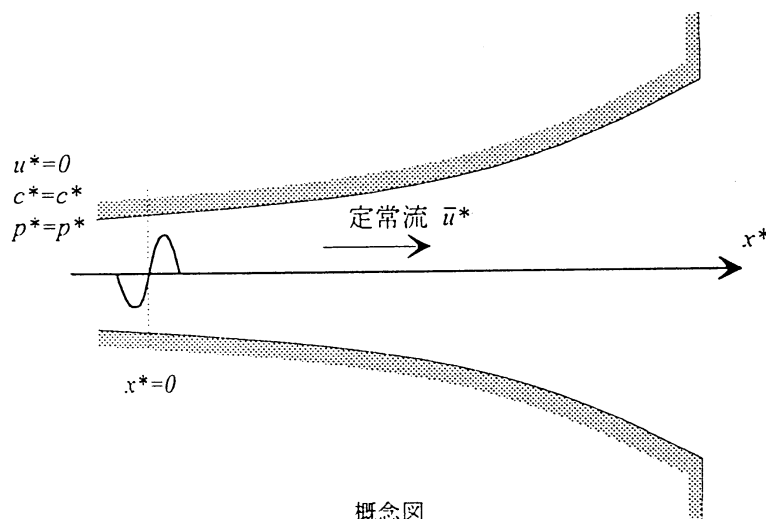


# 管内流中における鋸歯状波の伝播

北大工 井上 良紀 (Yoshinori Inoue)  
北大工 片岡 晃一 (Kouichi Kataoka)  
北大工 宮本 晃宏 (Akihiro Miyamoto)

非線形音響学において、一様な媒質中での弱非線形平面波の伝播が、Burgers 方程式に基づいて詳細に研究されていることはよく知られている。本研究は、非一様な媒質中を伝播する弱い非線形平面波の振る舞いを解明することを目的とする。非一様な媒質中では、一般に波は極めて複雑な挙動をする。その研究の一環として、ゆっくりと断面積が変化する管のなかの定常流中を伝播する弱非線形進行波を記述する一般化された Burgers 方程式を、多重尺度法を用いて導出し、その結果を前回の研究会で報告した。

この研究では、上述の非線形発展方程式を用いて、管内流中におかれた音源から定常的に放射される正弦波が伝播にともないどのような非線形発展をするかを解析した。ここでは、取り扱いが簡単で興味ある結果が得られる音響 Reynolds 数  $Re$  が非常に大きい極限の場合に解析を限定する。このような場合には、一様媒質中では正弦波は衝撃波が等間隔に並ぶ鋸歯状波へと必ず発展し、遠方の場では散逸効果（と非線形効果）によって、衝撃波は伝播距離に反比例してその振幅を減衰させる。さらに断面積が単調に増加する（あるいは減少する）管の形状が単純な指数型のホーンを研究対象とする。以上の条件下では厳密な解析ができて、衝撃波が形成可能な条件、鋸歯状型の波への発展等を計算できる。ただし、管内流の速度が遷音速となる領域においては、ここで用いた摂動展開法自身が破綻する。鋸歯状波の形成と伝播に伴う発展に対する流れの影響は、§3. で詳しく調べられる。



## §1. 一般化された Burgers 方程式

管内の定常な流れに小さいが有限の大きさをもつ擾乱が加えられて、それが波動として伝播する現象を考察する。前回の研究会で、速度の波動成分がつぎの一般化された Burgers 方程式によって記述されることを示した[文献 1]：

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} - U \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{F(\sigma)}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}. \quad (1)$$

ここに,

$$\begin{aligned} u &= M\psi U, \quad \psi = \sqrt{\frac{\bar{M}}{M_0} \frac{1 + \bar{M}_0}{1 + \bar{M}}} \\ \sigma &= \frac{\gamma + 1}{2} \kappa M \int_0^x \sqrt{\frac{\bar{M}}{M_0} \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \bar{M}^2}{(1 + \bar{M})^3}} dx, \quad \left( \kappa = \frac{1 + \bar{M}_0}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \bar{M}_0^2} \right) \\ F(\sigma) &= \frac{1}{1 + \bar{M}_0} \sqrt{\frac{\bar{M}}{M_0} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1) \bar{M}^2}{2 + (\gamma - 1) \bar{M}_0^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}, \\ \tau &= t - z, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2 + (\gamma - 1) \bar{M}_0^2}} \int_0^x \frac{\sqrt{2 + (\gamma - 1) \bar{M}^2}}{1 + \bar{M}} dx; \end{aligned} \quad (2)$$

これらの式に現れる力学的な無次元パラメータは以下の3つである。

$$\begin{aligned} Re &:= \frac{(\gamma + 1)c_0 u_0}{\omega \delta} \quad (\text{音響 Reynolds 数}) \\ M &:= \frac{u_0}{c_0} \quad (\text{音響 Mach 数}) \\ \bar{M}_0 &:= \frac{\bar{u}_0}{c_0} \quad (\text{定常流の Mach 数}). \end{aligned} \quad (3)$$

( $u_0$  と  $c_0$  は音源 ( $x = 0$ ) における擾乱の最大速度と音速,  $\bar{u}_0$  は  $x = 0$  における定常流の流速,  $\gamma$  は考えている完全気体の比熱比,  $\omega$  は振動する音源の角振動数,  $\delta$  は音の拡散率である。また, 時刻, 距離, 速度の波動成分は,  $t = \omega t^*$ ,  $x = k_0 x^*$ ,  $u = u^*/c_0$  のように無次元化されている。)

また, 定常流の局所 Mach 数  $\bar{M} := \bar{u}/\bar{c}$  と管の断面積との間には

$$A = \frac{\bar{M}_0}{\bar{M}} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1) \bar{M}^2}{2 + (\gamma - 1) \bar{M}_0^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (4)$$

の関係がある。この式を介して、 $\psi$ ,  $\sigma$ ,  $z$  等が  $x$  の関数として定まる。

ここで、管内に流れが存在しない場合を考察しておこう。このときには、 $\bar{u} \rightarrow 0$ , すなわち、 $\bar{M}_0 \rightarrow 0$ ,  $\bar{M} \rightarrow 0$  の極値移行をおこなえば、式(4)から  $\sqrt{\bar{M}/\bar{M}_0} \rightarrow 1/\sqrt{A}$  となることがわかり、式(2)から  $\psi \rightarrow 1/\sqrt{A}$ ,  $F(\sigma) \rightarrow \sqrt{A}$  となる。したがって、各変数は、

$$\begin{aligned} U &= M\sqrt{Au}, & \tau &= t - x, & A &= A(z_1) \quad (z_1 = Mx), \\ \sigma &= \frac{\gamma+1}{2} M \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A}} \end{aligned} \quad (5)$$

のように簡単な形をとる。この結果は従来からよく知られている管内の静止流体中を伝播する弱非線形進行波を記述する一般化された Burgers 方程式と一致する (文献 [2])。したがって、我々の得た結果はこのような場合をも特別な場合として含むことが示されたことになる。

## §2. 指数関数型ホーン(ノズル)

以下の節では、主に管が比較的簡単な形状をもつ指数型のホーンの場合について考察する。すなわち、管の断面積  $A = \exp(\alpha x)$  のときには、式(2)の  $z$ ,  $\sigma$  に関する積分が実行できて、各変数は  $\bar{M}$  を媒介変数として、以下のように表わすことができる。

$$\alpha x = \log \frac{\bar{M}_0}{\bar{M}} \left[ \frac{r(\bar{M})}{r(\bar{M}_0)} \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (6)$$

$$\alpha z = \frac{\nu^2}{r(\bar{M}_0)} \log \left[ \frac{\bar{M} + r(\bar{M})}{\bar{M}_0 + r(\bar{M}_0)} \left( \frac{\bar{M}_0 \nu + r(\bar{M})}{\bar{M} \nu + r(\bar{M}_0)} \right)^{\frac{1}{\nu}} \right] \quad (7)$$

$$\alpha \sigma = \frac{2\gamma+1}{\gamma-1} \frac{M}{r^2(\bar{M}_0)} \left( 1 - \frac{1 + \bar{M}_0}{1 + \bar{M}} \sqrt{\frac{\bar{M}}{\bar{M}_0}} \right). \quad (8)$$

ただし、

$$r(y) = \sqrt{y^2 + \frac{2}{\gamma-1}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}. \quad (9)$$

これらの式から、 $\bar{M}$  を消去すれば、 $z = z(x)$ ,  $\sigma = \sigma(x)$  がもとまる (文献 [1] 参照)。上式において、パラメータ  $\alpha$  は、距離を表わす空間(歪)座標  $x$ ,  $z$ ,  $\sigma$  をスケール変換する形でだけ現れる。このことは現象の相似性を示唆する。

### §3. 鋸齒状波の形成と発展

この節では、 $Re \rightarrow \infty$  の極限の場合の正弦波の放射とその非線形発展過程を調べる。この極限では、衝撃波は一つの不連続面として表わされる。このとき、基礎となる方程式は実質的には単一波方程式に帰着されるので、一様媒質中の弱非線形波動伝播の問題を取り扱ったときと全く同様の手順で解析を進めることができる。

初期条件と境界条件は、

$$U(\sigma, 0) = 0, \quad \sigma \geq 0, \quad (10)$$

$$U(0, \tau) = -\sin \tau, \quad \tau \geq 0. \quad (11)$$

#### (i) 衝撃波形成前

基礎方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} - U \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0 \quad (12)$$

である。初期条件(10)と境界条件(11)を満足する式(12)の解は、 $\xi$  を媒介変数として、つぎのように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} U &= -\sin \xi, \\ \xi &= \tau - \sigma \sin \xi. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

実際の波動成分の速度は、 $U = U(\sigma, \tau)$  がもとまれば

$$u = M\psi U = M \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_0}\right) U \quad (14)$$

で与えられる。ただし、

$$\sigma_0 := (\gamma + 1)M / \left[ \alpha \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \bar{M}_0^2\right) \right] \quad (15)$$

である。

周知のように、解(13)を調べることによって、理論上衝撃波は $\sigma = 1$ の距離で形成されることが判る。よって、 $\alpha > 0$  (拡大管)の場合、関係式 $\sigma = \sigma_0(1 - \psi)$  ( $\psi \geq 0$ )より、 $\sigma = 1$ に対応する点が物理空間に実在するためには、

$$\sigma_0 > 1, \quad \text{すなわち,} \quad \frac{(\gamma + 1)M}{\alpha} \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} \bar{M}_0^2} > 1 \quad (16)$$

でなければならない。逆に上の不等式が満足されないときには、衝撃波は形成されない。つまり、このとき正弦波状の波は波形の十分な突っ立ちが起こる前に無限遠点に達してしまう。一方、 $\alpha < 0$  の管では、下流域に  $\bar{M} = 1$  となる点が必ず現れる。このような遷音速の領域では、いま考えている摂動理論は使えない。この点に到達する以前に衝撃波が形成されるためには、

$$1 < \sigma_0 \left( 1 - \frac{1 + \bar{M}_0}{2\sqrt{\bar{M}_0}} \right) \quad (17)$$

が成り立たねばならない(図1参照)。図において斜線部では衝撃波は形成されない(ただし、 $\alpha < 0$  の場合には、不等式(17)で除外される領域である)。また、横軸の  $\epsilon = \alpha/(\gamma+1)M$  は、非一様性と非線形性の大きさの比を示す一つのパラメータである。

衝撃波形成距離をもとめるために、式(8)において、 $\sigma = 1$  とおくと、形成点の局所 Mach 数が得られる：

$$\bar{M} = \frac{1}{16} \left( \sqrt{\frac{1}{\lambda} + 2} \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 2} \right)^4, \quad (18)$$

$$\left( \lambda = \frac{\sqrt{\bar{M}_0}}{1 + \bar{M}_0} \left( 1 - \frac{1}{\sigma_0} \right), \sigma_0 = \left[ \epsilon \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \bar{M}_0^2 \right) \right]^{-1} \right). \quad (19)$$

この  $\bar{M}$  を式(6)に代入すれば、実空間における衝撃波形成距離  $x_s$  がもとまる。(図2参照)。図からわかるように、パラメータ  $\epsilon$ 、あるいは  $\bar{M}_0$  が増加するにしたがって、 $\alpha x_s$  も増加する。縮小管の場合にも、 $|\epsilon|$ 、あるいは  $\bar{M}_0$  が増加すると、 $|\alpha| x_s$  は増加する。とくに、拡大管で  $\bar{M}_0 > 1$  のときには、流れの影響が強く働き衝撃波の形成距離はかなり大きくなる。

## (ii) 衝撃波形成後

衝撃波が形成可能なとき、それ以後において ( $\sigma > 1$  において) 解(13)は多価になり、物理的な意味を失う。しかし、よく知られた等面積則を援用すれば、 $(\tau, U)$  平面の多価の解曲線において、不用のブランチを切り取り一価の曲線をつくれば、正しい波形が得られる。このとき不連続面は衝撃波を表わす。現象は周期的であるので、区間  $0 \leq \tau < 2\pi$  に制限するならば、衝撃波は  $(t, z)$ -平面において、つねに直線  $\tau = t - z = \pi$  上に位置する。したがって、式(13)より、その位置は

$$\sigma = \frac{\pi - \xi}{\sin \xi} = \frac{\hat{\xi}}{\sin \hat{\xi}} \quad (\hat{\xi} := \pi - \xi) \quad (20)$$

と表わせる ( $\xi \geq \pi$  すなわち  $\hat{\xi} \leq 0$  とする).

衝撃波面における速度の跳びの量は, 式 (14) と式 (20) から

$$\frac{\Delta u}{M} = 2 \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \sin \hat{\xi} \quad (21)$$

と表わせる. 式 (20) と式 (21) から  $\hat{\xi}$  を消去すれば,  $\Delta u/M = \Delta u/M(\sigma)$  がもとまる (図 3 参照).  $\alpha > 0$  の拡大管の場合には,  $x \rightarrow \infty$  のとき,  $\sigma \rightarrow \sigma_0$  であるから, このとき,  $\Delta u \rightarrow 0$  となることを注意しておく. また,  $\sigma_0 = \infty$  は流れのない一様な媒質中の衝撃波の伝播に対応する. 図から直ちに判るように,  $\sigma_0$  の値が小さくなれば, 跳びの量  $\Delta u/M$  の最大の値 (衝撃波の最大強さ) は減じ, その到達点は実空間では遠くなる. 到達点の  $\sigma$ -座標は

$$\sigma = \frac{\arccos\left(\frac{1}{\sigma_0}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{\sigma_0^2}}} \quad (22)$$

で与えられる. 縮小管 ( $\alpha < 0$ ) の場合には,  $\sigma \rightarrow \infty$  が  $x \rightarrow \infty$  に対応し, この極限で

$$\frac{\Delta u}{M} \rightarrow \frac{2\pi}{|\sigma_0|} \quad (23)$$

となる. ただし,

$$\sigma = \frac{|\sigma_0|}{2} \left( \bar{M}_0^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\bar{M}_0^{\frac{1}{4}}} \right)^2 \quad (24)$$

で  $\bar{M} = 1$  となるので, それ以遠では上述の式を適用することはできない.

衝撃波の伝播速度も容易に求まる. 衝撃波は,  $t - z = \pi$  の上に現れるので

$$u_s = \frac{dx_s}{dt} = \frac{dx_s}{dz_s} = (1 + \bar{M}) \frac{r(\bar{M}_0)}{r(\bar{M})} = \bar{c} + \bar{u}. \quad (25)$$

のように求まる. これより, 衝撃波は流れがない場合には局所音速で伝播するが, 流れがある場合にはさらに流れに乗ってそのぶんだけ伝播速度は速くなることが判る. この式と式 (6) から,  $\bar{M}$  を消去すれば,  $u_s = u_s(x)$  が得られる (図 4 参照).

遠方場  $\sigma \geq 2$  では, 音源から放射された正弦波は鋸歯状型の波形となる (図 5 参照).

$$u = \begin{cases} -M\psi \frac{\tau}{1+\sigma} & (0 \leq \tau < \pi), \\ M\psi \frac{2\pi - \tau}{1+\sigma} & (\pi \leq \tau < 2\pi). \end{cases} \quad (26)$$

さらに遠方では,  $\psi$  による減衰の効果が大きくなる.  $x \rightarrow \infty$  のとき,  $\psi$  は指数関数的に減少するので

$$\frac{\Delta u}{M} \propto \frac{\exp\left(-\frac{\sigma}{2}x\right)}{\sigma} \quad (27)$$

となる.

## 文 献

- [1] 井上良紀, 片岡晃一, 宮本晃宏: 管内流中における衝撃波の伝播. 数理解析研究所講究録 1092 (「大自由度・強非線形の波動現象の数理」) (1999) 158-167.
- [2] D. G. Crighton: Basic Theoretical Nonlinear Acoustics. in *Frontiers in Physical Acoustics* ed. D. Sette(North-Holland, Amsterdam, 1986).

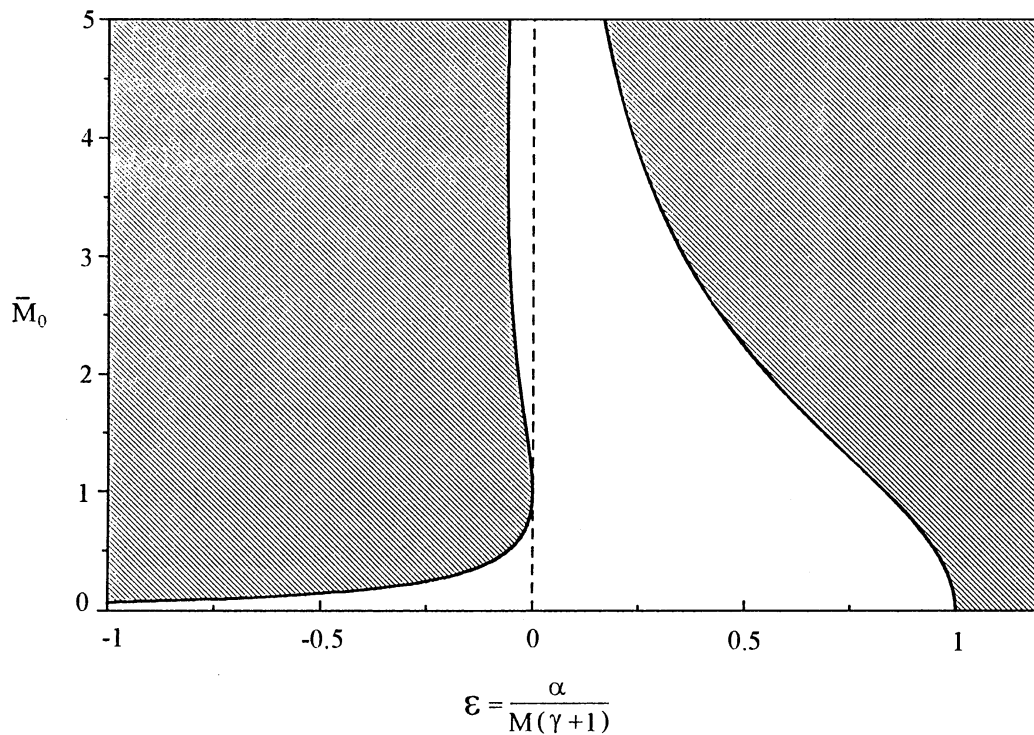


図 1

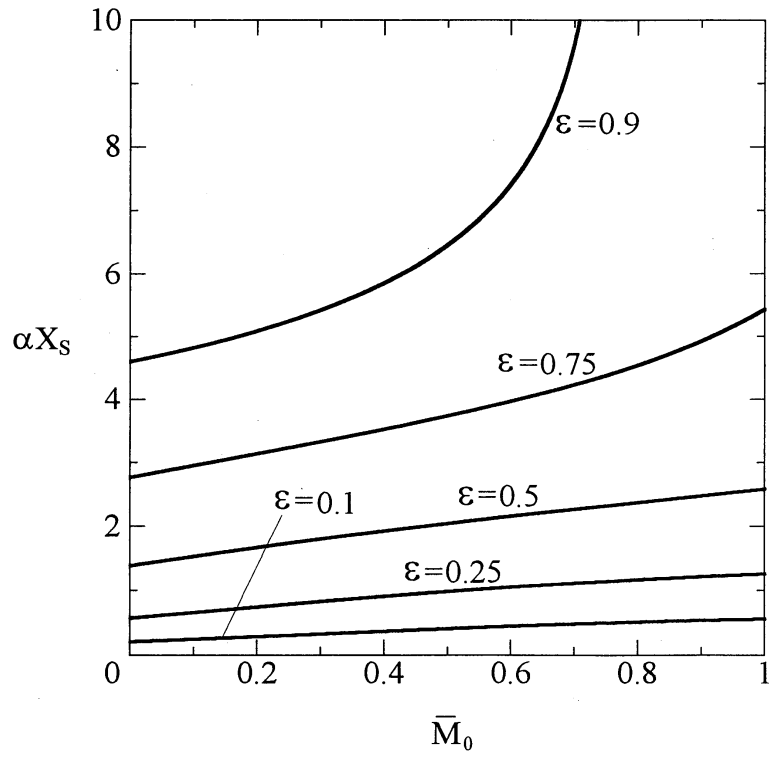


图 2 (a)

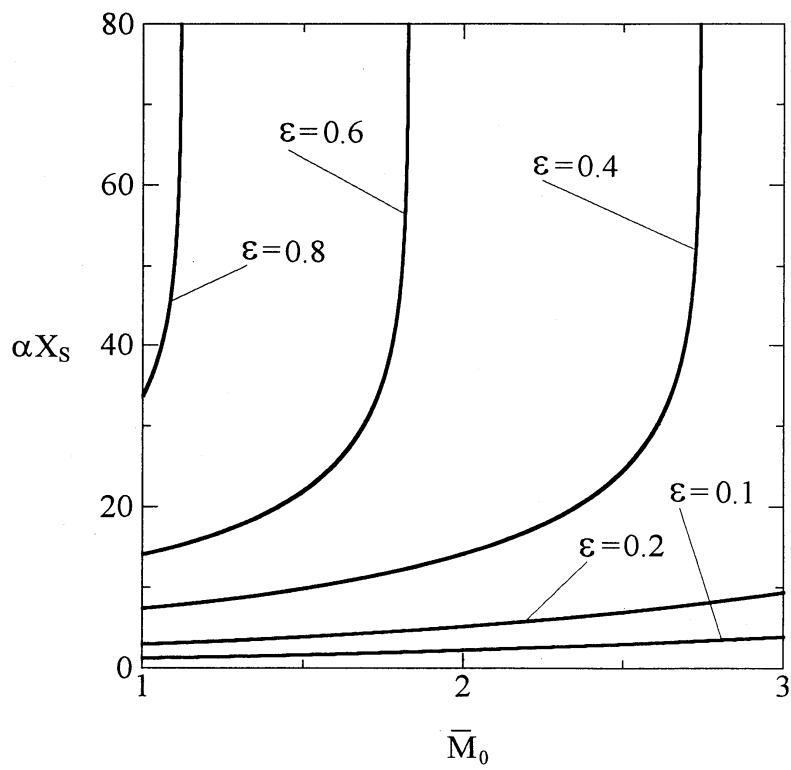


图 2 (b)



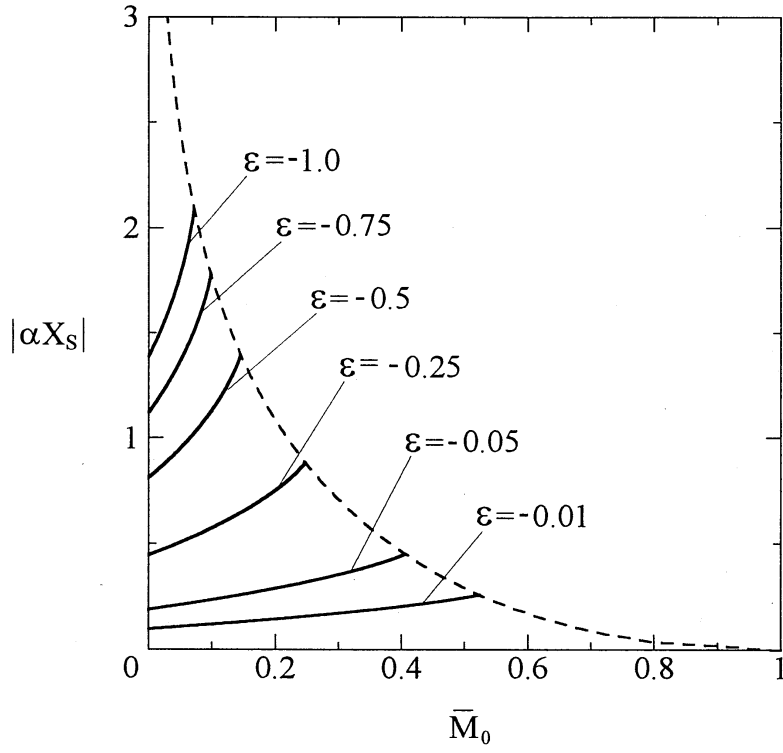


图 2 (c)

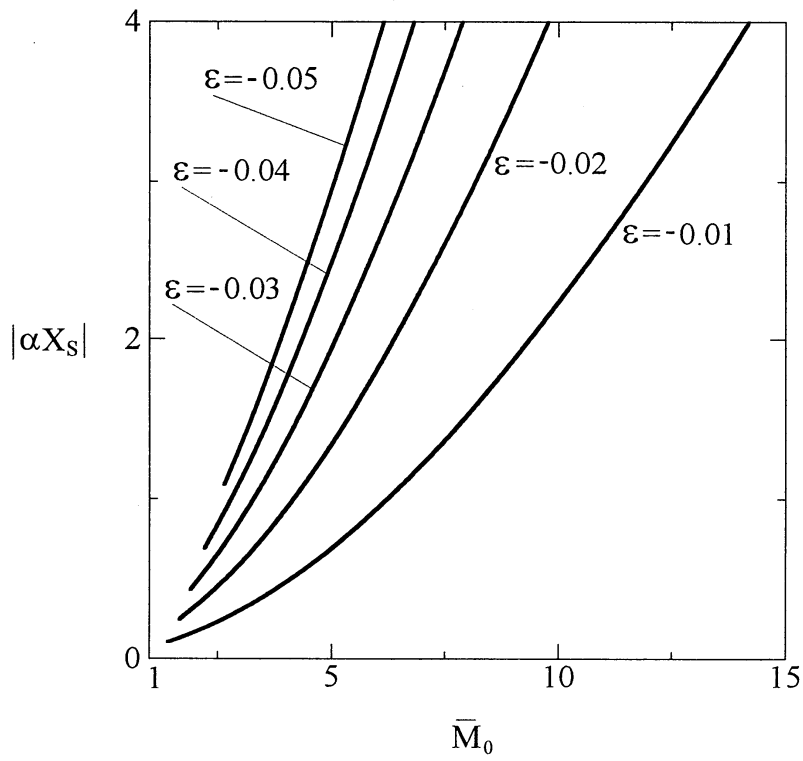


图 2 (d)

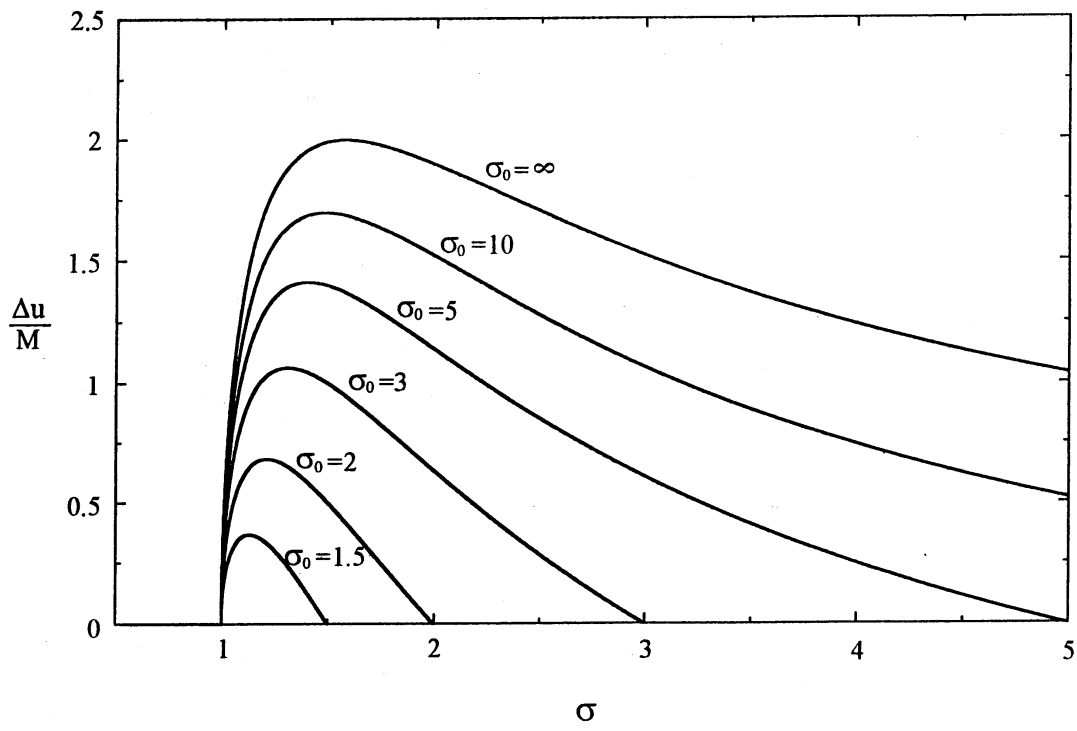


图 3 (a)

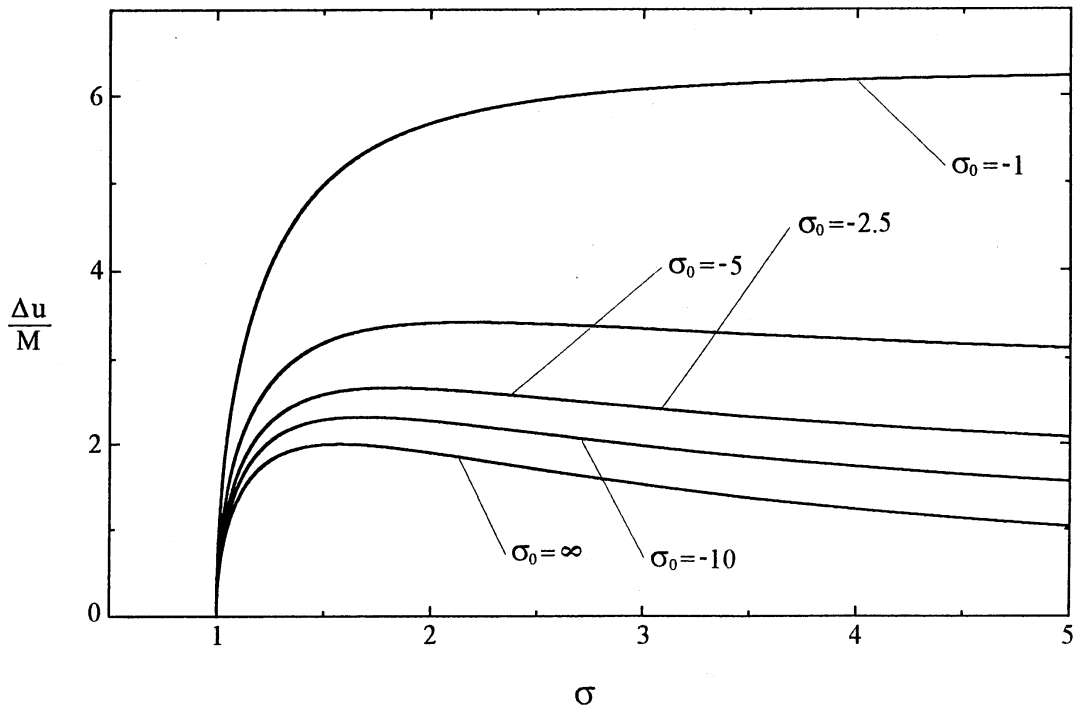


图 3 (b)

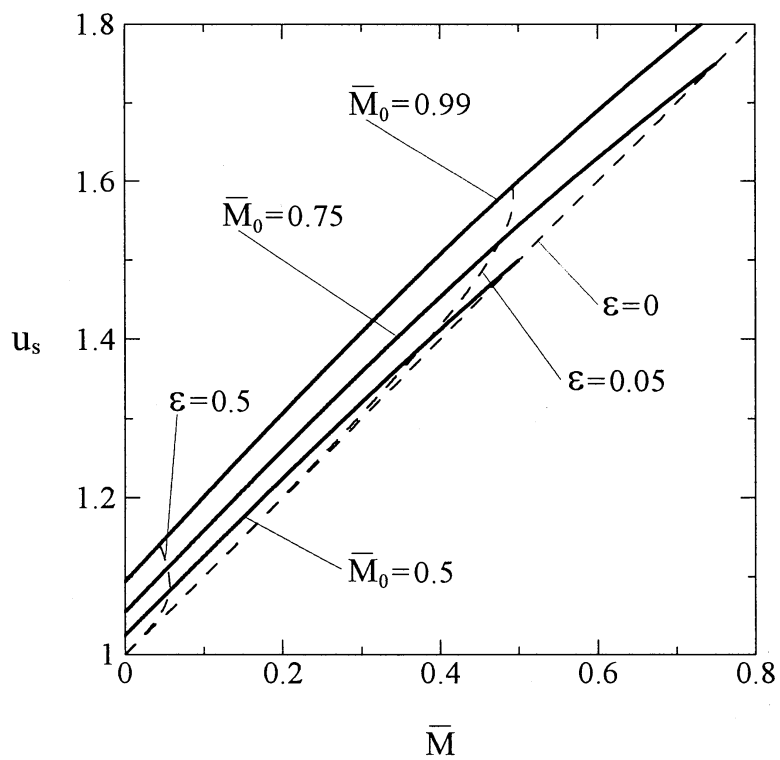


图 4 (a)

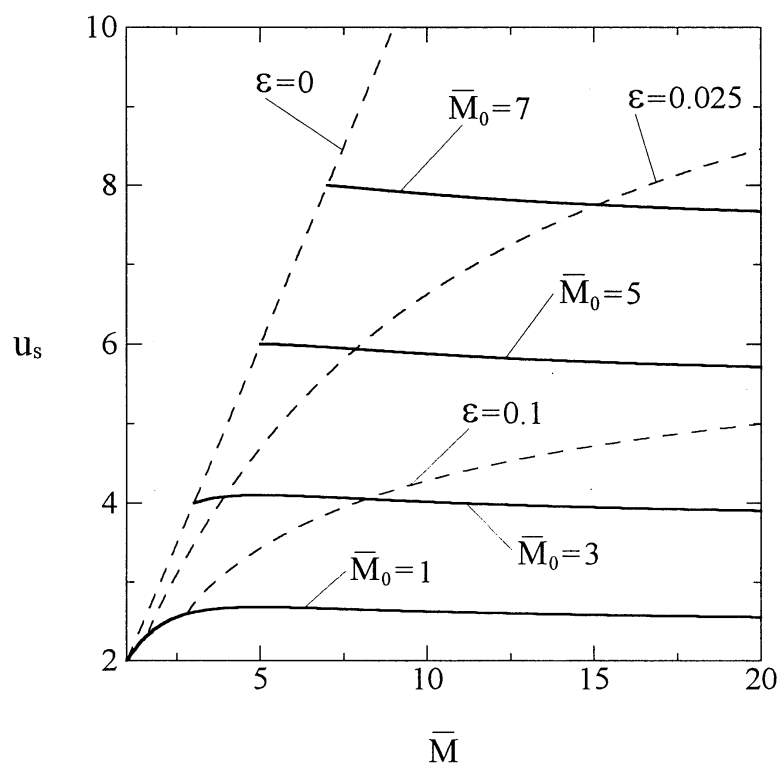


图 4 (b)

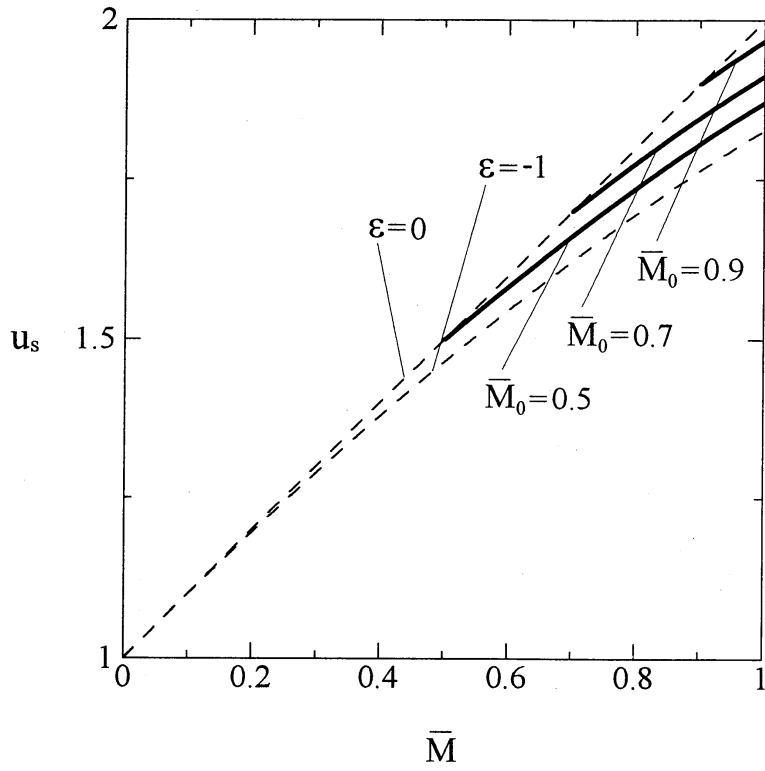


图 4 (c)

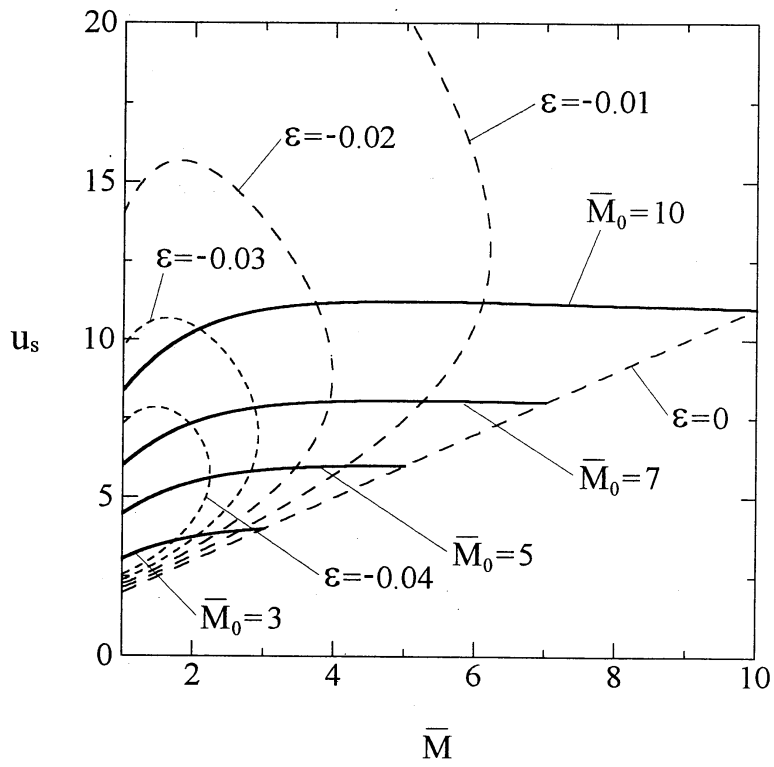


图 4 (d)

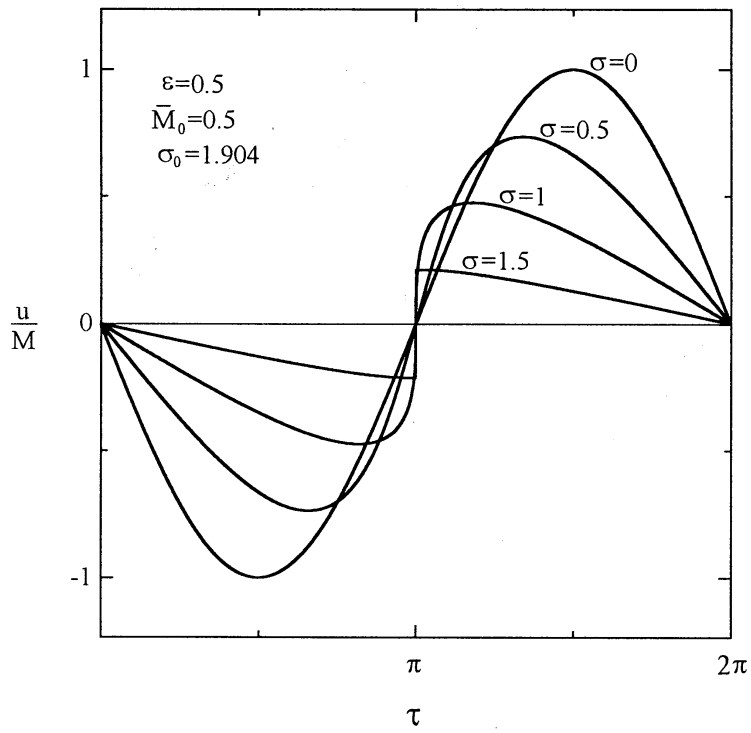


图 5 (a)

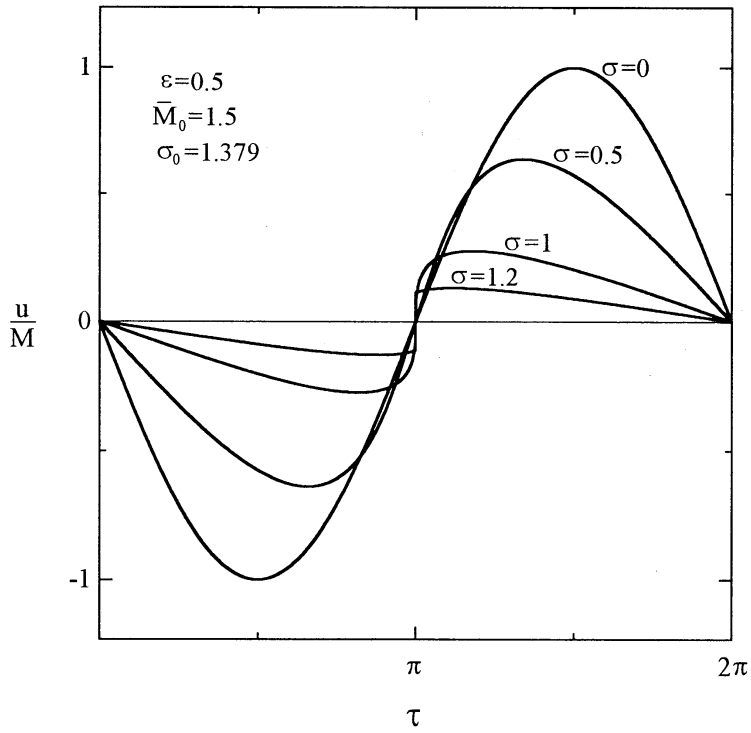


图 5 (b)

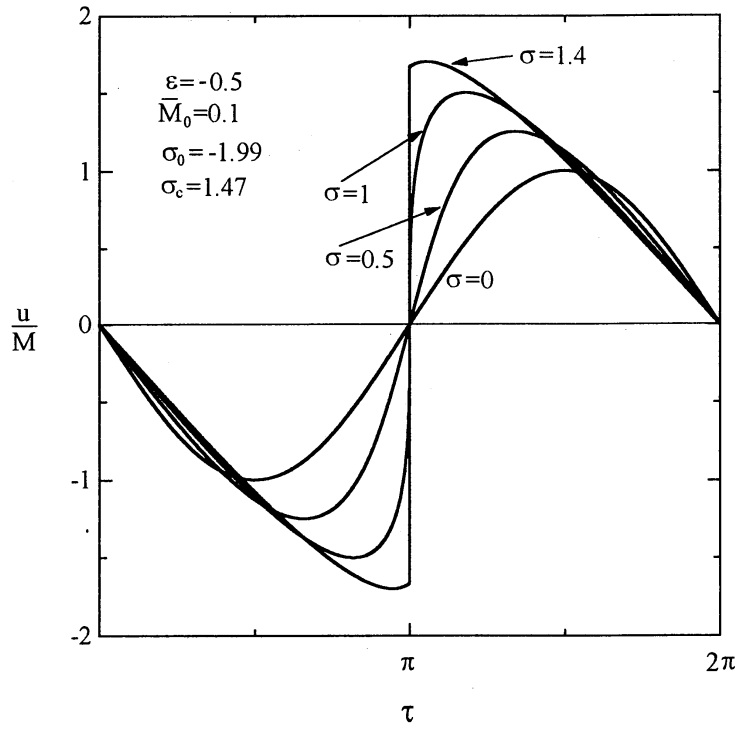


图 5 (c)

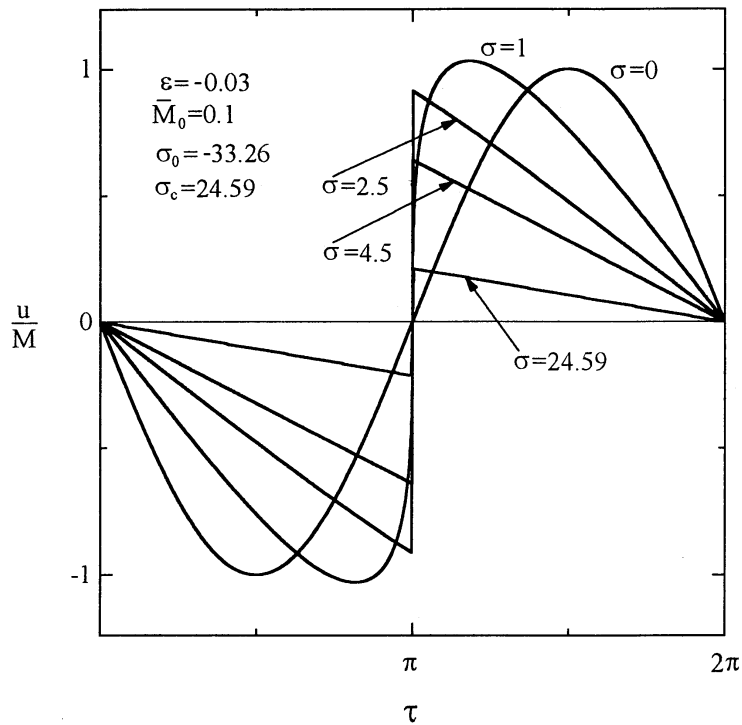


图 5 (d)

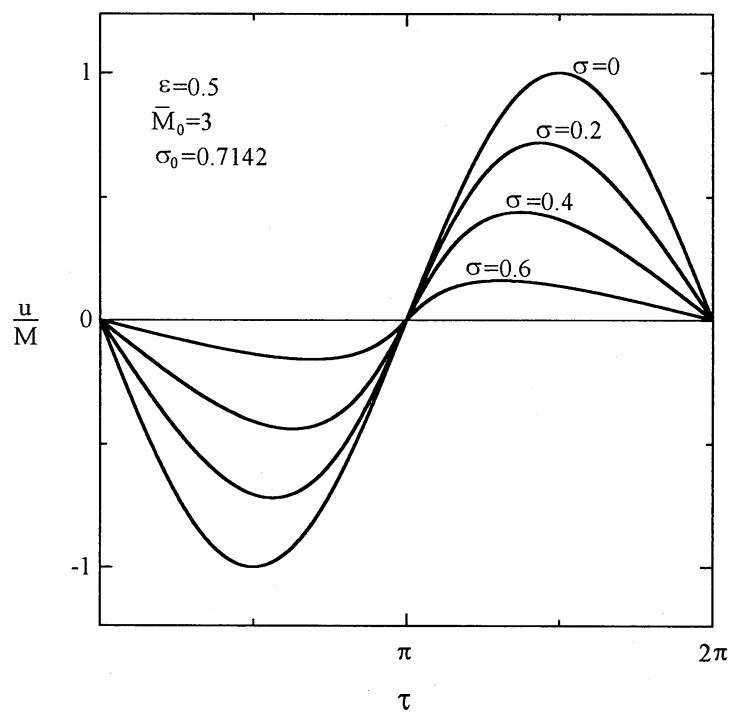


图 5 (e)