+1}) \neq \text{norm}(s_i)$  なら、 $\text{next}(s_{i+1})$  を新しい  $s_i$  として2.の最初、等しければ3へ
3. カーネル部の作成
  - ・ カーネル部の切り出し
  - ・ indexの調整
4. プロログ部、エピログ部の作成

(終了)

本アルゴリズムの正当性は定理1により保証される。

次に本手法の時間計算量を考える。アルゴリズムの1では、ノード数を  $n$ 、ループ内依存のエッジ数を  $e$  とすれば、 $O(n+e)$  である。2において  $d_s$  の計算にはループ運搬依存のエッジ数を  $e'$  とすれば  $O(e')$ 、 $\text{next}(s_i)$  の計算に  $O(e+e')$  かかり、この計算を定理2により最悪の場合  $L \cdot n$  回繰り返すことになるので  $m = e+e'$  とすれば  $O(L \cdot m \cdot n)$  となる。ここで  $L$  は元のループにおける依存グラフの高さである。3、4についても同じ時間計算量で抑えることができる。以上より本手法の時間計算量は  $O(L \cdot m \cdot n)$  となる。

## 5. 比較

ここでは本手法と、OLP法、URPR法を図4の例で比較を行う。表1は各手法を適用した際のカーネル部の命令数と、繰り返し回数を  $k$  回としたときのカーネル部の実行時間を、プロセッサ数 (PE) が4つの時、5つ以上の時に分けて示したものである。

	カーネル部 命令数	実行サイクル数	
		4PE	5PE以上
元のループ	12	6k	6k
OLP法	36	3.33k	2.67k
URPR法	12	5k	4k
本手法	12	3k	3k

表1 比較

ここでは1つの例を示しただけだが、他の多くのループに対しても、本手法によって、OLP法のようにループの命令数を増やすことなく、URPR法以上の並列度のコードを生成することができる。

## 6. まとめ

本研究では、レベル付き依存グラフを用いて、カーネル部の命令数を増やすことなく、並列実行度も高いコードを、多項式時間の計算により得る新しいSP法を提案した。

## 参考文献

- [1] A.Aiken and A.Nicolau, "Optimal Loop Parallelization", Proc. SIGPLAN '88 conference on PLDI, pp.308-317, 1988
- [2] A.W.Appel and M.Ginsburg, "Modern Compiler Implementation", Chapter20, 1997, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
- [3] B.R.Rau, "Iterative Modulo Scheduling: An Algorithm for Software Pipelining Loops", MICRO.27, pp.63-74, 1994
- [4] B.Su, et al. "URPR—An Extension of URCCR for Software Pipelining", MICRO.19, pp.104-108, 1986
- [5] 武市雅俊、大山口通夫、太田義勝、"マルチプロセッサ向きループ最適化手法について"、電気関係学会東海支部連合大会 講演論文集、p.332、1999
- [6] 村上智彰、"スーバスカラ・プロセッサの性能を最大限に引き出すコンパイラ技術"、日経エレクトロニクス (No.521)、pp.165-185、1991
- [7] 古関聰、他、"命令レベル並列アーキテクチャのためのループアンローリングおよびソフトウェアパイプライン適用技法"、電子情報通信学会論文誌、Vol.J-80-D-I、No.10、pp.824-835、1997

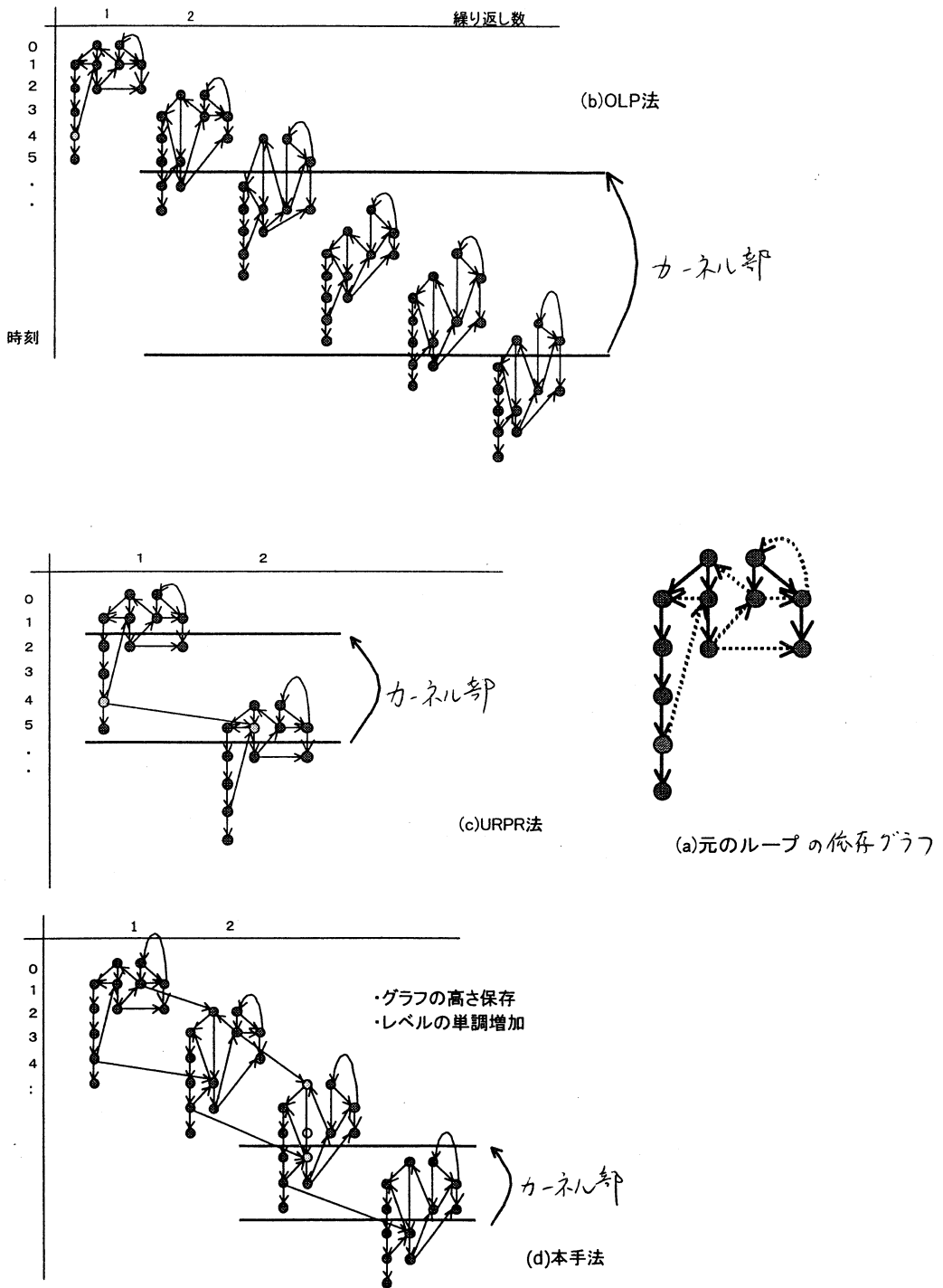


図 4 SP 法の適用