

粘性の大きい場合のファラデー共鳴に 関する数値的研究

阪府大工 近野雅嗣 (Masatsugu Chikano)
阪府大工 村上洋一 (Youichi Murakami)

1 はじめに

ファラデー共鳴とは、液体を満たした容器を一様に加振するとき生じるパラメトリック共鳴のことである。正弦的な加振を与えるので、外力は振動数と振幅で特徴づけられる。振動数を固定した場合、加振の振幅が分岐パラメーターになり、加振を強くすると表面定在波が生じる。一般に、励起された波の振動数は加振振動数の半分であることが多い。

実験では、水を作業流体として用いることが多く、粘性は小さいとみなせる。粘性が小さく流体層が深い場合には、非粘性渦なしの仮定のもとでポテンシャル流として取り扱うことができる。Benjamin and Ursell [1]は、このような扱いのもとでマシュエ方程式を導き出し、線形分散関係を求めた。これは実験と一致することが知られている。弱い散逸を考慮にいたした弱非線形解析も行われ、特に、少数自由度の力学系で記述される場合の解の分岐、モード相互作用によるカオスなどが実験・理論の両面から研究されている [2]。

粘性が大きく流体層が薄い場合についての線形安定解析は、Kumar and Tuckerman [3]によって最近行われた。この解析結果は、グリセリンのような粘性の大きな液体を用いた、側壁の影響が無視できるようなアスペクト比の大きな実験 [4]と比較され、臨界加振振幅や臨界波数が一致することが示されている。

アスペクト比の大きな実験においてどのようなパターンが現れるかに興味を持たれ、活発に議論されている [2,5]。特に、粘性の影響で選択されるパターンの変化についての研究が多い。粘性が大きくなると、直線パターン（対流の場合のロールに相当する）が出現するという実験報告がある [6]。

最近、さらに粘性の効果を大きくした実験 [7]が行われ、興味深い現象が報告されている。この実験では、水の80倍程度の粘性率を持つグリセリンと水の混合液を直径144[mm]、深さ1.3[mm]の容器に適当な高さまで満たす。加振を強くすると、静止状態から定在波が励起される点はこれまでの実験と同じであるが、容器の真ん中のみ、または容器の壁付近の一部の領域のみに局在した波が生じる点が異なる。これまでの実験では、容器の側壁のごく近傍を除き容器全体に波が励起されていた。さらに加振を強くしていくと2次不安定として、孤立した波が生じ、大きな振幅で振動しながら進行していく。粘性の小さい場合はこのような孤立波は生じるという報告はないので、この孤立波はエネルギーの散逸および外力が大きいことにより生じる現象と考えられる。この点が非線形分散系で現れるソリトンと異なっている。このような1次不安定による局在した波および2次不安定による孤立した波の発生のメカニズムを解明することを研究の目的としている。

前回 [8] に引き続き、直接数値計算により 1 次不安定による局在した波の性質を明らかにすることを目的としている。前回、2 次元（表面は 1 次元）の数値計算では、局在した波が発生しないという結果を得た。今回は、この 2 次元定在波が 3 次元攪乱に対して安定であるかどうかを明らかにすることを目的としていた。ところが、発表後、2 次元定在波の平衡振幅の空間刻み依存性を調べていると、収束性が著しく悪いことに気づいたので、移流項を 3 次精度に直して、2 次元数値計算を再度やり直すことになった。定性的な結果は以前と変わらない。そこで、3 次精度で計算した結果、特に、加振振幅と平衡振幅の依存性についてまとめる。その後、3 次元微小攪乱の支配方程式の定式化について説明する。最後に、今後の課題について述べる。

2 2次元の場合の定式化と数値計算法

前回と同様に、2 次元の直接数値計算を行うことで調べた。基礎方程式は、非圧縮の連続の式、ナビエーストクス方程式を用いる。また、自由表面における境界条件では表面張力と粘性応力を考慮し、底の固体壁では粘性境界条件を、左右の固体壁では粘性境界条件または周期境界条件を課した。自由表面での境界条件の取り扱いにおいては近似は一切していない。ただし、液面高さは位置の一価関数と仮定して境界適合格子を用いた。1 次不安定を対象としているため波が巻き込むようなことはないので、この仮定は問題ないと考えられる。また、空気の層の運動は無視しており一定の大気圧を仮定する。

以上述べた基礎方程式を以下にまとめる。ただし、下付きの文字はその変数による微分を表す。連続の式およびナビエーストクス方程式は次のように与えられる。

$$u_x + w_z = 0, \quad (1)$$

$$u_t + uu_x + ww_z = -(1/\rho)p_x + \nu(u_{xx} + u_{zz}), \quad (2)$$

$$w_t + ww_x + ww_z = -(1/\rho)p_z + \nu(w_{xx} + w_{zz}) + g_z. \quad (3)$$

$z = h(x, t)$ における自由表面での運動学的、法線応力および接線応力の境界条件は、それぞれ、

$$h_t + uh_x = w, \quad (4)$$

$$P = -\sigma h_{xx} / (\rho[1 + h_x^2]^{3/2}) + 2\nu[w_z - (u_z + w_x)h_x + u_x h_x^2] / (1 + h_x^2), \quad (5)$$

$$u_z + w_x - 2h_x(u_x - w_z) / (1 - h_x^2) = 0 \quad (6)$$

のように与えられる。下面 ($z = 0$) での粘性境界条件は、 $u = w = 0, p_z = \nu w_{zz} + g_z$ のようになり、側面 ($x = 0, L_x$) では、粘性境界条件もしくは周期境界条件を適用した。

高さ方向を $\zeta = z/h$ により座標変換した計算空間において、くいちがい格子を用いて一様に離散化した。SMAC法を用い、時間には 1 次の前進オイラー法、空間には 2 次の中心差分、ただし、移流項には 3 次の風上差分を用いた。なお、ポアソン方程式は SOR 法で解いている。

計算におけるパラメーターは、容器の幅 $L = 0.072[m]$ または $L = 0.008[m]$ 、容器の深さ $h = 0.0013[m]$ 、粘性係数 $\nu = 0.00008[m^2/s]$ 、密度 $\rho = 900[kg/m^3]$ 、表面張力係数 $\sigma =$

0.030[N/m], 加振角振動数 $\omega = 257.5[s^{-1}]$, 加振振動数 $f = 41[Hz]$ とした. これらのパラメーターは Lioubashevski et al. の実験 [7] と合わせてあるが, 容器の大きさは半分のもので1/18のスケールのもので(1波長分に相当)で計算した. 加振は $g_z = g + a_g (= a\omega^2) \cos \omega t$ で表され, ここでは ω は一定にしているので, a_g が不安定な分岐パラメーターとなる. 時間刻みは $\Delta t = 0.000012195[s]$ で加振周期を2000等分している. 空間刻みは高さ方向に分割数 $N_z = 10, 20$ をとり, 水平方向は $L = 0.072[m]$ のときに分割数 $N_x = 270$, $L = 0.008[m]$ のときに $N_x = 30, 60, 120, 240$ を用いている.

3 2次元の場合の数値計算結果

前回(移流項は1次精度)の場合[8], 臨界加振重力の実験との比較や境界層厚さのオーダーを検討することで計算コードの妥当性および2次元では局在構造が出現しないことを報告した. さらに, 超臨界状態における加振重力と平衡振幅の依存性を検討していると, 空間刻み幅の影響がかなり大きいことが明らかになってきたので, 今回は移流項を3次精度にした結果について報告する. 以下では, 水平方向と高さ方向の分割数を変えた結果について報告しているが, 時間の刻み数を増やしても計算結果が変化しないことをいくつかの例で確認している.

まず, 1波長の波が発生する場合, すなわち, 水平長さ $L = 0.008[m]$ に周期境界条件を適用し, 分割数を $N_x = 30, N_z = 10$ とした計算を行った. 加振重力の大きさ a_g を16.600g, 16.605g, 16.610g, 16.620g, 16.630gとしたときの, 自由表面の中心点の時間変化を図1に, 高さが最大値をとる点の時間変化を図2に示す. 図1(a)で $a_g = 16.600g$ のときには, 波の振幅は増大も減衰もしないことが示されているので中立安定と考えられ, この値が臨界加振振幅であるとみなした. $a_g = 16.600g$ よりも大きな a_g で加振すると, 振幅は加振の2倍の周期で振動しながら成長し, 一定の値をとるようになる.

この臨界加振重力の正当性を確認するために, 線形安定性の固有値問題のプログラムを K. Kumar and L. Tuckerman[3] のアルゴリズムに基づいて作成した[9]. 彼らと同様に2層流体系に関するプログラムではあるが, 上層を厚い空気層として計算すると, 上層の条件を多少変化させても臨界加振振幅はほとんど変化しないので, 今行っている1層系の直接数値計算と比較しても良いと考えた. 上層を厚い空気層と仮定して, パラメーターを本計算のものに合わせて得られた臨界加振重力の大きさは, $a_g = 16.640g$ であった. $N_x = 30, N_z = 10$ の場合の $a_g = 16.600g$ と少しずれている. 以前の研究[8]では論文のグラフから値を読み取っていたので, このような正確な比較ができなかった.

図3は水平方向の刻みを $N_x = 120$, 高さ方向の刻みを $N_z = 10$ とした場合の, $a_g = 16.610g, 16.620g, 16.625g, 16.630g, 16.650g$ のときの自由表面の最大高さの点の時間変化である. この場合に臨界加振重力の大きさは $a_g = 16.610g$ より少し大きい値となり, $N_x = 30, N_z = 10$ のときの臨界加振重力 $a_g = 16.600g$ より大きくなり, 固有値計算による臨界値に近づいていく. このように線形分散関係は正しく再現されていると考えられる.

次に, 非線形項の収束性を確認するために, 高さ方向の刻みを $N_z = 10$ として, 水平方向の刻み $N_x = 30, 60, 120, 240$ に対する定在波の平衡振幅の大きさの違いを比較した. 図4

は $a_g = 16.630g$ のときの水平方向の刻みと波の振幅の関係を表したものである。刻みによって多少のばらつきはあるものの、正確な振幅の大きさは $N_x = 30$ と $N_x = 120$ の間にあると考えられる。

また、 $N_z = 10$ として $N_x = 30, 60, 120$ のそれぞれの場合について、加振重力の大きさと波の振幅の関係を調べた。超臨界分岐が生じると仮定した場合のランダウ理論によると、臨界付近では加振重力から臨界加振重力の差の平方と波の振幅とは比例関係にあることが示される。図5は、横軸に加振重力の大きさ、縦軸に十分に成長してほぼ一定値となった波の振幅をプロットしたグラフである。図6では、縦軸を一定になった波の振幅の平方した値にとっている。どの刻みの場合にもランダウ理論と非常によく合っていることがわかる。また、水平方向の刻み $N_x = 60$ 、高さ方向の刻み $N_z = 20$ の場合についても図に示している。この場合にはランダウ理論に合うだけでなく、臨界加振重力の値が固有値計算による臨界値ともよく合うようになる。水平方向、高さ方向ともさらに細かくして、刻み数による振幅の値の変化を調べたがほぼ収束しており、この刻み数で十分と考えられる。また実験[7]において、定在波の発生に関してはヒステリシスがないと報告されているので、超臨界分岐であることを示しているこの数値結果は実験結果と整合性がある。

次に、水平方向に広がった場合 ($L = 0.072[m]$, $N_x = 270$, $N_z = 10$) において、側壁で粘着条件を課して計算を行った。 $a_g = 16.900g$ で加振したときの表面形状と速度ベクトルを図7に示す。図7からわかるように表面に9個の波が生じているが、これは最大増幅の線形モードの波数と一致する。図7の表面波形を見るとわかるように、側壁を除いて表面全体でほぼ一定の振幅の定在波が生じている。このように、1次不安定の結果として局在した定在波は現れず、粘性の小さい場合に一般に生じる表面全体に広がった一様な定在波が生じた。この一様な定在波に対して $y = e^{-(x-x_0)^2}$ で表される中心の膨らんだ形の攪乱を加えた。図8に示すように時間の経過とともに攪乱は減衰してもとの一様な定在波に戻る。すなわち、2次元計算で得られた一様な定在波は2次元攪乱に対しては安定であるといえる。以上は、以前報告した移流項が1次精度の場合の結果[8]と一致している。

4 3次元攪乱に対する線形安定性

前節での結果は、局在した定在波の発生は3次元空間に固有の現象であることを示唆している。そこで、この2次元定在波の3次元微小攪乱に対する安定性を調べる。

Kumar and Tuckerman[3]は空間的に一様な振動場に対する線形安定性を扱ったが、この基本場は2次元空間構造を持ち振動しているので、固有値問題を数値的に解くのは非常に困難である。また、3次元の直接数値計算を実行するのも現在の計算機では時間がかかりすぎる。そこで、その攪乱が増大するか減少するかを攪乱の線形方程式の時間発展を解くことにより調べることにした。基礎方程式として、3次元非圧縮の連続の式、ナビエーストークス方程式および境界条件を用いる。速度、圧力、液面高さを得られた2次元定在波(大文字で表わす)と、 y 方向の依存性を持つ微小攪乱(小文字で表わす)を代入して攪乱の非線形項を無視することにより攪乱に対する線形方程式を求める。さらに、新たに考えた y 方向に対しては定在波は一様であるので、この方向に対しては攪乱を $u(x, y, z, t) = \sum \hat{u}(x, z, t) \exp(i\ell y)$

のようにフーリエ級数展開することができる。したがって、波長 l に対する各々のフーリエ成分に対する発展方程式は2次元計算になる。

このようにして得られた変換された攪乱の基礎方程式を以下に示す。

・連続の式

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(H\hat{u} + \hat{h}U) + iHl\hat{v} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \{ \hat{w} - \zeta(H_\xi \hat{u} + \hat{h}_\xi U) \} = 0 \quad (7)$$

・ナヴィエストークス方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} + U \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} + \hat{u} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{W - \zeta(H_\tau + UH_\xi)}{H} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \zeta} \\ & + \frac{1}{H} \left[\hat{w} - \zeta(\hat{h}_\tau + U\hat{h}_\xi + \hat{u}H_\xi) - \frac{\hat{h}}{H} \{W - \zeta(H_\tau + UH_\xi)\} \right] \frac{\partial U}{\partial \zeta} \\ & = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} + \zeta \frac{H_\xi}{H} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta} + \frac{\zeta}{H} \left(\hat{h}_\xi - \frac{H_\xi \hat{h}}{H} \right) \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \nu \left(\hat{\Delta}_{H+h} (U + u) - \hat{\Delta}_H U \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} + U \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \frac{W - \zeta(H_\tau + UH_\xi)}{H} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \zeta} \\ & = -il\hat{p} + i\frac{\zeta}{H} l\hat{h} \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \nu \hat{\Delta}_H v \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} + U \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} + \hat{u} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{W - \zeta(H_\tau + UH_\xi)}{H} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \zeta} \\ & + \frac{1}{H} \left[\hat{w} - \zeta(\hat{h}_\tau + U\hat{h}_\xi + \hat{u}H_\xi) - \frac{\hat{h}}{H} \{W - \zeta(H_\tau + UH_\xi)\} \right] \frac{\partial W}{\partial \zeta} \\ & = -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta} - \frac{\hat{h}}{H} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) + \nu \left(\hat{\Delta}_{H+h} (W + w) - \hat{\Delta}_H W \right) \end{aligned} \quad (10)$$

ただし,

$$\begin{aligned} & \hat{\Delta}_{H+h} (U + u) - \hat{\Delta}_H U \\ & = \hat{\Delta}_H u + \frac{2}{H^2} \left\{ \zeta^2 H_\xi \hat{h}_\xi - \frac{\hat{h}}{H} (\zeta^2 H_\xi^2 + 1) \right\} \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} - \frac{2\zeta}{H} \left(\hat{h}_\xi - \frac{H_\xi \hat{h}}{H} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta \partial \xi} \\ & + \frac{\zeta}{H} \left\{ 4 \frac{H_\xi}{H} \left(\hat{h}_\xi - \frac{H_\xi \hat{h}}{H} \right) - \left(\hat{h}_{\xi\xi} - l^2 \hat{h} - \frac{H_{\xi\xi} \hat{h}}{H} \right) \right\} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_H u & = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} - l^2 \hat{u} + \frac{1}{H^2} (\zeta^2 H_\xi^2 + 1) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \zeta^2} - 2\zeta \frac{H_\xi}{H} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \zeta \partial \xi} \\ & + \frac{\zeta}{H} \left(2 \frac{H_\xi^2}{H} - H_{\xi\xi} \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (12)$$

のように定義されている。また、境界条件についてはここでは省略している。ハットのつ

いた攪乱はフーリエ成分であるので複素数であるが、攪乱の基礎方程式および境界条件を見ると、 $\hat{u}, \hat{w}, \hat{h}, \hat{p}$ を実数、 \hat{v} を純虚数としてよいことがわかる。

これらの方程式を用いて、今までの数値計算法と同様にSMAC法を用いて微小攪乱 $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{h}, \hat{p}$ の時間発展を計算することにより、 y 方向の攪乱の波数に対する増幅率および固有関数の形を求める予定である。講演では、移流項が1次精度のものについての予備的結果を報告したが、現在3次精度のコードを作成中である。

5 まとめ

前回に引き続き、粘性の大きい場合に生じるファラデー定在波の局在構造について数値的に研究している経過について報告した。講演発表内容と若干異なるが、要点をまとめると、

- 移流項を3次精度とした2次元直接数値計算コードを作成した。
- 前回と同様、2次元計算では局在構造は現れないことを確認した。
- 加振重力の大きさと平衡振幅の依存性から1次不安定は超臨界分岐であることを示した。
- 3次元攪乱に対する方程式系を導いた。

今後の課題は、3次元攪乱に対する数値的結果を出し、局在構造発生機構についての物理的解釈を与えることである。

参考文献

- [1] T. B. Benjamin and F. Ursell: Proc. Roy. Soc. London **A255** (1954) 505.
- [2] 梅木誠：ながれ **16** (1997) 218.
- [3] K. Kumar and L. Tuckerman: J. Fluid Mech. **279** (1994) 49.
- [4] W. S. Edwards and S. Fauve: Phys. Rev. E **47** (1993) R788-791.
- [5] e.g. K. Yoshimatsu and M. Funakoshi: J. Phys. Soc. Jpn. **67** (1998) 451.
- [6] W. S. Edwards and S. Fauve: J. Fluid Mech. **278** (1994) 123.
- [7] O.Lioubashevski, H.Arbell and J.Fineberg: Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3959;
O.Lioubashevski, J.Fineberg and L.S.Tuckerman: Phys. Rev. E **55** (1997) 3832;
J.Fineberg and O.Lioubashevski: Physica A **249** (1998) 10.
- [8] 近野雅嗣, 村上洋一：数理解析研究所講究録 **1092** (1999) 1.
- [9] 小池隆寛：平成10年度卒業論文

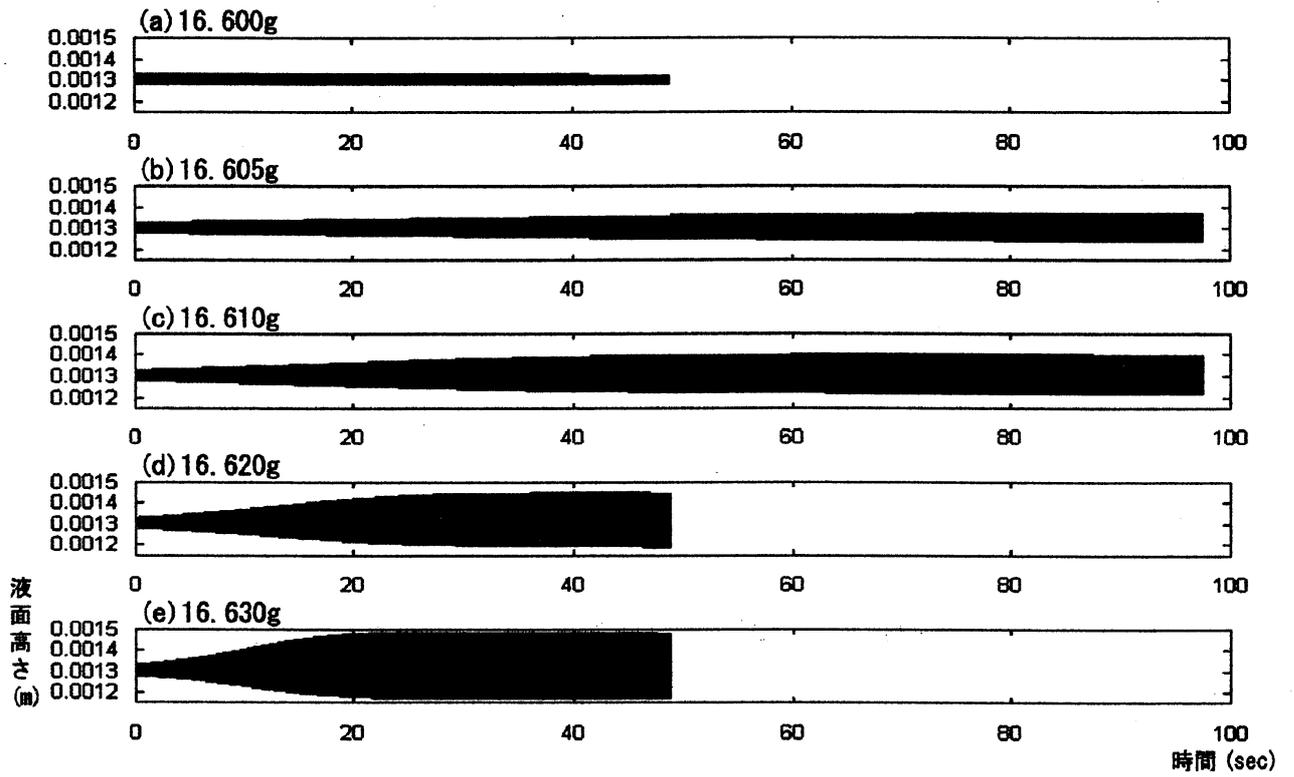


図1 液面の中心点の時間変化 (30×10)

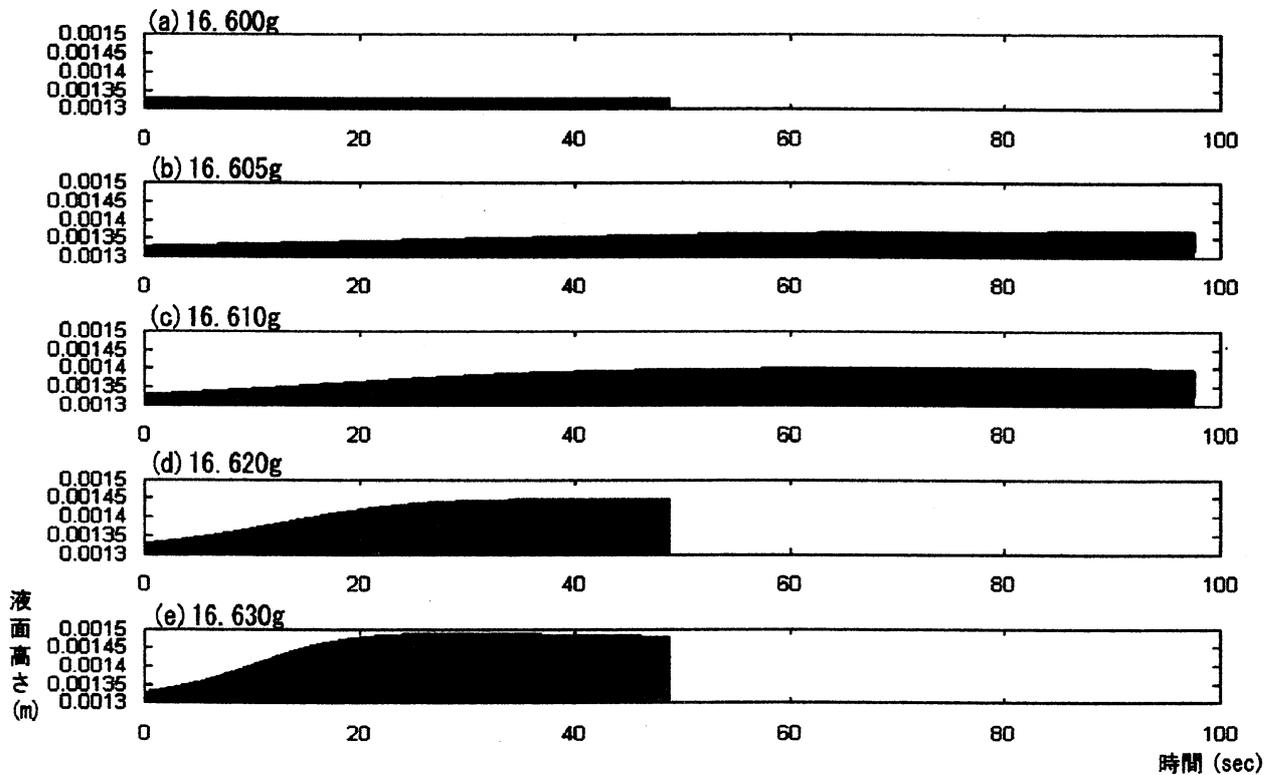


図2 液面の最高点の時間変化 (30×10)

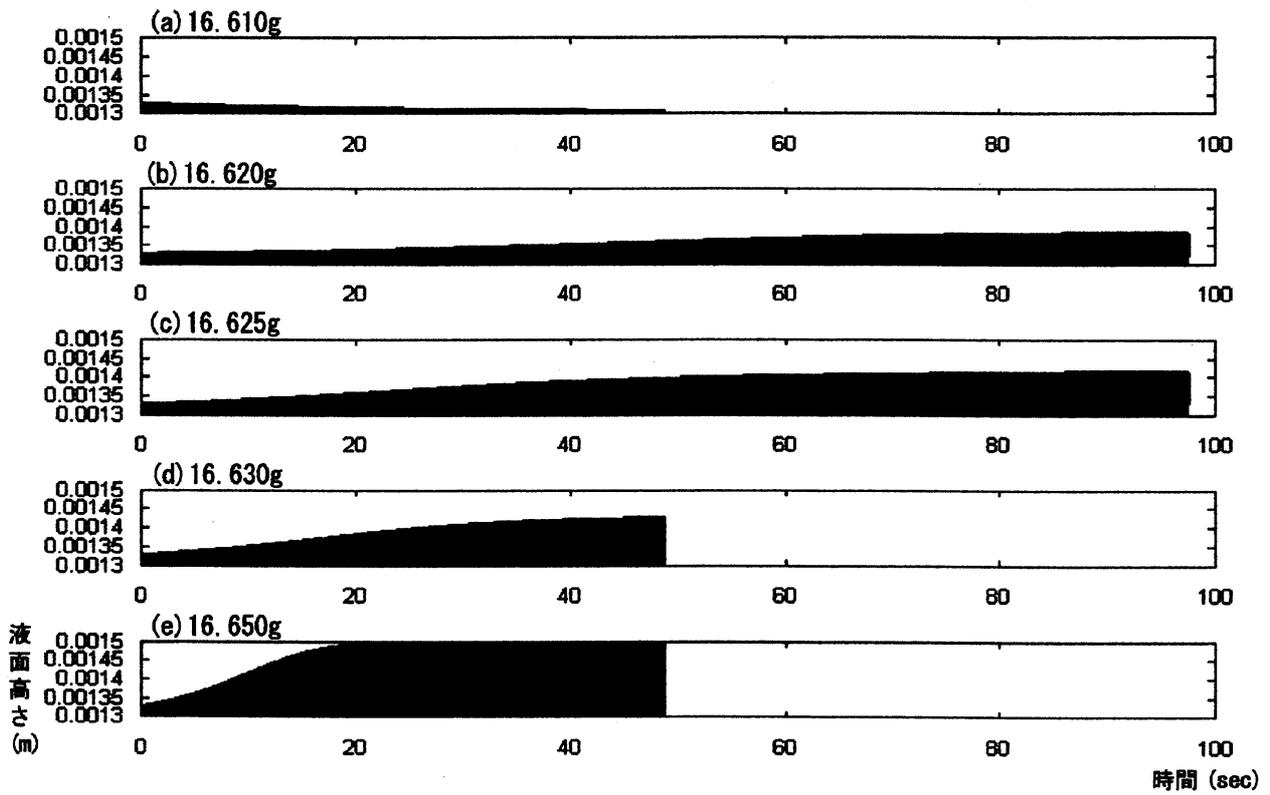


図3 液面の最高点の時間変化 (120×10)

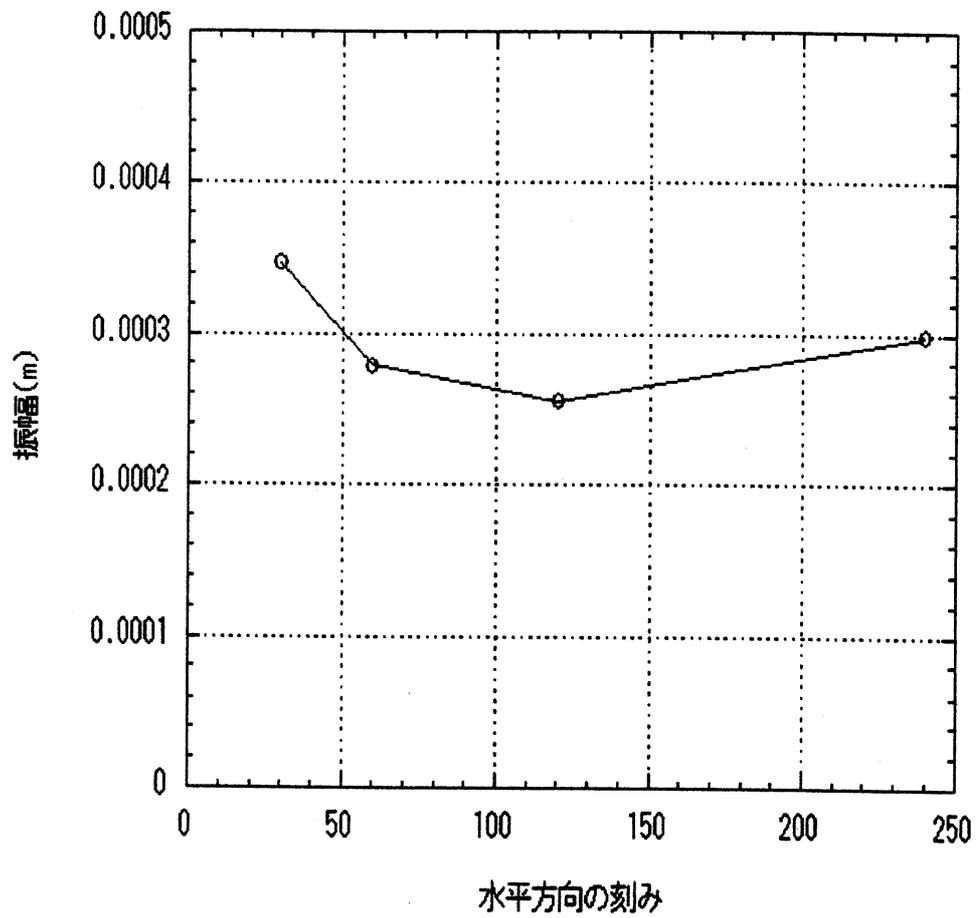


図4 水平方向の刻みと波の振幅の関係 (16.630g)

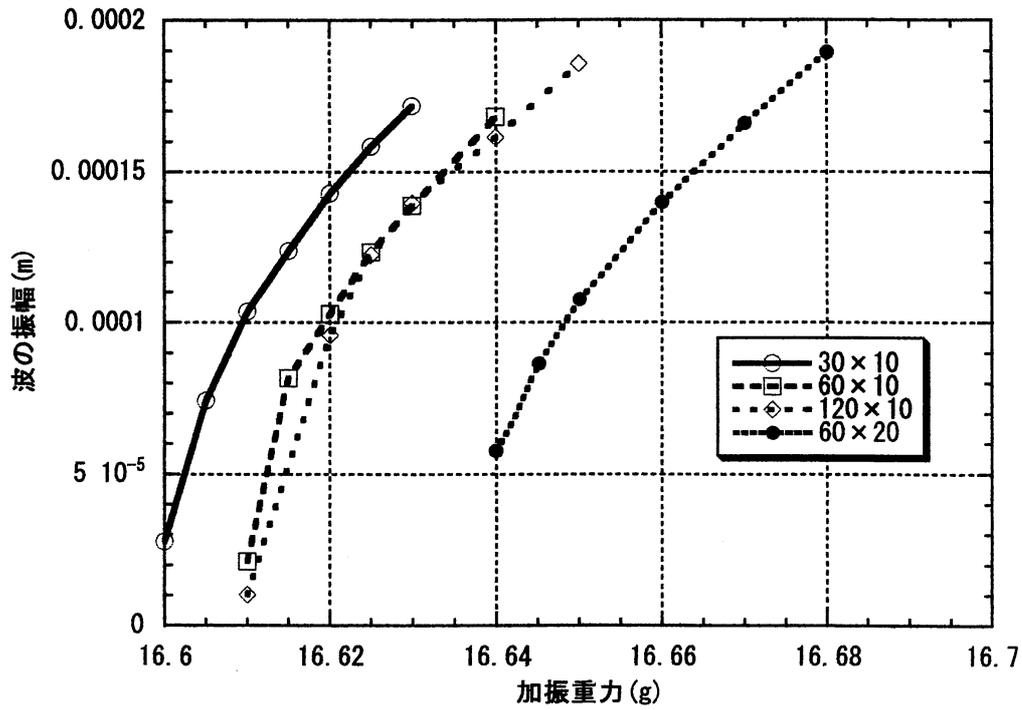


図5 加振重力と波の振幅の関係

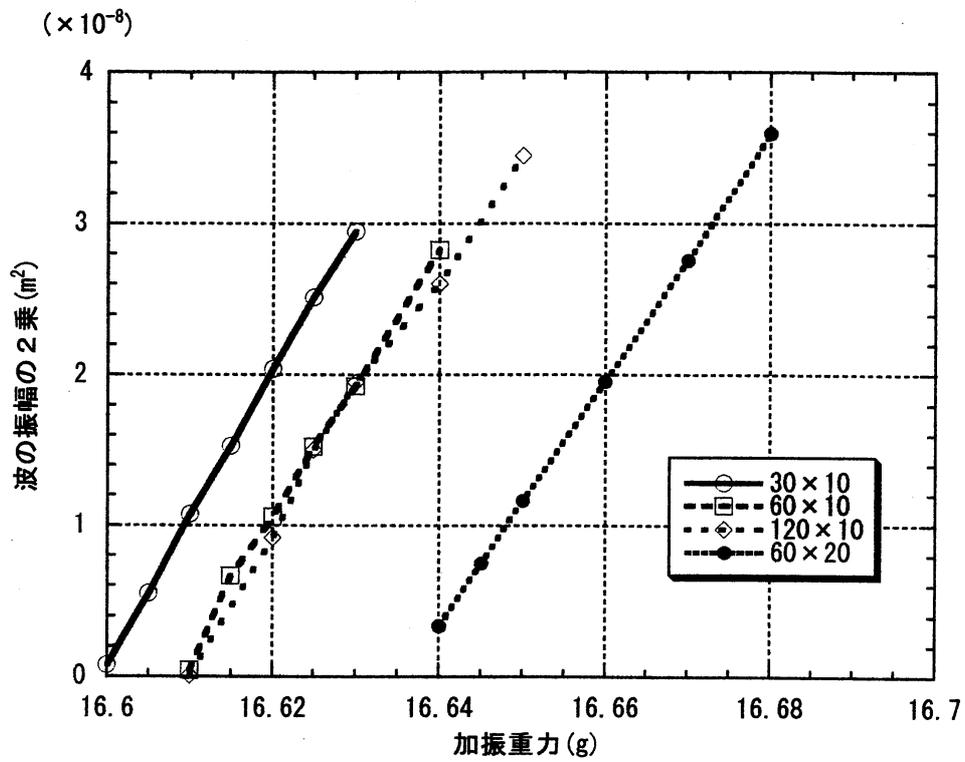


図6 加振重力と波の振幅の2乗の関係

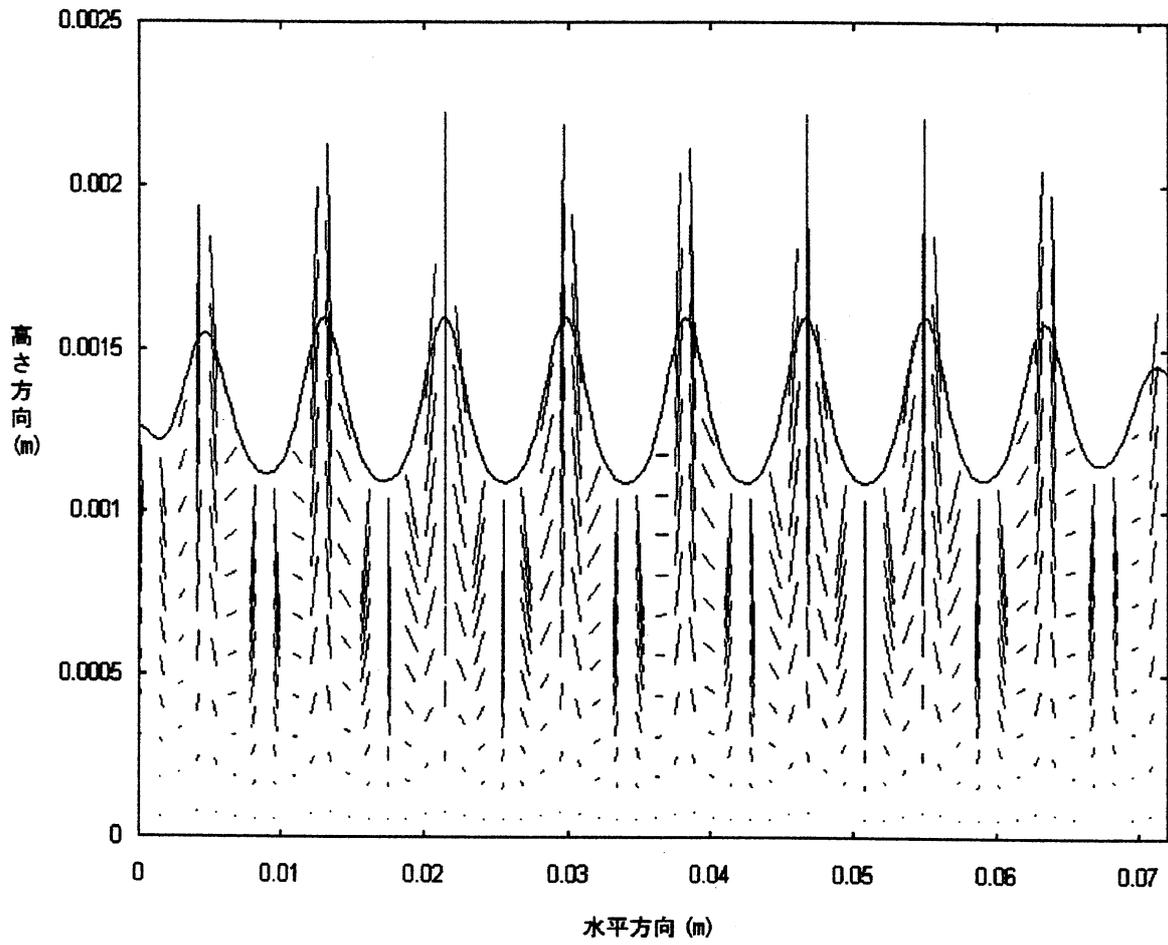


図7 表面波形と速度ベクトル (16.900g)

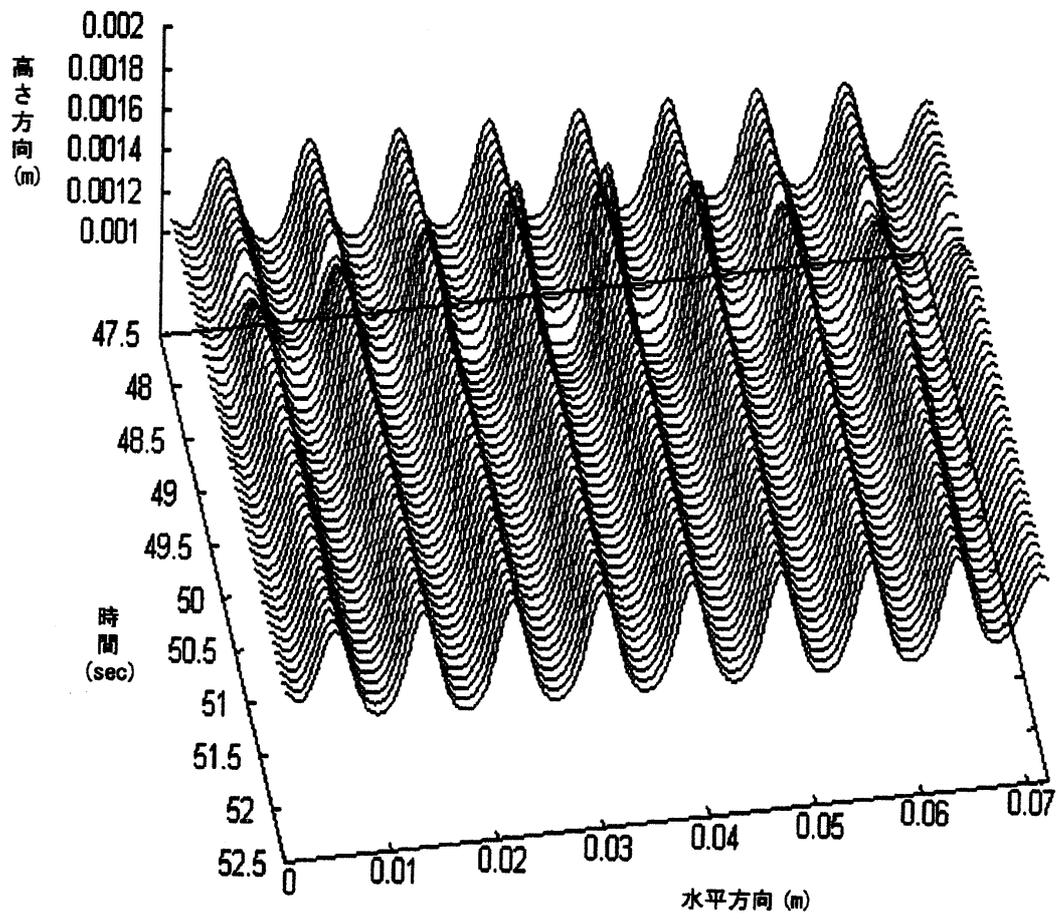


図8 攪乱後の表面波形の時間変化