数理解析研究所講究録
1151 巻 2000 年 111-119

Hilbert bimodule からつくられる作用素環について

九州大・数理
米谷 和巳 (Kazumi Yonetani)

(0)

単位元を持つ C^*-環 A と、その上の右内積を持つ Hilbert A-A bimodule X から構成される C^*-環 $\mathcal{O}_X$ は、Katayama ([Ka]) と Pimsner ([Pi]) によって定義された。それは以下を満たす universal な C^*-環として特徴付けられる。
(簡単のために、bimodule X は有限生成であるとしておく。)

$\mathcal{O}_X$ は A と $\{S_\xi \mid \xi \in X\}$ で生成される universal な C^*-環で、その生成元は、以下の条件をみたす：

- $S_\xi + S_\eta = S_{\xi+\eta}$
- $S_{\lambda\xi} = \lambda S_\xi \quad (\lambda \in \mathbb{C})$
- $S_{\xi \cdot a} = S_\xi \cdot a \quad (a \in A)$
- $S_{\phi(a)\xi} = a S_\xi \quad$ ($a \in A$、ϕ は A から $L_A(X_A)$ へのうめこみ)
- $S_\xi^* S_\eta = \langle \xi, \eta \rangle_A$
- $S_{\varepsilon_1} S_{\varepsilon_1}^* + \cdots + S_{\varepsilon_n} S_{\varepsilon_n}^* = 1 \quad$ ($\{\varepsilon_i\}$ は X の右 basis)

ここでは、A を von Neumann 環としたとき、A と Hilbert A-A bimodule X から構成される von Neumann 環 $\mathcal{M}_X$ を構成する試みについて説明する。

この bimodule X から構成される von Neumann 環 $\mathcal{M}_X$ を定義する上で問題になるのは、$\mathcal{M}_X$ が作用する Hilbert 空間の指定をどうするか、ということである。

この問題を解決するために、bimodule X に、右内積 $(\langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ の構造だけでなく、左内積 $({}_A\langle\cdot,\cdot\rangle)$ の構造も入れる。この左内積が、von Neumann 環 $\mathcal{M}_X$ を特徴付ける鍵となる。

(1)

ここでは von Neumann 環 N と、その上の有限生成な bimodule X について説明する。

<u>定義.</u>

N を von Neumann 環とする。X が有限生成の Hilbert N-N bimodule であるとは、次を満たすことである：

(1) X は、右内積 $(\langle\cdot,\cdot\rangle_N)$ を持ち、有限の右 basis を持つ Hilbert right A-module である。

(2) X は、左内積 $({}_N\langle\cdot,\cdot\rangle)$ を持ち、有限の左 basis を持つ Hilbert left A-module である。

(3) ・$(a\xi)b = a(\xi b) \quad (a, b \in A, \xi \in X)$

・2つの norm ${}_N\|\xi\| := \|{}_N\langle\xi,\xi\rangle\|^{1/2}$ と $\|\xi\|_N := \|\langle\xi,\xi\rangle_N\|^{1/2}$ は同値。

(4) N の、bimodule X への作用は、以下の意味で bounded operator になる：

$\pi : N \longrightarrow L_N(X_N) \quad : \quad \pi(a)\xi = a\xi \quad \cdots$ unital $*$-hom.

$\rho : N \longrightarrow {}_NL({}_NX) \quad : \quad \rho(a)\xi = \xi a \quad \cdots$ unital anti $*$-hom.

このとき、写像 π, ρ は normal である。 ☒

ここで、上記(4)の "normal" の意味について説明する。

<u>定義.</u> ([Pa])

N を von Neumann 環 (C^*-環) とし、X を、Hilbert right N-module とする。

このとき、X が self-dual であるとは、

$\xi \in X$ に対し、 $\hat{\xi} : X \longrightarrow N$; $\hat{\xi}(\eta) := \langle \xi, \eta \rangle_N$

とし、

$$\hat{X} := \{ \hat{\xi} \mid \xi \in X \}$$

$$X' := \{ \tau : X \longrightarrow N \mid \tau : \text{bounded, right } N\text{-linear map} \}$$

と置いたとき、

$$\hat{X} = X'$$

が成立することである。（"Riesz の表現定理" という感じ） ▨

self-dual な module については、次のことが知られている。

<u>定理</u>（[Pa]）

N を von Neumann 環 とし、X を self-dual Hilbert right N-module とする。このとき、$L_N(X_N)$ は W^*-環 である。▨

X が有限生成の Hilbert right N-module で、$\{\varepsilon_i\}$ を その right basis とするとき、任意の $\tau \in X'$ は

$$\tau(\xi) = \tau\left(\sum \varepsilon_i \langle \varepsilon_i, \xi \rangle_N\right) = \sum \tau(\varepsilon_i) \langle \varepsilon_i, \xi \rangle_N = \left\langle \sum \varepsilon_i \tau(\varepsilon_i)^*, \xi \right\rangle_N \quad (\xi \in X)$$

と表示することができる。よって X は self-dual であり、$L_N(X_N)$ は W^*-環である。

X が self-dual（特に有限生成）のとき、N の有界な増大 net $(a_\lambda) \subset N_+$ に対し、$(\pi(a_\lambda)) \subset L_N(X_N)$ という、$L_N(X_N)$ の有界な増大 net に対する $\sup(\pi(a_\lambda))$ というものを考えることができる。この意味で、π が normal であるというのを、

$$\sup(\pi(a_\lambda)) = \pi(\sup a_\lambda)$$

が成り立つことと定義する。（ρ についても同様。）

(2)

次に、有限生成な Hilbert N-N bimodule X から構成される von Neumann 環 $\mathcal{M}_X$ について説明する。

定義.

N を von Neumann 環とし、X を有限生成の Hilbert N-N bimodule で、full であるとする。

※

X が full であるとは、

$$\left(\mathrm{span}\{{}_N\langle\xi,\eta\rangle \mid \xi,\eta\in X\}\right)^{-(\sigma\text{-weak})} = N$$

$$\left(\mathrm{span}\{\langle\xi,\eta\rangle_N \mid \xi,\eta\in X\}\right)^{-(\sigma\text{-weak})} = N$$

をみたすことである。

X の有限な right basis $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ に対し、$d_r(X) := \sum {}_N\langle\varepsilon_i,\varepsilon_i\rangle$ という量がスカラーであると仮定する。(これは、right basis $\{\varepsilon_i\}$ のとり方に依らない)

※ $d_r(X)$ は、bimodule の"次元"にあたるものである。

このとき、$\mathcal{M}_X$ が N と bimodule X で生成される von Neumann 環であるとは、以下の条件をみたすことと定義する。

(1) N から $\mathcal{M}_X$ への単射で normal な unital $*$-hom. π が存在する。

(2) $\{T_\xi \mid \xi\in X\}\subset\mathcal{M}_X$ が存在して、

- T_* : linear
- $\pi(a)T_\xi = T_{a\xi}$, $T_\xi\pi(a) = T_{\xi a}$ $(a\in N)$
- $T_\xi^* T_\eta = \pi(\langle\xi,\eta\rangle_N)$
- $T_{\varepsilon_1}T_{\varepsilon_1}^* + \cdots + T_{\varepsilon_n}T_{\varepsilon_n}^* = 1$

をみたす。

(3) $\mathcal{M}_X$ から $\pi(N)$ への faithful, normal な条件付き期待値 G_N が存在して,

$$G_N((T_{\xi_1}\cdots T_{\xi_p})(T_{\eta_1}\cdots T_{\eta_q})^*)$$
$$= \delta_{p,q}\cdot dr(X)^{-p}\,\pi({}_N\langle \xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_p,\ \eta_1\otimes\cdots\otimes\eta_p\rangle)$$

をみたす.

(4) $\mathcal{M}_X = \{\pi(N),\ \{T_\xi \mid \xi\in X\}\}''$. ▨

(3)

$\mathcal{M}_X$ の一意性については, 次の結果が得られる.

<u>命題</u>

N を σ-finite な von Neumann 環であるとし, X を有限生成な Hilbert N-N bimodule で, full条件を満たしているとし, $dr(X)$ は スカラー であるとする.

このとき, $\mathcal{M}_X$ が存在すれば, それは $*$-同型を除いて一意である. ▨

$\mathcal{M}_X$ の存在性については, ある条件のもとで, 存在性を示すことができる.

<u>命題</u>

N を finite von Neumann 環 とし, X を有限生成の Hilbert N-N bimodule で full条件を満たすとし, $dr(X)$ は スカラー であるとする. N 上の faithful normal tracial state τ を 1つ固定し, $\tau({}_N\langle\xi,\eta\rangle) = \tau(\langle\eta,\xi\rangle_N)$ $(\xi,\eta\in X)$ という性質をみたしているとする. このとき, $\mathcal{M}_X$ は存在する. ▨

(4)

最後に, いくつかの例を説明する.

(1) N を finite von Neumann 環で，N 上に faithful normal tracial state τ があるとする．α を N 上の automorphism で，τ は α - invariant とする．

これに対し，bimodule X を，$X := N$ と定義し，内積，作用を次で定義する．

$$a \cdot x \cdot b := \alpha^{-1}(a)xb \qquad (a, b \in N,\ x \in X = N)$$

$${}_N\langle x, y\rangle := \alpha(xy^*)$$

$$\langle x, y\rangle_N := x^* y$$

このとき，1 が X の basis であり（よって，有限生成），$d_r(X) = 1$ となる．

また，

$$\tau({}_N\langle x, y\rangle) = \tau(\alpha(xy^*)) = \tau(xy^*) = \tau(y^* x) = \tau(\langle y, x\rangle_N)$$

もわかる．

よって，von Neumann 環 $\mathcal{M}_X$ は存在する．

このとき，

$$S_x = S_{1 \cdot x} = S_1 \cdot x$$

$$S_x = S_{\alpha(x) \cdot 1} = \alpha(x) \cdot S_1$$

から，$\mathcal{M}_X$ は N と S_1 で生成されるvon Neumann 環で，covariant relation

$$S_1 a S_1^* = \alpha(a) \qquad (a \in N)$$

をみたすことがわかる．

また，条件付き期待値 G_N の性質より，

$$G_N(S_1^n) = 0 \qquad (n \neq 0)$$

がわかる．

ここで，次のよく知られた結果を考える．

<u>命題</u>（たとえば [St]）

N を σ - finite von Neumann 環，G を discrete group，α を G から N の automorphism group $\mathrm{Aut}(N)$ への作用とする．

von Neumann 環 M が，次の条件をみたしているとする：

- N から M への，単射で normal，unital $*$-hom. π が存在する．
- M から $\pi(N)$ への faithful，normal な条件付期待値 P が存在する．
- G から M の unitary 群への表現 u が存在する．

そして，

- $M = \{\pi(N), u(G)\}''$
- $\pi(\alpha_g(x)) = u_g\pi(x)u_g^*$ $(x \in N,\ g \in G)$
- $P(u_g) = 0$ $(g \neq e)$

このとき，M から $N \rtimes_\alpha G$ への $*$-isomorphism Φ が存在して，

- $\Phi(\pi(x)) = \pi_\alpha(x)$ $(x \in N)$
- $\Phi(u_g) = 1 \otimes \lambda_g$ $(g \in G)$
- $\Phi(P(x)) = P_\alpha(\Phi(x))$ $(x \in M)$

をみたす．$\blacksquare$

この結果より，$\mathcal{M}_x$ と $N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ は $*$-同型であることがわかる．

$\mathcal{M}_x$ の "G_N" が，$N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ での "P" に対応するものである．

(2) (Katayama [Ka])

$N \subset M$ を II_1-因子環とし，τ を M 上の一意な faithful normal tracial state とし，Jones index は $1 < [M:N] < +\infty$ であるとする．E_N を，M から N への faithful normal な条件付き期待値とする．

これに対して，N-N bimodule X を，$X := M$ と定義し，内積，作用を次のように定義する．

$$a \cdot x \cdot b := axb \quad (a, b \in N,\ x \in X = M)$$

$${}_N\langle x, y\rangle := E_N(xy^*)$$

$$\langle x, y\rangle_N := E_N(x^*y)$$

条件より．Pimsner - Popa の結果（[Pi - Po]）より．M の元 $m_1, \dots, m_p \in M$ が存在して．次をみたす．

・ $X (= M)$ の任意の元 x は． $x = m_1 E_N(m_1^* x) + \cdots + m_p E_N(m_p^* x)$ と書ける．

・ $m_1 m_1^* + \cdots + m_p m_p^* = [M : N]$ ．

これは．

$$x = m_1 \langle m_1, x \rangle_N + \cdots + m_p \langle m_p, x \rangle_N$$

ということであり．$\{m_i\}$ が X の有限な right basis であることを言っている．

また．

$$
\begin{aligned}
&{}_N\langle x, m_1^* \rangle m_1^* + \cdots + {}_N\langle x, m_p^* \rangle m_p^* \\
&= E_N(x m_1) m_1^* + \cdots + E_N(x m_p) m_p^* \\
&= (m_1 E_N(m_1^* x^*) + \cdots + m_p E_N(m_p^* x^*))^* \\
&= (x^*)^* \\
&= x
\end{aligned}
$$

より．(m_i^*) が．X の有限な left basis であることを言っている．

またこのとき

$$
\begin{aligned}
\tau({}_N\langle x, y \rangle) &= \tau(E_N(x y^*)) = \tau(x y^*) = \tau(y^* x) = \tau(E_N(y^* x)) \\
&= \tau(\langle y, x \rangle_N).
\end{aligned}
$$

もわかる．

また．bimodule の"次元" $d_r(X)$ は

$$
\begin{aligned}
d_r(X) &= {}_N\langle m_1, m_1 \rangle + \cdots + {}_N\langle m_p, m_p \rangle \\
&= E_N(m_1 m_1^*) + \cdots + E_N(m_p m_p^*) \\
&= E_N(m_1 m_1^* + \cdots + m_p m_p^*) \\
&= [M : N]
\end{aligned}
$$

より．Jones index が出てくる．

よって．bimodule から構成される von Neumann 環 $\mathcal{M}_X$ が存在することがわかる．

さらに．$\mathcal{M}_X$ は factor であり．type $\mathrm{III}_{\frac{1}{[M:N]}}$ であることもわかる．

参考文献

[Ka-Wa] T. Kajiwara, Y. Watatani,
Jones index theory by Hilbert C^*-bimodules and K-theory,
Trans. Amer. Math. Soc. (to appear)

[Ka] Y. Katayama
Generalized Cuntz algebras O_N^M,
RIMS Kokyuroku 858, 87-90 (1994).

[Pa] W. L. Paschke
Inner product modules over B^*-algebras
Trans. Amer. Math. Soc. 182, 443-468 (1973).

[Pi] M. Pimsner
A class of C^*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$
In: D. Voiculescu (ed.), Free probability theory, AMS, 12, 189-212 (1997)

[Pi-Po] M. Pimsner, S. Popa
Entropy and index for subfactors
Ann. Sc. Ec. Norm. Sup 19, 57-106 (1985)

[St] S. Stratila
Modular theory in operator algebras
Abacus Press, 1981.