

カントール極小系の自己同型群の 有限部分群について

松井宏樹 (MATUI Hiroki)

1 序

X をカントール集合 (二点集合 $\{0, 1\}$ の可算無限直積に直積位相をいれたもの) とし、 ϕ を X の上の自己同相写像とします。任意の点 $x \in X$ に対しその ϕ による軌道 $Orb_\phi(x)$ が X で稠密になるとき、 ϕ は極小であるといいます。 X とその上の極小な自己同相 ϕ の組 (X, ϕ) を、カントール極小系といいます。可測空間の上の力学系を考察するエルゴード理論は昔から盛んに研究されてきましたが、カントール極小系はその位相力学系における類似と捉えることができます。

このノートではカントール極小系 (X, ϕ) の自己同型群

$$C(\phi) = \{\gamma \in \text{Homeo}(X) ; \gamma \circ \phi = \phi \circ \gamma\}$$

また特にその有限部分群を調べます。自己同型群は古くから興味の対象にはなっていたのですが、めぼしいことはほとんど何もわかっていません。ここでは次元群への作用を通して自己同型群を考えてみたいと思います。なお $C(\phi)$ と書くと一般には、 X から自分自身への連続写像で ϕ と交換するものの全体を指すようですが、このノートでは自己同相に話を限ることにします。

2 次元群と mod 写像

まず準備として、カントール極小系の次元群 $K^0(X, \phi)$ と mod 写像を復習しなければなりません。カントール極小系 (X, ϕ) に対して

$$B_\phi = \{f - f \circ \phi^{-1} ; f \in C(X, \mathbf{Z})\}$$

$$K^0(X, \phi) = C(X, \mathbf{Z}) / B_\phi$$

とおきます。関数 $f \in C(X, \mathbf{Z})$ の同値類を $[f]$ と書きましょう。次元群 $K^0(X, \phi)$ は自然な正錐を備えた順序群になっています。また次元群とその順序単位元の組は、カントール極小系の強軌道同型類に関する完全不変量であることがわかっています ([GPS])。自己同型群 $C(\phi)$ の元 γ は明らかに B_ϕ を保つので、 $[f] \mapsto [f \circ \gamma^{-1}]$ は順序と順序単位元を保つ次元群 $K^0(X, \phi)$ の自己同型として well-defined です。これを $\text{mod}(\gamma)$ と書きます。そして

$$T(\phi) = \{\gamma \in C(\phi) ; \text{mod}(\gamma) = id\}$$

とおきます。\$T(\phi)\$ は \$C(\phi)\$ の正規部分群で、明らかに \$\phi\$ を含みます。今後 \$\phi\$ が生成する整数群を \$\mathbf{Z}\phi\$ と書くことにします。まとめると

$$\mathbf{Z}\phi \subset T(\phi) \subset C(\phi)$$

です。

コントロール極小系の簡単な例として加算機変換をあげることにします。2以上の自然数の列 \$\{m_n\}_{n \in \mathbf{N}}\$ で、\$m_n\$ は \$m_{n+1}\$ を割るというものを用意します。\$\mathbf{Z}/m_{n+1}\mathbf{Z}\$ から \$\mathbf{Z}/m_n\mathbf{Z}\$ への自然な準同型がありますから、

$$X = \text{projlim } \mathbf{Z}/m_n\mathbf{Z}$$

は可換なゼロ次元のコンパクト位相群になることがわかります。\$X\$ の元 \$(1, 1, \dots)\$ を足すという操作は \$X\$ の自己同相を与えますから、これを \$\phi\$ とします。\$(X, \phi)\$ は不変測度をただ一つ持つコントロール極小系になります。

$$K^0(X, \phi) \cong \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{m_n} \mathbf{Z}$$

もすぐにわかります。\$X\$ はそれ自体が可換群なので、\$X\$ のひとつひとつの元が自己同型群 \$C(\phi)\$ の元を与えることになり、また \$C(\phi)\$ の元はそのようなもので尽くされます。さらに次元群 \$K^0(X, \phi)\$ の自己同型は自明なものに限るので、結局 \$X \cong C(\phi) = T(\phi)\$ である事になります。

一般にコントロール極小系の自己同型群 \$C(\phi)\$ は \$X\$ に自由に作用しています。というのも、\$\gamma, \gamma' \in C(\phi)\$ がある点 \$x \in X\$ に対して \$\gamma(x) = \gamma'(x)\$ となったとすると、任意の点 \$y \in X\$ に対して極小性から \$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{a_n}(x)\$ となりますが、これより

$$\gamma(y) = \lim \gamma(\phi^{a_n}(x)) = \lim \gamma'(\phi^{a_n}(x)) = \gamma'(y)$$

を得るからです。上の例ではこの \$C(\phi)\$ の作用が推移的になっているわけで、かなり特殊な例であると言えます。

3 自己同型群の有限部分群

この節では次の二つの定理を説明します。

定理 3.1 ([LM]) 任意の有限群 \$G\$ に対して、\$C(\psi) \cong G \oplus \mathbf{Z}\psi\$ となるようなコントロール極小系 \$(Y, \psi)\$ が存在する。さらにこの \$(Y, \psi)\$ は加算機変換に軌道同型であるようにとれる。

定理 3.2 ([M2]) \$(Y, \psi)\$ をコントロール極小系とするとき次が成り立つ。

- (i) \$H\$ が \$T(\psi)\$ の有限部分群ならば \$H\$ は巡回群である。
- (ii) \$G\$ が \$C(\psi)\$ の有限部分群であって、素数 \$p\$ が \$G \cap T(\psi)\$ の位数を割るならば、\$G\$ の \$p\$-シロー群は巡回群である。

[LM]では定理3.1を、エルゴード系の自己同型群に対して証明しているのですが、そこから容易にコントロール極小系に対する結論が得られます。定理3.1の後半部分は、次元群を計算してやって[GPS]の軌道同型定理を適用すればすぐに得られます。元の論文[LM]ではsubstitution ruleと呼ばれるものを用いて力学系を構成しているのですが、ここではそれとは異なる方法で全く同じ物を構成してみたいと思います。

G を有限群として次のようなことを考えます。まず適当なコントロール極小系 (X, ϕ) と連続写像 $c: X \rightarrow G$ を取ります。 (X, ϕ) や c の条件はあとから考えるとして、とにかく $Y = X \times G$ の上の自己同相 ψ を、 $\psi(x, g) = (\phi(x), gc(x))$ と定めます。 (Y, ψ) はコサイクル c による (X, ϕ) のskew product extensionと呼ばれるものです。 Y から X への射影を π とすると、 π は $\pi \circ \psi = \phi \circ \pi$ を満たすので、 π は (Y, ψ) から (X, ϕ) へのfactor mapになっています。 G の元 h に対して、 Y の上の自己同相 γ_h を $\gamma_h(x, g) = (x, hg)$ と決めます。すると γ_h は明らかに ψ と交換しますから、 $\{\gamma_h\}_{h \in G}$ は G と同型な $C(\psi)$ の部分群を定めることになります。ただし (Y, ψ) は極小力学系であるとは限らないことに注意します。

(X, ϕ) や $c: X \rightarrow G$ をうまく定義して (Y, ψ) を極小系にすることを考えます。そのために G の元の列 (h_1, h_2, \dots, h_r) を次の条件を満たすようにとります。

$$G = \{h_1, h_1 h_2, h_1 h_2 h_3, \dots, h_1 h_2 \cdots h_r\}$$

$$h_1 h_2 \cdots h_r = e$$

ただし、 h_i たちは全て等しいということはない、とします。また、列の長さ r は G の位数と一致している必要はありません。(本当はもう少し弱い条件でも構わないのですがこう定義することにします。) G を文字とする両側無限列 $\xi \in G^{\mathbb{Z}}$ を次で定義します。

$$\xi(i) = h_i \text{ for } i \neq -1 \pmod{r+1}$$

$$\xi(-1 + i(r+1)) = h_i \text{ for } i \neq -1 \pmod{r+1}$$

$$\xi(-1 - (r+1) + i(r+1)^2) = h_i \text{ for } i \neq -1 \pmod{r+1}$$

⋮

これで両側無限列 ξ がwell definedになっています。 ξ はほとんど周期 $r+1$ の周期列に近いのですが、 $r+1$ を法として -1 のところだけが周期的にはなっていません。しかし、 $r+1$ を法として -1 のところも、よくよく見てみると、だいたい $(r+1)^2$ を周期としていることがわかります。けれども、完全に周期的になっているわけでもなくて、 $(r+1)^2$ を法として $-1 - (r+1)$ の部分だけは周期的にはなっていません。無限列 ξ はこのように、周期列の極限とでも言うべき非周期列になっています。このような無限列はふつうToeplitz sequenceと呼ばれていて、実は、そのずらし変換による軌道の閉包はコントロール極小系になることが知られています。つまり、 $G^{\mathbb{Z}}$ の上のずらし変換を ϕ として、 X を $\text{Orb}_\phi(\xi)$ の閉包とすれば、 (X, ϕ) はコントロール極小系になります。(ずらし変換の X への制限も同じく ϕ と書きます。) Toeplitz sequenceから作られるコントロール極小系は、一般には、不変測度をたくさん持ちうるしエントロピーもゼロとは限りませんが、今つくった (X, ϕ) は不変測度をひとつしか持たないエントロピーゼロの力学系になっています。Toeplitz sequenceからできるコントロール極小系の一般論に関しては、[W]を参照して下さい。

必ずしも自明な事実ではありませんが、実は Toeplitz sequence からできるコントロール極小系 (X, ϕ) からは、 $(r+1)^\infty$ 型の加算機変換 (Z, τ) への factor map ρ が存在しています。今の場合 ρ は、 (Z, τ) のあるひとつの軌道を除いた全ての点で対一になっています。つまりエルゴード系としては (Y, ψ) と (Z, τ) は同型です。また、このような状況のもとでは、容易に $C(\phi) = \mathbf{Z}\phi$ が証明できます。

連続写像 $c : X \rightarrow G$ を、 $\zeta \in X$ に対して $c(\zeta) = \zeta(0)$ とおくことにします。 c はゼロ座標を取り出す写像です。この (X, ϕ) と c を使って (Y, ψ) を前述の通りに構成します。 (Y, ψ) が極小系であることを見ましょう。 $(\xi, e) \in Y$ の ψ による軌道を考えます。列 (h_1, h_2, \dots, h_r) の取り方から、

$$\psi^{i(r+1)}(\xi, e) \text{ for } i = 0, 1, \dots, r-1$$

という r 個の点の G 成分は、 G 全体を渡ることがわかります。同様に

$$\psi^{i(r+1)^2}(\xi, e) \text{ for } i = 0, 1, \dots, r-1$$

という r 個の点の G 成分も、 G 全体を渡ります。一方 X 成分の方は、加算機変換 (Z, τ) への factor map ρ が ξ の上では対一であることから、 $\phi^{i(r+1)^n}(\xi)$ は $n \rightarrow \infty$ で ξ に行くことがわかります。以上より任意の $g \in G$ に対して、 (ξ, g) が $Orb_\psi(\xi, e)$ の閉包に含まれることが言えました。 (Y, ψ) が極小系であることを言うために、任意に (ζ, g) を取ります。 (X, ϕ) は極小系だったので、整数の列 $\{a_n\}_n$ があって $\lim \phi^{a_n}(\xi) = \zeta$ となっています。必要ならば部分列をとることにより、ある $h \in G$ があって $\lim \psi^{a_n}(\xi, e) = (\zeta, h)$ となるとして構いません。すると、前述の $\gamma_{gh^{-1}}$ をひっかけることにより、 $\lim \psi^{a_n}(\xi, gh^{-1}) = (\zeta, g)$ となり、前に得たことをあわせると、結局 $Orb_\psi(\xi, e)$ が Y で稠密であることが証明されたこととなります。同様な議論を繰り返すことにより、 $Orb_\psi(\zeta, g)$ が Y で稠密であることもわかるので、これで証明は完成です。

(Y, ψ) から (X, ϕ) への factor map π と (X, ϕ) から (Z, τ) への factor map ρ を合成した $\rho \circ \pi$ は、ただ一つの軌道を除いては、ぴったり G の位数対一の写像になっています。このことから、 $C(\psi) = G \oplus \mathbf{Z}\psi$ が得られます。 (Y, ψ) の次元群の計算は結構めんどろですが、加算機変換と軌道同型であることは、それほど苦勞なく見ることができます。計算の詳細は省くことにします。

定理 3.2 の説明に移ります。いま上で説明した構成をもっと注意深く実行することによって、有限群 G を $C(\psi)$ ではなく $T(\psi)$ の中に埋め込めないかというのは素朴な疑問ですが、一般にはそのようなことは決して出来ないということを、定理 3.2 は主張しているわけです。

まず次の補題を証明します。

補題 3.3 (Y, ψ) をコントロール極小系とし、 $\gamma \in T(\psi)$ かつ $\tau \in C(\psi)$ とする。 τ が位数有限であって $\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1} = \tau^k$ となっているならば、 k は 1 でなければならない。

証明 τ の位数を n とします。あるコントロール極小系 (X, ϕ) と連続写像 $f \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ があって、 (Y, ψ) や τ は次のようであるとして構いません。

$$Y = X \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

$$\psi(x, l) = (\phi(x), l + f(x)), \tau(x, l) = (x, l + 1)$$

(Y, ψ) から (X, ϕ) への射影を π とします。 γ は τ を normalize するので、 $\tilde{\gamma} \in C(\phi)$ があって、 $\tilde{\gamma} \circ \pi = \pi \circ \gamma$ となっています。つまり Y 上の自己同相 γ は、 $Y = X \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ の表示において、 X の座標成分では $\tilde{\gamma}$ で書いているのです。射影 π は次元群 $K^0(X, \phi)$ から $K^0(Y, \psi)$ への順序準同型 π^* を自然に導きますが、この準同型は単射であることが知られています。したがって仮定より、 $\tilde{\gamma} \in T(\phi)$ が知れます。すると f に対して $g: X \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ が取れて、

$$f - f \circ \tilde{\gamma} = g - g \circ \phi$$

となります。この g を使って、

$$\gamma_0(x, l) = (\tilde{\gamma}, l + g(x))$$

とおくと、 γ_0 は ψ と交換することがわかります。つまり $\gamma_0 \in C(\psi)$ です。さらに $\gamma_0^{-1} \circ \gamma \circ \pi = \pi$ であることから、 $\gamma_0^{-1} \circ \gamma$ は τ の巾でないといけないうこととなります。 γ_0 は明らかに τ と交換しますから、結局 γ も τ と交換することになります。 \square

定理 3.2 を証明するためにはさらに次の補題が必要です。

補題 3.4 (Y, ψ) をコントロール極小系とし $G \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ が $C(\psi)$ の部分群であるとする。このとき $G \cap T(\psi) = id$ となる。

この補題の証明には、順序の入ったブラッテリ図式に関する議論が必要になります。以下に大ざっぱに議論の流れを説明します。

任意のコントロール極小系 (X, ϕ) は、順序の入ったブラッテリ図式 (V, E, \leq) によって記述することができたのでした ([HPS])。空間 X と同一視される (V, E, \leq) の無限辺列空間には、部分順序が定まっていて、極小元と極大元がそれぞれただ一つずつ存在します。極大元に対応する X の点を x_{max} と書きます。

有限群 G に値をとるコサイクル $c: X \rightarrow G$ があつたとして、前に述べたようにして skew product extension (Y, ψ) を作ります。得られた (Y, ψ) が極小であつたとしましょう。 (Y, ψ) の次元群をもとめるためには、通常、極大元がただ一つ存在するような順序の入ったブラッテリ図式の上で、 (Y, ψ) を表現しなければなりません。しかし (Y, ψ) を表す順序ブラッテリ図式を、 (V, E, \leq) や c を使って分かりやすく書き下す一般的な方法は存在しないので、このやり方では次元群を求めることは困難になります。

そのかわりに次のようなことを考えます。まず

$$\tilde{B}_\psi = \{f - f \circ \psi; f \in C(Y, \mathbf{Z}), f(x_{max}, g) = 0 \text{ for all } g \in G\}$$

とおきます。 \tilde{B}_ψ は通常のコバウンダリー群 B_ψ の部分群です。そして、 $C(Y, \mathbf{Z})$ の \tilde{B}_ψ による商を $K^0(Y, \psi; G)$ と書きます。次元群 $K^0(Y, \psi)$ と同じように、 $K^0(Y, \psi; G)$ にも順序構造が入って単純な順序群になります。パットナムは次を証明しました。

命題 3.5 ([P]) 上の設定において、 $K^0(Y, \psi; G)$ から $K^0(Y, \psi)$ への自然な商写像の核は $\mathbf{Z}^{\#G-1}$ に同型である。

$\{(x_{max}, g)\}_g$ という Y の $\#G$ 個の点を極大元に対応させるようにして、 (Y, ψ) を順序ブラッテリ図式の上に展開することはできます。この順序ブラッテリ図式は、もとの (V, E, \leq) や c の言葉で書けていて、そこから定まる次元群はぴったり $K^0(Y, \psi; G)$ になります。具体的に言えば、群環 $\mathbf{Z}[G]$ の有限個の直和とそのあいだの $\mathbf{Z}[G]$ -module 準同型によって、 $K^0(Y, \psi; G)$ を書くことができます。そこで、上のパットナムの結果を適用してやることにより、 $K^0(Y, \psi)$ を計算できるようになるわけです。

補題 3.3 と 3.4 を組み合わせれば、次のようにして定理 3.2 の (i) を証明することができます。

背理法によります。あるコントロール極小系 (Y, ψ) が存在してその $T(\psi)$ の部分群になりうるような有限群のなかで、非可換かつ位数最小のものを H とします。 H の部分群も $T(\psi)$ の部分群ですから、仮定より H の真部分群は全て可換です。さらに補題 3.4 より、 H の真部分群は巡回群であることになります。いま H が単純群ではなく、非自明な正規部分群 K を持ったとします。 (Y, ψ) を K の作用で割ってやると、別のコントロール極小系 (X, ϕ) が出来ませんが、 H/K は $T(\phi)$ の部分群になることがわかります。すると、またもや H に関する仮定と補題 3.4 より、 H/K は巡回群であることになります。 K も H/K も巡回群ですから、補題 3.3 より、 H は可換であることになってしまいます。これは最初の仮定に矛盾しますから、 H は単純群であったことになります。ところが、非可換単純群であってかつその真部分群はすべて巡回的というような群は自明なものに限るので、矛盾が生じました。これで証明は完成です。

定理 3.4 の (ii) も、このような議論をもう少し続けることにより、証明することができます。

次に、 $T(\psi)$ がいつ有限巡回部分群を持つか、という問題を考えてみます。2 節で説明した通り、順序単位元をもつ次元群 (G, G^+, u) の同型類は、コントロール極小系の強軌道同型類と一対一に対応するのです。

定理 3.6 ([M2]) 次元群 (G, G^+, u) と自然数 m に対して次は同値。

- (i) $(K^0(Y, \psi), K^0(Y, \psi)^+, [1]) \cong (G, G^+, u)$ となるようなコントロール極小系 (Y, ψ) であって、 $T(\psi)$ が位数 m の元を持つようなものが、存在する。
- (ii) 可換群として $G/mG \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ であってかつ、順序単位元 u が G のなかで m で割れる。

(i) \Rightarrow (ii) は簡単に示せますが、(ii) \Rightarrow (i) は実際にコントロール極小系を作らないといけないので、多少やっかいです。コントロール極小系 (Y, ψ) の自己同型群 $C(\psi)$ に位数 m の元があると、そこから C^* 環 $C^*(Y, \psi)$ の上の位数 m の自己同型 α ができます。この α を $C^*(Y, \psi)$ のある AF 部分環に制限すると、 $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ の作用としてロホリン条件を満たすことがわかります。 C^* 環の上にロホリンを持つ巡回群作用があると、 K 群に関するある完全列が成立することが、泉先生によって調べられています。上の定理の (i) \Rightarrow (ii) はその特別な場合になっています。

この節の最後に、[M1] で定義された群準同型 $\eta : T(\psi) \rightarrow \text{Ext}(K^0(Y, \psi), \mathbf{Z})$ を考えます。 Ext 群とは、 $\text{Hom}(K^0(Y, \psi), \mathbf{R})$ から $\text{Hom}(K^0(Y, \psi), \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ への自然な準同型の余核の

ことでした。 $T(\psi)$ に位数 m の元 γ があったとします。定理 3.6 より $K^0(Y, \psi)/mK^0(Y, \psi)$ は $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ に同型ですから、 $K^0(Y, \psi)$ から $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ への全射準同型 $\tilde{\eta}(\gamma)$ が存在しています。

補題 3.7 上の設定で、 $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ を \mathbf{R}/\mathbf{Z} の部分群とみたとき、 $\tilde{\eta}(\gamma)$ は $\eta(\gamma)$ の代表元になっている。

この補題を使うことにより次がわかります。

系 3.8 (Y, ψ) をカントール極小系とし、 $\gamma \in T(\psi)$ を位数有限の非自明な元とする。このとき、 $\eta(\gamma) = 0$ であることと $\text{Hom}(K^0(Y, \psi), \mathbf{Z})$ がゼロでないことは同値である。

上の系では γ の位数は直接関係ないので、もし $T(\psi)$ が有限巡回部分群をもつならば、その上で η はゼロ写像であるかまたは単射であるかのどちらかになります。

4 例

カントール極小系と自己同型群に関して、これまでに得られた例を列挙します。

(1) 自然数 n, m に対して、 $C(\psi) \cong \mathbf{Z}/nm\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\psi$ であって、 $T(\psi) \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\psi$ であるようなカントール極小系 (Y, ψ) が作れます。

(2) D_n を二面体群とします。すなわち D_n は、 $a^n = b^2 = e$ かつ $bab = a^{-1}$ となる a と b によって生成される群です。 a の生成する巡回部分群は D_n の正規部分群です。もし n が奇数ならば、 $C(\psi) \cong D_n \oplus \mathbf{Z}\psi$ かつ $T(\psi) \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\psi$ となるようなカントール極小系 (Y, ψ) が作れます。しかし n が偶数の時には、定理 3.2 より、そのようなカントール極小系は存在しないことがわかります。

(3) 二面体群 D_6 のなかで a^2 の生成する正規巡回部分群 $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ を考えます。この部分群は定理 3.2 の条件にひっかかってはいません。実際、 $C(\psi) \cong D_6 \oplus \mathbf{Z}\psi$ であって $T(\psi) \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\psi$ となるカントール極小系 (Y, ψ) を作ることができます。

(4) 有限群に値をとるコサイクルによる skew product extension を前節で定義しましたが、同様にして、任意のコンパクト群に値をとるコサイクルによる skew product extension も考えることができます。2 節で説明した加算機変換は、空間そのものが可換なゼロ次元位相群になっていたのです。 3^∞ 型のそのような位相群を G とします。カントール極小系 (X, ϕ) とコサイクル $c : X \rightarrow G$ による skew product extension を (Y, ψ) とします。 $C(\psi)$ は G を部分群として持ちます。 (X, ϕ) と c をうまく定義することにより、 $C(\psi) = T(\psi) \cong G \oplus \mathbf{Z}\psi$ となるような (Y, ψ) を構成することができます。この例の次元群を計算してみるとそれぞれ

$$K^0(X, \phi) \cong \mathbf{Z}\left[\frac{1}{3}\right] \oplus \mathbf{Z}, \quad K^0(Y, \psi) \cong \mathbf{Z}\left[\frac{1}{3}\right] \oplus \mathbf{Z}\left[\frac{1}{3}\right]$$

となっていました。この場合には、 $\text{Hom}(K^0(Y, \psi), \mathbf{Z}) = 0$ にも関わらず、 $\ker \eta$ は非自明な元を含みます。つまり、系 3.8 は無限位数の元に対しては成立しません。

上であげたカントール極小系はすべて、加算機変換と軌道同型であるように構成することができます。

5 問題

最後に未解決問題を述べます。

(1) 今までに見つかった例では常に、 $T(\psi)$ は可換群でした。任意のカントール極小系に対して $T(\psi)$ は可換になるのではないかと思っているのですが、現時点ではよくわかりません。

(2) このノートでは \mathbf{Z} 作用を考えてきたわけですが、次元群や mod 写像は \mathbf{Z}^d 作用の場合でもほぼ同様に定義されます。そのときには mod 写像の核はどのような有限群を含み得るでしょうか。極小な \mathbf{Z} 作用の積を考えると、有限巡回群 d 個の直和を含み得ることはわかります。

参考文献

- [GPS] Giordano, T.; Putnam, I. F.; Skau, C. F.; *Topological orbit equivalence and C^* -crossed products*, J. reine angew. Math., 469 (1995), 51-111.
- [HPS] Herman, R. H.; Putnam, I. F.; Skau, C. F.; *Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics*, Internat. J. Math., 3 (1992), 827-864.
- [LM] Lemańczyk, M.; Mentzen, M. K.; *On metric properties of substitutions*, Compositio Math., 65 (1988), 241-263.
- [M1] Matui, H.; *Ext and OrderExt classes of certain automorphisms of C^* -algebras arising from Cantor minimal systems*, preprint.
- [M2] Matui, H.; *Finite order automorphisms and dimension groups of Cantor minimal systems*, preprint.
- [P] Putnam, I. F.; *The C^* -algebras associated with minimal homeomorphisms of the Cantor set*, Pacific J. Math., 136 (1989), 329-353.
- [W] Williams, S.; *Toeplitz minimal flows which are not uniquely ergodic*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 67 (1984), 95-107.