

# 閉ループ内熱対流の非線形振動

東海大学教養学部 三村和男 ( Kazuo MIMURA )

## 1 はじめに

サーモ・サイホン内の流体の脈動現象に関して、Welander(1967)<sup>1</sup> は、その安定性を調べ、流れの向きの振動現象を数值的に再現した。Creveling et al.(1975)<sup>2</sup> は、より単純化された形状である鉛直設置されたトーラスを使って、内部の流体を下部管壁で熱し上部管壁で冷却したときに発生する熱対流実験を行ない、室内実験的に流れの反転現象を解析した。York and York(1987)<sup>3</sup> は、そのトーラス内の熱対流の反転現象が、Lorenz(1963)<sup>4</sup> が提起したカオス・システムと同様の低次トランケーション・モデルで説明されることを示した。そこでは、流れがループに沿った成分のみを持つという前提がなされていた。

一方、Sano(1991)<sup>5</sup> は、トーラス内の熱対流の実験を行なったが、ループに沿った「主流」が形成されず、4細胞の「局所流」がカオス的に振動することを、室内および数値実験的に示した。また、これとは独立に、三村・須田(1991)<sup>6,7</sup> は「主流」がカオス的に反転することを、室内および数値実験的に示した。

Fig.1 は実験装置の模式図である。実験は可能なかぎり左右の対称性を良くして行なった。ここでは、準定常な速度場は、主流に2細胞の局所流が重なった形状をしていることを報告した。ただし、この2細胞は加熱部および冷却部の上流部に位置する向かい合った2象限に存在する。また、流れがループに沿った方向のみを持つという仮定さえ置けば、温度の接線方向分布には特別の前提条件は不要で、グリッド・モデルのままでも反転現象を良く再現できることを示した。

Fig.2 は、無次元パラメータ  $Np(\equiv \frac{Nu}{Pr})$ ,  $Gr^*$  平面上の安定性マップである。定常主流解の中立曲線 ( $Gr^* = \frac{1+4Np}{1-2Np}$ ) の外側では定常主流解は不安定になることを示している。物性定数ではない熱伝達係数を含む  $Np$  の値が  $\frac{1}{2}$  より小さいという条件さえ満たせば、加熱・冷却部の温度差を適当に大きくすることで、 $Gr$  の値が大きくなり、主流のカオス的反転が見られることになる。

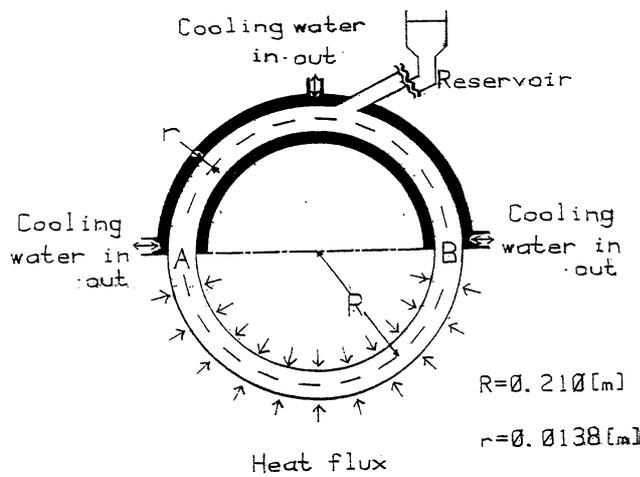


Fig.1 実験装置模式図

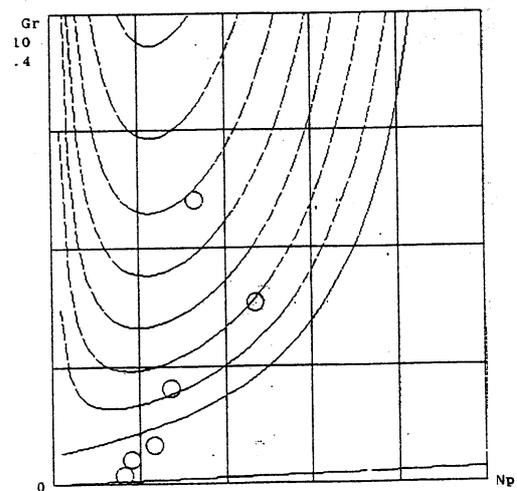


Fig.2  $Np, Gr^*$  平面上の安定性マップ

主流が卓越することが、主流の反転現象の前提条件であり、Sano(1991)との実験結果の不一致は、主流の卓越のためには、実験用トラスのループ半径とチューブ半径の比が重要なパラメータであることを示唆している。その後、我々は、さらに単純化されたループの形状として、断面が長方形となった2重円筒型ループを選択し、様々なアスペクト比を持つ実験用ループを作成し熱対流実験を行なった。ところが、主流の反転現象はまれな過渡的状态をのぞけば、ほとんど見られなくなった。かわりに、ループ内部の左右温度差において様々な不規則振動やかなり滑らかな周期的な振動パターンが見られた。

Fig.3 は3つの変数のみを残した最低次のトランケーション・モデルを使って、 $500 \times 500$  通りに実験パラメータ ( $N_p, Gr$ ) を変化させて、パラメータ空間の各点毎に、初期値をわずかにずらして時間発展を4回実施し、解軌道間の距離を計測することで、カオスの振る舞いを自動判別させたものである。白い部分がカオス的部分を示しており、黒い部分は周期解あるいは定常解を示している。カオス領域の中に周期解の島々が埋めこまれていることがわかる。

Fig.4 は、Fig.3 の中央の小正方形領域内部をさらに  $1000 \times 1000$  とおりに実験パラメータを振らせたものである。周期解領域の分布に自己相似性が認められる。

本研究の目的は、現実の室内実験で主流のカオスの反転が見られる条件を探ることである。そのために、2細胞や4細胞の局所流のように動径方向の流速をも持つモードを含む低次トランケーション・モデルを構成し、数値実験および線形安定性解析を行なった。本稿では、主流のカオスの振る舞いを抑制する作用を表現できる最低次のモデルについて報告する。

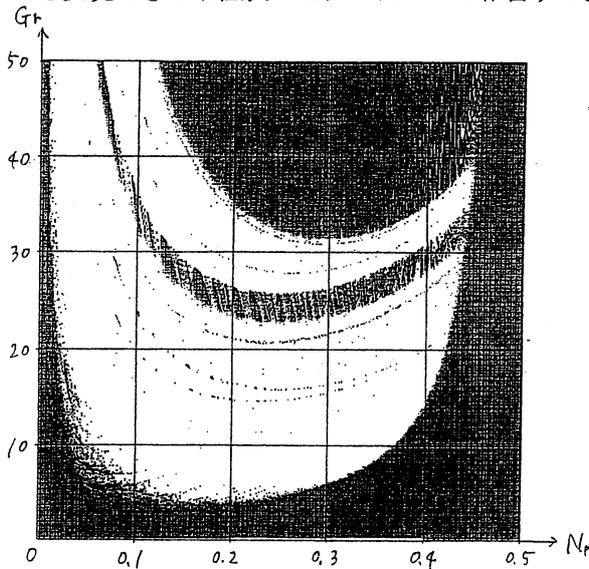


Fig.3  $N_p, Gr^*$  上の解の自動判別マップ (広領域)

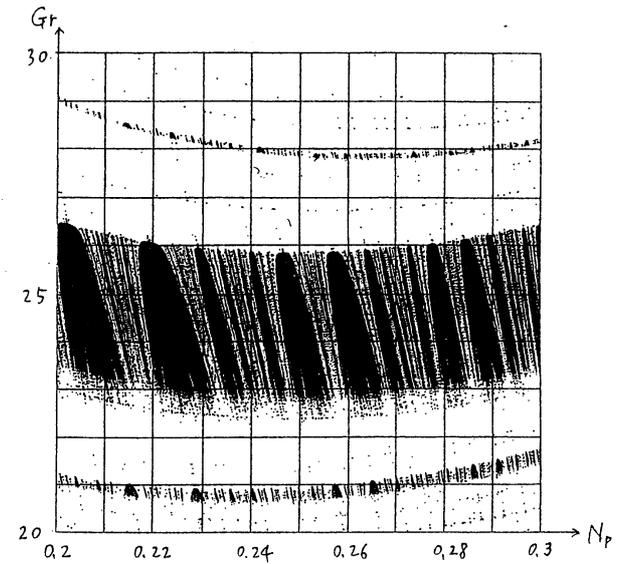


Fig.4  $N_p, Gr^*$  上の解の自動判別マップ (狭領域)

## 2 モデル

鉛直設置された二重円筒状の閉ループ内の粘性流体を下部ループ壁を一定温度で加熱し上部ループ壁を一定温度で冷却する。その時生じる流れが2次元であると仮定してブジネスク近似のもとでの無次元支配方程式系は、 $\psi$ を流線関数、 $\phi$ を温度、 $r, \theta$ を各々半径方向、接線方向の円筒座標とするとき

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -J(\psi, \nabla^2 \psi) + \Gamma^2 \nabla^4 \psi + Gr \Gamma \left( \frac{\partial}{\partial r} \phi \cos \theta - \frac{\partial}{\Gamma \partial \theta} \phi \sin \theta \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = -J(\psi, \phi) + \frac{\Gamma^2}{Pr} \nabla^2 \phi, \quad (2)$$

となる。ただし、

$$Gr \equiv \beta g \delta T R^3 / \nu^2, \quad Pr \equiv C \mu / \lambda, \quad \Gamma \equiv \frac{\pi R}{2a} \quad (3)$$

そして、 $R, a$  は各々ループ半径とチューブ半径、 $C, \beta, \mu, \lambda$  は各々比熱、熱膨張率、粘性係数、熱伝導率である。 $\Gamma \gg 1$  であるとして、支配方程式を局所直交座標に近似すると、次のように、温度と流線関数を各々2重フーリエ級数に展開できる。

$$\phi = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M (C c_{n,m}^{\phi} \cos(mr) \cos(n\theta) + C s_{n,m}^{\phi} \sin(mr) \cos(n\theta) + S c_{n,m}^{\phi} \cos(mr) \sin(n\theta) + S s_{n,m}^{\phi} \sin(mr) \sin(n\theta))$$

$$\psi = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M (C c_{n,m}^{\psi} \cos(mr) \cos(n\theta) + C s_{n,m}^{\psi} \sin(mr) \cos(n\theta) + S c_{n,m}^{\psi} \cos(mr) \sin(n\theta) + S s_{n,m}^{\psi} \sin(mr) \sin(n\theta))$$

このフーリエ級数式を式1,2に代入し、各フーリエ成分の係数に関する連立常微分方程式系を得ることができる。 $N=1, M=2$ の場合、境界条件

$$\phi(r = R \pm \pi/2) = -\sin\theta, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r}(r = R \pm \pi/2) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta}(r = R \pm \pi/2) = 0 \quad (4)$$

を満たす事に注意して、次のような13変数の系が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} X_0 = -\Gamma^2 X_0 + \frac{Gr}{2} \Gamma C c_{1,1}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_0 = -4\Gamma^2 Q_0 - \frac{1}{4} Gr \Gamma C s_{1,2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} X_1 = -4\Gamma^2 X_1 - \frac{Gr\Gamma}{4} (2C s_{0,2} - \frac{1}{\Gamma} (C c_{0,2})), \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_1 = -4\Gamma^2 Q_1, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C c_{0,1} = -\frac{\Gamma^2}{Pr} C c_{0,1}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C c_{0,2} = \frac{1}{\Gamma} (-X_1 S s_{1,2} + Q_1 C s_{1,2}) - \frac{4\Gamma^2}{Pr} C c_{0,2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C s_{0,2} = \frac{1}{\Gamma} (X_1 S c_{1,2} - X_1 + X_1 S s_{1,2} - Q_1 C c_{1,2}) - \frac{4\Gamma^2}{Pr} C s_{0,2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C c_{1,1} = \frac{1}{\Gamma} (X_0 - \frac{3}{2} X_0 S c_{1,2}) - \frac{\Gamma^2}{Pr} C c_{1,1}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C c_{1,2} = \frac{1}{\Gamma} (-\frac{1}{2} X_0 S c_{1,1} + 2Q_1 C s_{0,2}) - \frac{4\Gamma^2}{Pr} C c_{1,2}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C s_{1,2} = \frac{2}{\Gamma} (Q_0 S c_{1,2} - Q_0 - Q_1 C c_{0,2}) - \frac{4\Gamma^2}{Pr} C s_{1,2}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S c_{1,1} = \frac{3}{2\Gamma} X_0 C c_{1,2} - \frac{\Gamma^2}{Pr} S c_{1,1}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S c_{1,2} = \frac{1}{\Gamma} (-2X_1 C s_{0,2} + \frac{1}{2} X_0 \dot{C} c_{1,1}) - \frac{4\Gamma^2}{Pr} S c_{1,2}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S s_{1,2} = \frac{2}{\Gamma} (X_1 C c_{0,2} - Q_0 C c_{1,2}) - \frac{4\Gamma^2}{Pr} S s_{1,2}, \quad (17)$$

ただし、 $X_0 \equiv C s_{0,1}^{\psi}, X_1 \equiv C c_{1,2}^{\psi}, Q_0 \equiv C c_{0,2}^{\psi}, Q_1 \equiv S c_{1,2}^{\psi}$  であり、温度については上付き添え字を省略した。

### 3 定常解の分類

まず、定常解の分類を行なうために、式5から式17の左辺をゼロと置き、定常状態であることを示すために各変数に添え字  $s$  を付ける。式8,9より、 $Q_{1s} = Cc_{0,1s} = 0$  が得られ、これらを使うと、式13,15より、 $Cc_{1,2s} = Sc_{1,1s} = 0$  が得られ、さらにこれらを使うと、式10,17より、 $Cc_{0,2s} = Ss_{1,2s} = 0$  が得られる。式5,6,11より、 $Cc_{1,1s}, Cs_{1,2s} = 0, Cs_{0,2s}$ を消去すると、

$$X_{1s}(Sc_{1,2s} - (1 - \frac{32\Gamma^4}{PrGr})), \quad (18)$$

$$X_{0s}(Sc_{1,2s} - \frac{2}{3}(1 - \frac{2\Gamma^4}{PrGr})), \quad (19)$$

$$Q_{0s}(Sc_{1,2s} - (1 - \frac{32\Gamma^4}{PrGr})), \quad (20)$$

$$(Sc_{1,2s} - 1)X_{1s}^2 - \frac{2\Gamma^4}{PrGr}X_{0s}^2 + \frac{8\Gamma^6}{Pr^2}Sc_{1,2s}, \quad (21)$$

ただし、 $Cc_{1,1s} = \frac{2\Gamma}{Gr}X_{0s}, Cs_{1,2s} = -\frac{16\Gamma}{Gr}Q_{0s}, Cs_{0,2s} = \frac{Pr}{4\Gamma^3}X_{1s}Sc_{1,2s}$  である。式18,19,20が積の形をしているので、定常解を次の一般に次の8つの場合に分類できる。

$$(a) X_{0s} = 0, \quad Q_{0s} = 0, \quad X_{1s} = 0,$$

$$(b) X_{0s} = 0, \quad Q_{0s} = 0, \quad X_{1s} \neq 0,$$

$$(c) X_{0s} = 0, \quad Q_{0s} \neq 0, \quad X_{1s} = 0,$$

$$(d) X_{0s} = 0, \quad Q_{0s} \neq 0, \quad X_{1s} \neq 0,$$

$$(e) X_{0s} \neq 0, \quad Q_{0s} = 0, \quad X_{1s} = 0,$$

$$(f) X_{0s} \neq 0, \quad Q_{0s} = 0, \quad X_{1s} \neq 0,$$

$$(g) X_{0s} \neq 0, \quad Q_{0s} \neq 0, \quad X_{1s} = 0,$$

$$(h) X_{0s} \neq 0, \quad Q_{0s} \neq 0, \quad X_{1s} \neq 0,$$

これらのうち、(a)の場合、すべての係数がゼロという解を持ち、熱伝導解に相当する。また、(e)の場合には

$$\begin{aligned} Cs_{1,2s} &= Cs_{0,2s} = 0, \\ Sc_{1,2s} &= \frac{2\Gamma^4}{3Gr}(\frac{Gr}{\Gamma^4} - \frac{2}{Pr}), \\ X_{0s}^2 &= \frac{8\Gamma^6}{3Pr}(\frac{Gr}{\Gamma^4} - \frac{2}{Pr}), \\ Cc_{1,1s} &= \frac{2\Gamma}{Gr}X_{0s}, \end{aligned} \quad (22)$$

という解を持ち、ここでは主流解と名付けておく。(b)の場合の解は(d)の場合に含まれ、

$$\begin{aligned} Cc_{1,1s} = 0, Cs_{1,2s} &= -\frac{16\Gamma}{Gr}Q_{0s}, \\ Sc_{1,2s} &= 1 - \frac{32\Gamma^4}{PrGr}, \\ X_{1s}^2 &= \frac{\Gamma^2 Gr}{4Pr}Sc_{1,2s}, \\ Cs_{0,2s} &= -\frac{8\Gamma}{Gr}X_{1s}, \end{aligned} \quad (23)$$

という解を持ち、ここでは対称解と名付けておく。その他の場合はすべて解が存在しない。

## 4 数値実験

Fig.5a は、 $\Gamma = 10, Pr = 1/10, Gr = 60000$  という条件下で上記 13 変数の低次ランケーション・モデルを無次元時間  $t = 4$  まで時間発展させた結果の一例である。左上の図は、定常主流解を初期値とした場合のものである。ただし、他のすべての変数には初期擾乱として、この初期値の  $1/10$  程度の値を代入してある。右上の図は、定常主流解の  $1.5$  倍の値を初期値とした場合のものであり、下段の左から、各々、主流のみ、水平温度差のみ、鉛直温度差のみを、定常主流解の  $1.5$  倍にしたものである。いずれも、他の変数には左上図と同様の初期擾乱値を代入した。初期値によって、初期の過渡期の振る舞いは異なるが、いずれも最終的には、定常主流解に落ち着いていることがわかる。

Fig.5b は、Fig.5.a の右上図の時間積分における、主要変数 ( $X_0, C_{c1,1}, S_{c1,2}, X_1, Q_0$ ) の時間変動を示したものである。主流解成分が定常解に収束するにともなって、対称解成分は初期の微増期以外はほぼゼロで安定していることがわかる。

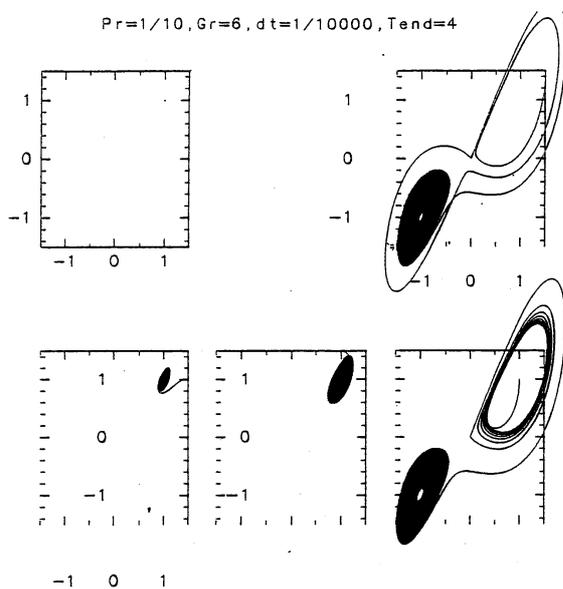


Fig.5a  $X_0, C_{c1,1}$  平面上の解軌道 ( $Gr=60000$ )

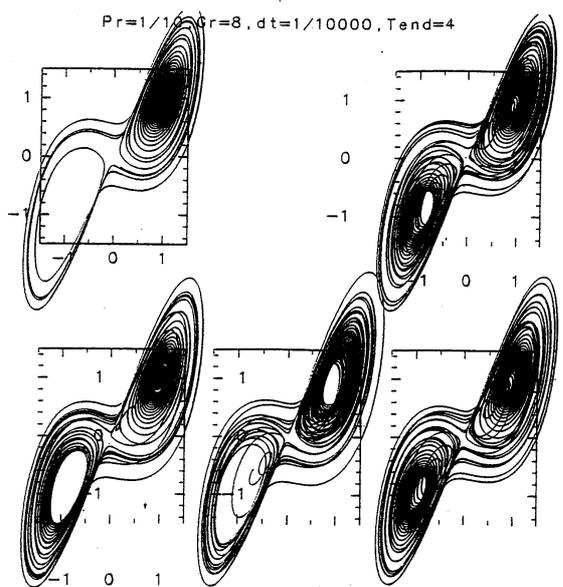


Fig.6a  $X_0, C_{c1,1}$  平面上の解軌道 ( $Gr=80000$ )

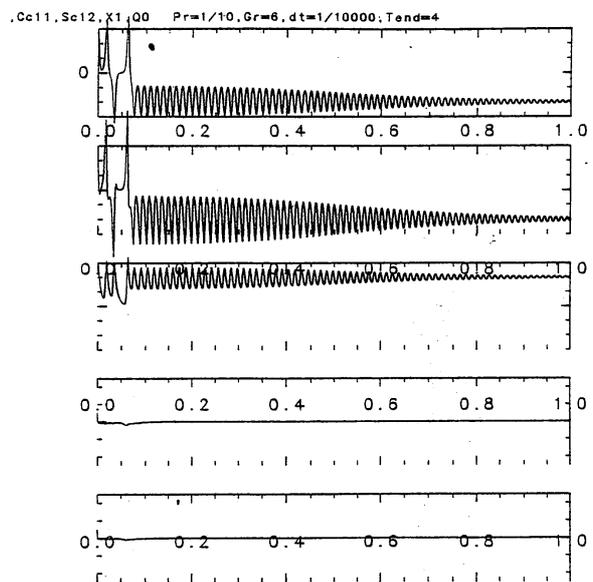


Fig.5b 同  $X_0, C_{c1,1}, S_{c1,2}, X_1, Q_0$  の時系列

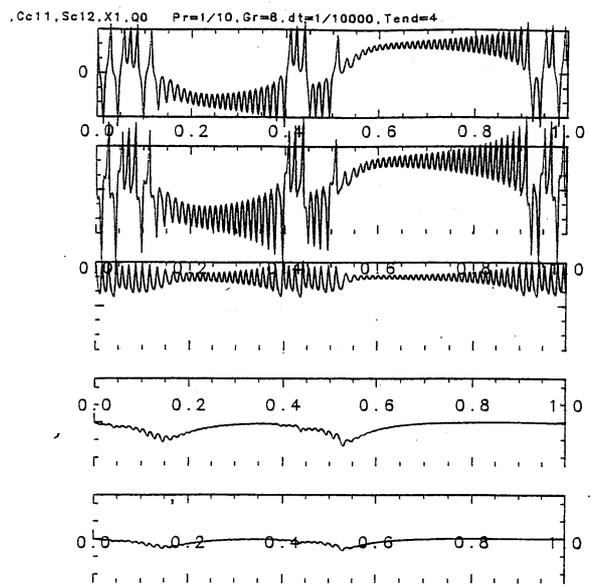


Fig.6b 同  $X_0, C_{c1,1}, S_{c1,2}, X_1, Q_0$  の時系列

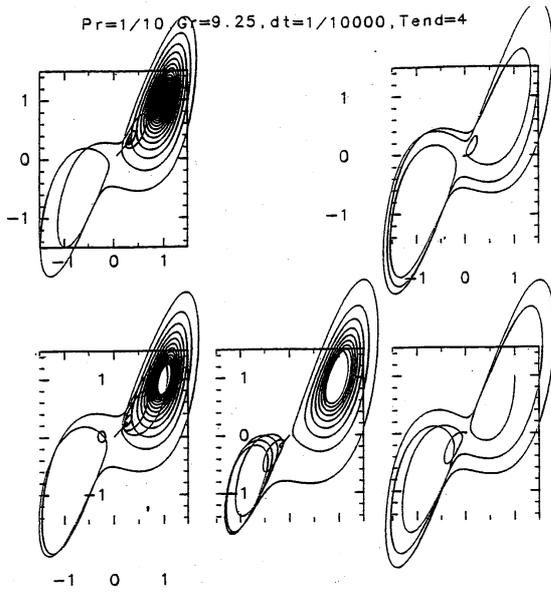


Fig.7a  $X_0, CC_{1,1}$  平面上的解軌道 ( $Gr=93000$ )

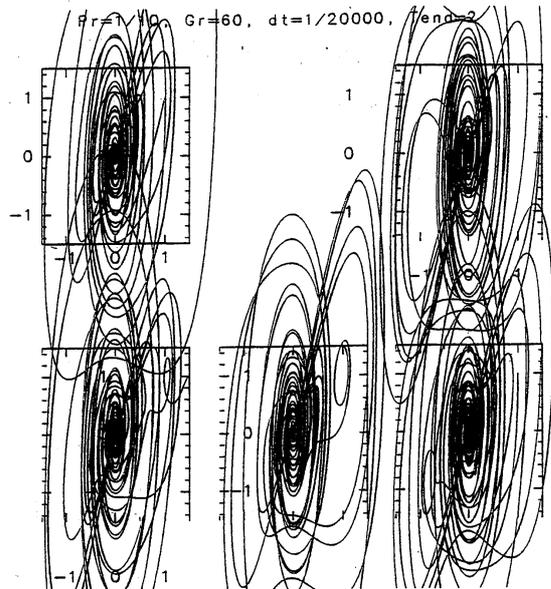


Fig.8a  $X_0, CC_{1,1}$  平面上的解軌道 ( $Gr=600000$ )

Fig.6a,b は、 $Gr = 80000$  に変えた以外は Fig.5 と同じである。初期条件によらず、主流と水平温度差がカオスの反転を繰り返しているのがわかる。また、対称解成分が一次的に増大する時期があることもわかる。

Fig.7a,b は、 $Gr = 93000$  に変えた以外は Fig.5 と同じである。初期には、Fig.6 と同様に、主流と水平温度差がカオス的に数回、反転を繰り返すが、やがて、主流解はゼロに収束し、そのかわりに対称解の成分  $X_1, Q_0$  がある一定値に収束しているのがわかる。

Fig.8a,b は、 $Gr = 600000$  に変え、時間刻みを半分にした分、計算終了時間も半分にした以外は Fig.5 と同じである。今度は、対称解成分が、カオス的に反転を繰り返し、主流成分が、一次的に、不規則なパルスのように脈動している。

すなわち、この数値実験では、 $Gr$  の値を次第に大きくしていくにつれて、卓越する速場のパターンが、定常主流から、カオスの主流へ、そして、定常対称流、さらに、カオスの対称流へと、遷移していくことがわかった。以下の節では、この遷移パターンが、定常解の線形安定性解析で説明できるか調査する。

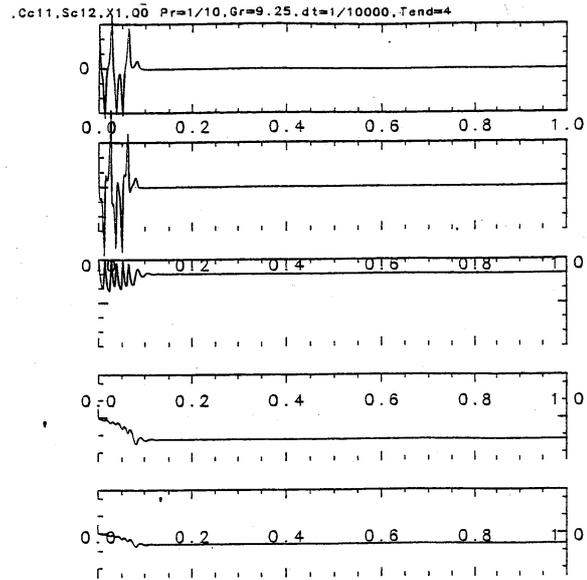


Fig.7b 同  $X_0, CC_{1,1}, Sc_{1,2}, X_1, Q_0$  の時系列

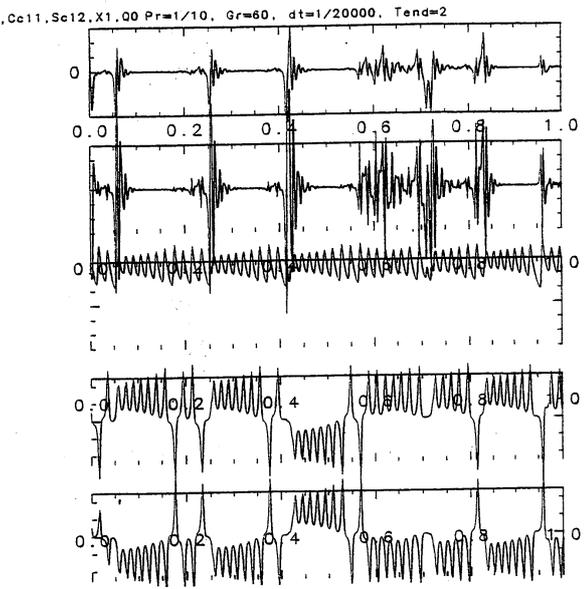


Fig.8b 同  $X_0, CC_{1,1}, Sc_{1,2}, X_1, Q_0$  の時系列

## 5 定常解の安定性

### 5.1 一般論

定常解の安定性を調査するために、まず常に減衰するモードを探しておく。式 8,9 より、 $Q_1, C_{c_{0,1}}$  は常に指数関数的に減衰する事がわかる。従って、これらの変数をゼロと置いて、その他の変数をすべて定常解と微小擾乱の和として表現し、擾乱の 1 次の方程式をつくる。擾乱は各変数にプライムを付けて表現し、それらはすべて複素角振動数  $-i\omega$  の指数関数に比例すると仮定すると以下の方程式が得られる。ただし、各変数毎に  $\omega$  が共通とは限らないので添え字を付けて区別した。即ち

$$(i\omega_1 - \Gamma^2)X'_0 = -\frac{Gr\Gamma}{2}Cc'_{1,1}, \quad (24)$$

$$(i\omega_2 - 4\Gamma^2)Q'_0 = \frac{Gr\Gamma}{4}Cs'_{1,2}, \quad (25)$$

$$(i\omega_3 - 4\Gamma^2)X'_1 = \frac{Gr\Gamma}{4}(2Cs'_{0,2} - \frac{1}{\Gamma}Cc'_{0,2}), \quad (26)$$

$$(i\omega_6 - \frac{4\Gamma^2}{Pr})Cc'_{0,2} = \frac{1}{\Gamma}X_{1s}Ss'_{1,2}, \quad (27)$$

$$(i\omega_7 - \frac{4\Gamma^2}{Pr})Cs'_{0,2} = -\frac{1}{\Gamma}(X_{1s}Sc'_{1,2} + Sc_{1,2s}X'_1 - X'_1 + X_{1s}Ss'_{1,2}), \quad (28)$$

$$(i\omega_8 - \frac{\Gamma^2}{Pr})Cc'_{1,1} = -\frac{1}{\Gamma}(X'_0 - \frac{3}{2}X_{0s}Sc'_{1,2} - \frac{3}{2}Sc_{1,2s}X'_0), \quad (29)$$

$$(i\omega_9 - \frac{4\Gamma^2}{Pr})Cc'_{1,2} = +\frac{1}{2\Gamma}X_{0s}Sc'_{1,1}, \quad (30)$$

$$(i\omega_{10} - \frac{4\Gamma^2}{Pr})Cs'_{1,2} = -\frac{2}{\Gamma}(Q_{0s}Sc'_{1,2} + Sc_{1,2s}Q'_0 - Q'_0), \quad (31)$$

$$(i\omega_{11} - \frac{\Gamma^2}{Pr})Sc'_{1,1} = \frac{3}{2\Gamma}X_{0s}Cc'_{1,2}, \quad (32)$$

$$(i\omega_{12} - \frac{4\Gamma^2}{Pr})Sc'_{1,2} = -\frac{1}{2\Gamma}(-4X_{1s}Cs'_{0,2} - 4Cs_{0,2s}X'_1 + X_{0s}Cc'_{1,1} + Cc_{1,1s}X'_0), \quad (33)$$

$$(i\omega_{13} - \frac{4\Gamma^2}{Pr})Ss'_{1,2} = -\frac{2}{\Gamma}(X_{1s}Cc'_{0,2} - Q_{0s}Cc'_{1,2}), \quad (34)$$

となる。ただし、 $Cc_{1,2s} = Sc_{1,1s} = Cc_{0,2s} = Ss_{1,2s} = 0$  を使っている。

$\omega_9 = \omega_{11}$  の時、式 30,32 より、

$$(i\omega_9 - \frac{\Gamma^2}{Pr})(i\omega_9 - \frac{4\Gamma^2}{Pr}) = -\frac{3X_0^2}{4\Gamma^2}. \quad (35)$$

従って、解は

$$\omega_9 = \frac{5i\Gamma^2}{2Pr}(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25} - \frac{3Pr^2X_0^2}{25\Gamma^6}}). \quad (36)$$

すなわち、 $\omega_9$  は正の虚数部を取りえないので、 $Cc'_{1,2}, Sc'_{1,1}$  は減衰モードのみを持つことがわかる。従って、以下の安定性解析においては  $Cc'_{1,2} = Sc'_{1,1} = 0$  とする。その結果、 $\omega_6 = \omega_{13}$  として、式 27,34 より、

$$(i\omega_6 - \frac{4\Gamma^2}{Pr})(i\omega_6 - \frac{4\Gamma^2}{Pr}) = -\frac{2X_1^2}{\Gamma^2}. \quad (37)$$

従って、解は

$$\omega_6 = -\frac{2i\Gamma^2}{Pr} \pm \sqrt{\frac{2X_1^2}{\Gamma^2}}. \quad (38)$$

すなわち、 $\omega_6$  もまた正の虚数部を取りえないので、以下の安定性解析においては  $Cc'_{0,2} = Ss'_{1,2} = 0$  とする。結局、 $Cc_{1,2s} = Sc_{1,1s} = Cc_{0,2s} = Ss_{1,2s} = 0$  を思い出すと、定常解の線形安定性を調べるに当たっては、 $Q_1, Cc_{0,1}$  と同様に常に  $Cc_{1,2} = Sc_{1,1} = Cc_{0,2} = Ss_{1,2} = 0$  と考えて差しつかえない。即ち、以下の7変数の擾乱方程式を検討の対象にすれば良いことがわかった。

$$(i\omega_1 - \Gamma^2)X'_0 = -\frac{Gr\Gamma}{2}Cc'_{1,1}, \quad (39)$$

$$(i\omega_2 - 4\Gamma^2)Q'_0 = \frac{Gr\Gamma}{4}Cs'_{1,2}, \quad (40)$$

$$(i\omega_3 - 4\Gamma^2)X'_1 = \frac{Gr\Gamma}{4}2Cs'_{0,2}, \quad (41)$$

$$(i\omega_7 - \frac{4\Gamma^2}{Pr})Cs'_{0,2} = -\frac{1}{\Gamma}(X_{1s}Sc'_{1,2} + Sc_{1,2s}X'_1 - X'_1), \quad (42)$$

$$(i\omega_8 - \frac{\Gamma^2}{Pr})Cc'_{1,1} = -\frac{1}{\Gamma}(X'_0 - \frac{3}{2}X_{0s}Sc'_{1,2} - \frac{3}{2}Sc_{1,2s}X'_0), \quad (43)$$

$$(i\omega_{10} - \frac{4\Gamma^2}{Pr})Cs'_{1,2} = -\frac{2}{\Gamma}(Q_{0s}Sc'_{1,2} + Sc_{1,2s}Q'_0 - Q'_0), \quad (44)$$

$$(i\omega_{12} - \frac{4\Gamma^2}{Pr})Sc'_{1,2} = -\frac{1}{2\Gamma}(-4X_{1s}Cs'_{0,2} - 4Cs_{0,2s}X'_1 + X_{0s}Cc'_{1,1} + Cc_{1,1s}X'_0). \quad (45)$$

## 5.2 熱伝導解の安定性

式 42 から 45 において、 $X_{0s} = Q_{0s} = X_{1s} = Cs_{0,2s} = Cc_{1,1s} = Sc_{1,2} = 0$  と置くと、

$$(i\omega_7 - \frac{4\Gamma^2}{Pr})Cs'_{0,2} = \frac{1}{\Gamma}X'_1, \quad (46)$$

$$(i\omega_8 - \frac{\Gamma^2}{Pr})Cc'_{1,1} = -\frac{1}{\Gamma}X'_0, \quad (47)$$

$$(i\omega_{10} - \frac{4\Gamma^2}{Pr})Cs'_{1,2} = \frac{2}{\Gamma}Q'_0, \quad (48)$$

$$(i\omega_{12} - \frac{4\Gamma^2}{Pr})Sc'_{1,2} = 0, \quad (49)$$

となる。 $\omega_1 = \omega_8$  の時、式 39, 47 の固有方程式は、

$$(i\omega_1 - \frac{\Gamma^2}{Pr})(i\omega_1 - \Gamma^2) = \frac{Gr}{2}. \quad (50)$$

従って、

$$\frac{Gr}{\Gamma^4} > \frac{2}{Pr} \quad (51)$$

のとき、解

$$\omega_1 = \frac{i\Gamma^2(1 + \frac{1}{Pr})}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2(\frac{Gr}{\Gamma^4} - \frac{2}{Pr})}{(1 + \frac{1}{Pr})^2}}) \quad (52)$$

は正の虚数部を持ち、主流モード  $X'_0, Cc'_{1,1}$  が成長することがわかる。また、 $\omega_2 = \omega_{10} = \omega$  あるいは  $\omega_3 = \omega_7 = \omega$  の時、式 40, 48 あるいは式 41, 46 の固有方程式は、

$$(i\omega - \frac{4\Gamma^2}{Pr})(i\omega - 4\Gamma^2) = \frac{Gr}{2}. \quad (53)$$

従って、

$$\frac{Gr}{\Gamma^4} > \frac{32}{Pr} \quad (54)$$

のとき、解

$$\omega = 2i\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{Pr}\right)\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{\frac{Gr}{\Gamma^4} - \frac{32}{Pr}}{8\left(1 + \frac{1}{Pr}\right)^2}}\right) \quad (55)$$

は正の虚数部を持ち、対称モード  $Q'_0, Cs'_{1,2}, X'_1, Cs'_{0,2}$  が成長することがわかる。

### 5.3 主流解の安定性

式 42 から 45 において、 $Q_{0s} = Cs_{1,2s} = X_{1s} = Cs_{0,2s} = 0$  と置くと、

$$\left(i\omega_7 - \frac{4\Gamma^2}{Pr}\right)Cs'_{0,2} = -\frac{1}{\Gamma}(Sc_{1,2s} - 1)X'_1, \quad (56)$$

$$\left(i\omega_8 - \frac{\Gamma^2}{Pr}\right)Cc'_{1,1} = -\frac{1}{\Gamma}\left(X'_0 - \frac{3}{2}X_{0s}Sc'_{1,2} - \frac{3}{2}Sc_{1,2s}X'_0\right), \quad (57)$$

$$\left(i\omega_{10} - \frac{4\Gamma^2}{Pr}\right)Cs'_{1,2} = -\frac{2}{\Gamma}(Sc_{1,2s} - 1)Q'_0, \quad (58)$$

$$\left(i\omega_{12} - \frac{4\Gamma^2}{Pr}\right)Sc'_{1,2} = -\frac{1}{2\Gamma}(X_{0s}Cc'_{1,1} + Cc_{1,1s}X'_0), \quad (59)$$

となる。 $\omega_1 = \omega_8 = \omega_{12}$  の時、式 39, 57, 59 の固有方程式は、

$$i\omega^3 - \left(1 + \frac{5}{Pr}\right)\Gamma^2\omega^2 - 2i\left(\frac{Gr}{Pr} + \frac{2\Gamma^4}{Pr}\right)\omega + \frac{4\Gamma^2 Gr}{Pr} - \frac{8\Gamma^6}{Pr^2} \quad (60)$$

であり、その中立曲線の式は

$$\frac{Gr}{\Gamma^4} = \frac{2\left(1 + \frac{7}{Pr}\right)}{1 - \frac{5}{Pr}} \quad (61)$$

で与えられ、この中立曲線の外側で主流解は不安定化することがわかる。また、 $\omega_2 = \omega_{10} = \omega$  あるいは  $\omega_3 = \omega_7 = \omega$  の時、式 40, 58 あるいは式 41, 56 の固有方程式は、

$$\left(i\omega - \frac{4\Gamma^2}{Pr}\right)\left(i\omega_1 - 4\Gamma^2\right) = \frac{\Gamma^4}{6}\left(\frac{Gr}{\Gamma^4} + \frac{4}{Pr}\right). \quad (62)$$

従って、

$$\frac{Gr}{\Gamma^4} > \frac{92}{Pr} \quad (63)$$

のとき、解

$$\omega = 2i\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{Pr}\right)\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{\frac{Gr}{\Gamma^4} - \frac{92}{Pr}}{24\left(1 + \frac{1}{Pr}\right)^2}}\right) \quad (64)$$

は正の虚数部を持ち、対称モード  $Q'_0, Cs'_{1,2}, X'_1, Cs'_{0,2}$  が成長することがわかる。

### 5.4 対称流解の安定性

式 42 から 45 において、 $X_{0s} = Cc_{1,1s} = 0$  と置くと、

$$\left(i\omega_7 - \frac{4\Gamma^2}{Pr}\right)Cs'_{0,2} = -\frac{1}{\Gamma}\left(X_{1s}Sc'_{1,2} + Sc_{1,2s}X'_1 - X'_1\right), \quad (65)$$

$$\left(i\omega_8 - \frac{\Gamma^2}{Pr}\right)Cc'_{1,1} = -\frac{1}{\Gamma}\left(X'_0 - \frac{3}{2}Sc_{1,2s}X'_0\right), \quad (66)$$

$$\left(i\omega_{10} - \frac{4\Gamma^2}{Pr}\right)Cs'_{1,2} = -\frac{2}{\Gamma}\left(Q_{0s}Sc'_{1,2} + Sc_{1,2s}Q'_0 - Q'_0\right), \quad (67)$$

$$(i\omega_{12} - \frac{4\Gamma^2}{Pr})Sc'_{1,2} = -\frac{1}{\Gamma}(-2X_{1s}Cs'_{0,2} - 2Cs_{0,2s}X'_1), \quad (68)$$

となる。 $\omega_1 = \omega_8$  の時、式 39,66 の固有方程式は、

$$(i\omega_1 - \frac{\Gamma^2}{Pr})(i\omega_1 - \Gamma^2) = -\frac{\Gamma^4}{4}(\frac{Gr}{\Gamma^4} - \frac{96}{Pr}). \quad (69)$$

従って、

$$\frac{Gr}{\Gamma^4} < \frac{96}{Pr} \quad (70)$$

のとき、解

$$\omega_1 = \frac{i\Gamma^2(1 + \frac{1}{Pr})}{2}(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{\Gamma^2(\frac{Gr}{\Gamma^4} - \frac{96}{Pr})}{(1 + \frac{1}{Pr})^2}}) \quad (71)$$

は正の虚数部を持ち、主流モード  $X'_0, Cc'_{1,1}$  が成長することがわかる。また、 $\omega_3 = \omega_7 = \omega_{12}$  の時、式 41,65,68 の固有方程式は、

$$i\omega^3 + 4(1 + \frac{2}{Pr})\Gamma^2\omega^2 + i\frac{\Gamma^4}{3Pr}(48 + \frac{Gr}{\Gamma^4} + \frac{46}{Pr})\omega - \frac{8\Gamma^6}{3Pr}(\frac{Gr}{\Gamma^4} - \frac{2}{Pr}) \quad (72)$$

であり、その中立曲線の式は

$$\frac{Gr}{\Gamma^4} = \frac{32(1 + \frac{4}{Pr})}{1 - \frac{2}{Pr}} \quad (73)$$

で与えられ、この中立曲線の外側で対称解は不安定化することがわかる。また、この対称解が安定な条件化では  $Sc'_{1,2}$  がゼロに漸近するので、式 67 で  $Sc'_{1,2} = 0$  とおける。従って、その時  $\omega_2 = \omega_{10}$  とすると、式 40,67 の固有方程式は、

$$(i\omega_1 - \frac{4\Gamma^2}{Pr})(i\omega_1 - 4\Gamma^2) = \frac{16\Gamma^4}{Pr}. \quad (74)$$

従って、この解は正の虚数部を持ち得ないので、 $Q_{0s}, Cs_{1,2s}$  は安定であることがわかる。ただし、

$$Cs_{1,2s} = -\frac{16\Gamma}{Gr}Q_{0s} \quad (75)$$

を満たすかぎり任意性が残っている。

## 5.5 定常解の安定性のまとめ

Fig.9a,b,c は、各々、式 51,54,61,63,70,73 より、定常熱伝導解、定常主流解、定常対称流解の安定性を図示したものである。これらの結果を総合すると、以下の解釈ができる。

$$\frac{39 - \sqrt{601}}{460} \leq \frac{1}{Pr} \leq \frac{39 + \sqrt{601}}{460} \quad (76)$$

のもとでは、

$$0 < \frac{Gr}{\Gamma^4} < \frac{2}{Pr} \quad (77)$$

のとき、定常熱伝導解が安定であり、

$$\frac{2}{Pr} \leq \frac{Gr}{\Gamma^4} < \frac{2(1 + \frac{7}{Pr})}{1 - \frac{5}{Pr}} \quad (78)$$

の時、定常主流解が安定であり、特に、 $\frac{Gr}{\Gamma^4} \geq \frac{32}{Pr}$  の時には、対称解も可能ではあるがそれが不安定なため、最終的には定常主流解に落ち着く。

次に、

$$\frac{2(1 + \frac{7}{Pr})}{1 - \frac{5}{Pr}} \leq \frac{Gr}{\Gamma^4} < \frac{92}{Pr} \quad (79)$$

のときには、定常主流解も定常対称流解も、いずれも不安定なため、どこにも落ち着けず、カオス的な振る舞いの可能性がある。

また、

$$\frac{92}{Pr} \leq \frac{Gr}{\Gamma^4} < \frac{32(1 + \frac{4}{Pr})}{1 - \frac{2}{Pr}} \tag{80}$$

のとき、定常主流解は不安定であるが、定常対称流解が安定であるので、最終的には対称解に落ち着く。さらに、

$$\frac{32(1 + \frac{4}{Pr})}{1 - \frac{2}{Pr}} \leq \frac{Gr}{\Gamma^4} \tag{81}$$

のとき、再び、定常主流解も定常対称流解も、いずれも不安定なため、どこにも落ち着けず、カオス的な振る舞いの可能性がある。

最後に、 $\frac{1}{Pr} < \frac{39 - \sqrt{601}}{460}$  や  $\frac{1}{Pr} > \frac{39 + \sqrt{601}}{460}$  のときには、定常主流解と定常対称流解の両方が安定な領域があることも付け加えておこう。

以上のように、数値実験で得られた、熱対流の4種類の振る舞いはすべて、定常解の線形安定性解析の結果と矛盾しないものであることがわかった。

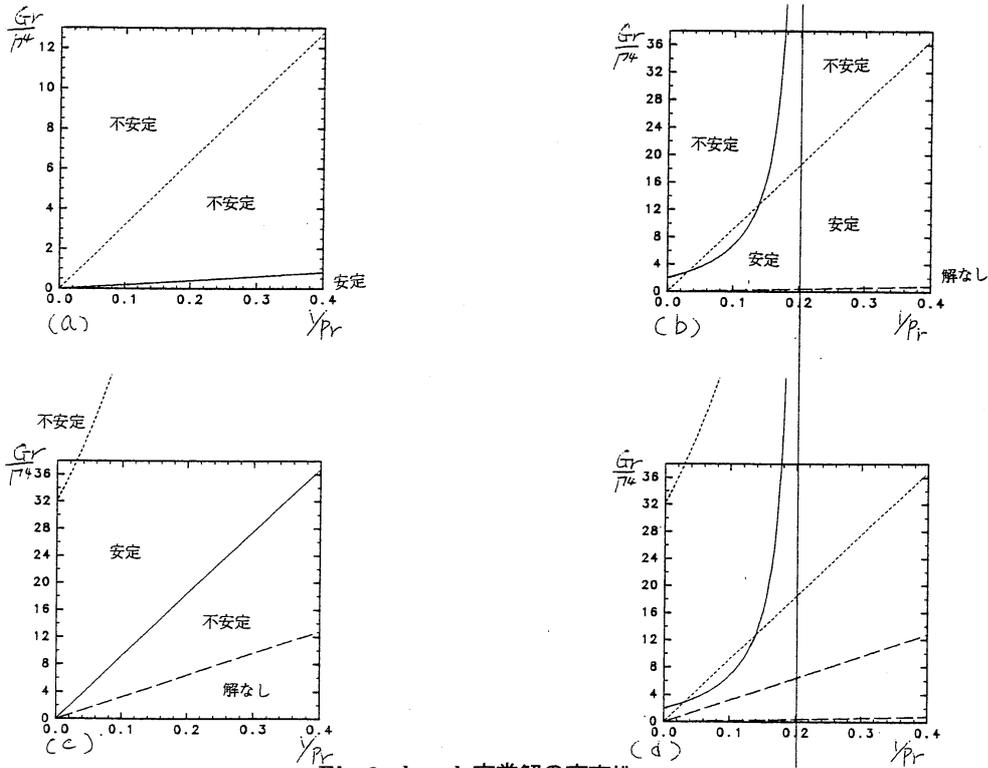


Fig.9a,b,c,d 定常解の安定性

(a,b,c は各々熱伝導解、主流解、対称流解の安定性を示し、d はそれらを重ねたものである。)

この13変数の常微分方程式系に、初期値として、 $X_1 = Q_0 = C_{c0,2} = C_{s0,2} = C_{s1,2} = 0$  を与えると、これらの変数はその後もゼロであり続けることが証明できるので、残った8変数で、流れとしては主流しか存在しないサブシステムが構成できる。

Fig.10a,b は、このサブ・システムを時間発展させた結果である。主流解サブシステムである点をのぞけば、実験パラメータは Fig.6a,b の場合と全く同じである。Fig.6a,b と同様に、主流の向きがカオス的反転を繰り返しているが、対称流成分の脈動が禁じられているために、主流サブシステムの中だけで、熱と運動量のやりくりをせざるを得ず、そのことが、フル・システムに比べて頻繁な主流的反転を引き起こしているものと考えられる。

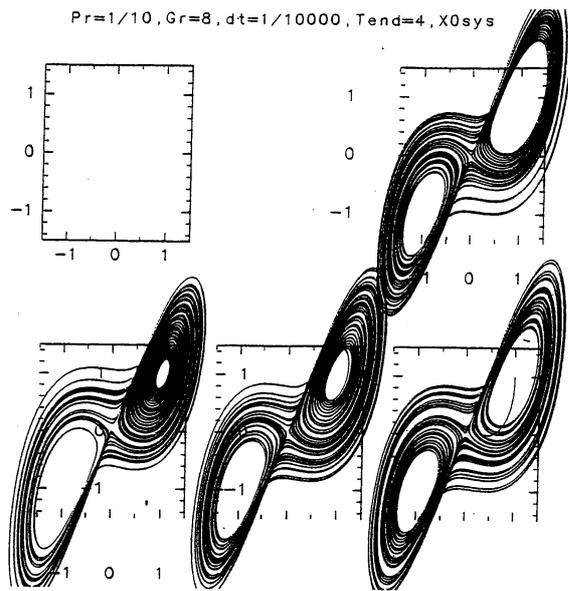
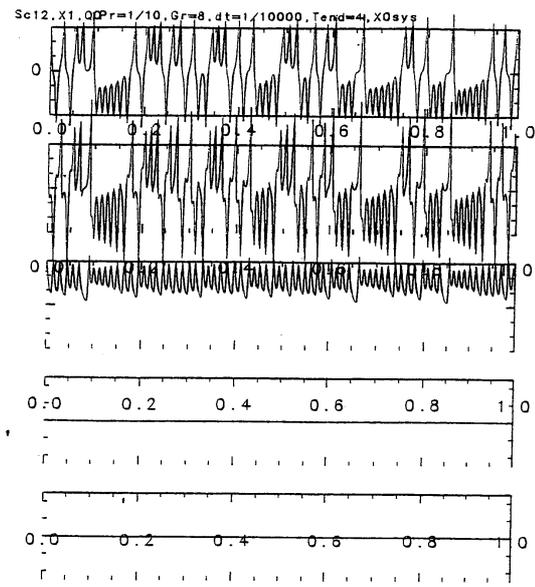
Fig.10a 主流サブ・システムの解軌道 ( $Gr=80000$ )

Fig.10b 同主流サブ・システムにおける時系列

## 6 最後に

鉛直設置された閉ループ内の熱対流において、ループ半径方向の流れを許したうえで、ループ接線方向の最大波数  $N$  が 1、半径方向の最大波数  $M$  が 2 という、極めて低次の、トランケーション・モデルにおいて、主流の反転が見られるための条件が明らかになった。それは、流体の物性値としてのプラントル数  $Pr$  が適切な範囲内であるだけでなく、加熱部冷却部の温度差もまた、極めて限られた領域内ではなければならないことがわかった。この温度差が大きすぎても、かえって、対称流解の安定性を招き、主流が反転しないのである。

今回解析したモデルは、ループ接線方向の波数  $n=2$  に対応する 4 細胞局所流を含まないものであったが、現実の室内実験において、主流のカオス的的反転を実現するための条件について重大なヒントが得られた。今後は、4 細胞局所流を含む系で定常流の安定性解析を行ない、自然現象を単純化した理論的モデルの中で起こる複雑な振る舞いと、現実の自然界で起こる複雑な現象との関係について考察したい。

## 7 参考文献

- (1) P.Welander: 1967, On the Oscillatory instability of a differentially heated fluid loop, *J. Fluid Mech.*, 29, 17-30.
- (2) H.F. Creveling, J.F. dePaz, J.Y.Baladi, and R.J. Schoenhals: 1975, Stability characteristics of a single-phase free convection loop, *J. Fluid Mech.*, 67, 65-84.
- (3) J.A. Yorke, E.D. Yorke and J. Mallet-Paret: 1987, Lorenz-like chaos in a partial differential equation for a heated fluid loop, *Physica, North-Holland*, 24D, 279-291.
- (4) E.N. Lorenz: 1963, Deterministic Nonperiodic Flow, *J. Atmos. Sci.*, 20, 130-141.
- (5) O. Sano: 1991, Cellular structure in a natural convection loop and its chaotic behaviour, I. experiment, II. Theory, *Fluid Dynamics Research*, 8, 189-204, 205-220.
- (6) 三村和男 須田不二夫: 1991, 円環内自然対流の非線形振動, 数理解析研究所講究録, 740, 196-207
- (7) 三村和男 須田不二夫: 1993, 円環内自然対流の非線形振動, 数理解析研究所講究録, 830, 137-145