

ガロア逆問題に於ける linear rigidity と その応用 (survey)

伊原 康隆 (京大・数理研)

最近 “linearly rigid tuples” の研究が進んで、応用として、有限体 F_q 上の reductive linear groups に関する有理数体 \mathbb{Q} 上の Galois の逆問題が色々解かれているので、その紹介を試みます。 q が linear group の階数に比べて小さければ必ずしも素数でなくてもよい、というのが最近の主な進展で、その前段階の基礎を築いたのは J. G. Thompson、この方向を切開いたのが H. Völklein とその共著者 K. Strambach [V][SV] など、そして N. Katz の Rigid local systems の研究 [K] との関連に気付きそれを線型代数化した M. Dettweiler、S. Reiter による一般化 [DR] などが主なものですが、ここでは主に [DR] に従って話を進めます。

1 問題と背景

$F_r = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ を階数 $r \geq 2$ の自由群とし、等式 $x_r \cdots x_1 x_0 = 1$ によって $x_0 \in F_r$ を定める。又 $GL_n(K)$ を体 K 上の n 次一般線型群、

$$\varphi : F_r \rightarrow GL_n(K)$$

を群の準同型射とする。 φ は x_i の像 t_i ($0 \leq i \leq r$) で一意的に定まる。

$$\begin{aligned} \varphi &\longleftrightarrow r\text{-tuples } t_r, \dots, t_1 \text{ in } GL_n(K) \\ &\longleftrightarrow (r+1)\text{-tuples } t_r, \dots, t_1, t_0 \text{ in } GL_n(K) \text{ s.t. } t_r \cdots t_1 t_0 = 1. \end{aligned}$$

φ が既約 (絶対既約) とは、 φ が F_r の表現として既約 (絶対既約) なることとする。

φ が *linearly rigid* (resp. *absolutely linearly rigid*) とは、別に $\varphi' \longleftarrow (t'_r, \dots, t'_1, t'_0)$ で各 i ($0 \leq i \leq r$) に対して t'_i が t_i と $GL_n(K)$ (resp. $GL_n(\bar{K})$) で共役なら、ある (一つの) $g \in GL_n(K)$ (resp. $GL_n(\bar{K})$) によって一斉に

$$t'_i = g^{-1}t_i g \quad (0 \leq i \leq r)$$

となること、と定義する。ただし \bar{K} は K の代数閉包。(共役の条件の中に $i=0$ も含まれているからこそ意味がある、という事に注意)。Absolutely linearly rigid (略 *a.l.r.*) なら linearly rigid (略 *l.r.*) になる。

$n=1$ なら φ は常に絶対既約で *a.l.r.*

$n \geq 2$ のとき、 $r=2$ なら絶対既約な φ はすべて *a.l.r.* となる事が初等的計算で確かめられる (§2 命題1 参照)。だが、 $r > 2$ だとそうとは限らない。以後 φ が絶対既約の場合を主に考える。

《問題》 φ : (絶対) 既約かつ (absolutely) linearly rigid なものを全部構成する方法はないか?

[K]、[DR] は、これにある意味での解答を与えている。

[問題の背景] (1) F_q 上の被約線型群 $GL_n(F_q), Sp_{2n}(F_q), \dots$ 等を Galois 群にもつ \mathbb{Q} 上の Galois 拡大体の構成に役立つ。

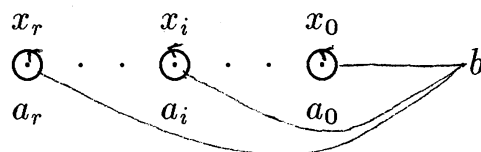
(2) $K = \mathbb{C}$ のとき。 $r+1$ 個の確定特異点を持ち、その外では非特異な $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上の n 階線型微分方程式であって、「local monodromy を保つ変形」を持たないもの (謂ゆる accessory parameter を持たない微分方程式) を求める問題そのものである。

B. Riemann 以来の問題である (2) の最近の発展が (1) に大きな影響を与えた [DR]。

[我々の問題と (1)(2) との関連] $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上に $r+1$ 個の相異なる点 a_0, \dots, a_r 及び、それらと異なる基点 b をとり、基本群

$$\pi_1 = \pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{a_0, \dots, a_r\}, b)$$

を考える。また下図の定める π_1 の元を x_i ($0 \leq i \leq r$) とすると、 $x_r \cdots x_1 x_0 = 1$ であり、 π_1 は自由群 $F_r = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ と同一視できる。



[(1) との関連] 準同型射

$$\varphi: \pi_1 \rightarrow G \subseteq GL_n(\mathbb{F}_q) \quad t_i := \varphi(x_i) \quad (0 \leq i \leq r)$$

があると、この核と対応する $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \{a_0, \dots, a_r\}$ の G -cover (G をガロア群とする有限正規連結被覆) がある。今 a_0, \dots, a_r はすべて \mathbb{Q} -有理点とする。(もう少し弱く、それぞれは \mathbb{Q} 上代数的でガロア置換によって全体として不変、でも可。) この G -cover は、代数曲線の代数的被覆とみるとき、 φ に関する如何なる条件のもとで、 \mathbb{Q} 上定義されると云えるか? その為の十分条件の二つの主要な構成要素は実は:

(i) φ : 既約、かつ linearly rigid、

(ii) $\{t_i\}_{i=0}^r$: rational、即ち各 $tr(t_i)$ ($0 \leq i \leq r$) は \mathbb{Q} 上代数的で、ガロア置換によって集合 $\{tr(t_i)\}$ は保たれる、

である。これら二つが満たされても、まだ必ずしも十分とは云えないが、これらが最も基本的な条件なので、これらを満すものを求め、それから更に残りの条件を確かめるという方法がとられている。上記 G -cover が \mathbb{Q} 上定義されれば、有理関数体 $\mathbb{Q}(t)$ 上のガロア G 拡大が出来るので、それを適当に特殊化して (Hilbert の既約性定理) \mathbb{Q} 上の G 拡大が作れるわけである。(i) を満すものを見つけるのが一番困難、 r が大きいものでないと (ii) が成立しにくいので、 r が大きいものでしかも (i) を満すものを作る必要がある。)

[(2) との関連] $\mathbb{C}(t)$ 係数の n 階線型微分方程式 S であって、 a_r, \dots, a_0 のみで確定特異点を持ちその外では非特異なものを考える。基点 b での S の局所解の空間の底をとり、各 $\gamma \in \pi_1$ に沿ってそれらを解析接続する事によって π_1 のモノドロミー表現

$$\varphi_S: \pi_1 \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

が生じる。 $\varphi_S(x_i)$ ($0 \leq i \leq r$) の Jordan 標準型を S の local data と考えると、

φ_S : linearly rigid \leftrightarrow local data だけで φ_S が ($GL_n(\mathbb{C})$
共役を除いて) 定まる。

こういう S は今迄色々知られていて、その解は重要な特殊関数であった。

例えば、Riemann の P 関数 ($n = r = 2$: この場合、前述のように、既約 \rightarrow l.r.)。より一般の場合について、K. Okubo 氏等により日本でも盛んに研究されているようであるが、[DR] では高野-坂内 [TB] による Jordan-Pochhammer 方程式 ($n = r$) の φ_S の具体的計算が大変有効に用いられている。

(1), (2) は謂わば π_1 のそれぞれ Galois(etale)realization, de Rham realization の両側面なので、内的関連があったのは、むしろ当然だった、と云えよう。

2 Linearly rigid $(r + 1)$ -tuples について

§1 のように

$$\begin{aligned} \varphi : F_r &\rightarrow GL_n(K), \\ \varphi &\leftrightarrow (t_r, \dots, t_1, t_0), \quad t_r, \dots, t_0 \in GL_n(K), t_r \cdots t_0 = 1 \end{aligned}$$

とする。 φ が絶対既約のとき、 *a.l.r* である為の必要十分条件が簡単にわかる。ここで各 $i (0 \leq i \leq r)$ に対して、 t_i の $M_n(K)$ の中での centralizer (K -algebra) の $M_n(K)$ 内での余次元を δ_i とおく。

命題 1 φ : 絶対既約とすると常に $2n^2 - \sum_{i=0}^r \delta_i \leq 2$ が成立ち、ここで等号が成立する事と φ が *a.l.r* である事が同値。

証明は直観的にもわかりやすく、容易。

この $2n^2 - \sum_{i=0}^r \delta_i$ を φ の index of rigidity と呼ぶ。 $n = r = 2$ のときは、絶対既約性より $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = 2$ となり、この index=2、従って必ず *a.l.r.* になる。

一般の (n, r) のとき、例えば (1つの) t_i の (n ヶの) 固有値がすべて相異なれば $\delta_i = n^2 - n$ だが、一方、index=2 となるためには $\delta_i (0 \leq i \leq r)$ の平均が $\frac{2n^2}{r+1}$ 位でないといけなないので、 r が n に比べて大きいとき *a.l.r.* になる為には、各 δ_i は十分小さく、従って各 t_i の centralizer は十分大きく (即ち各 t_i は " n より低次元的" で) しかも全体としては絶対既約になっていないといけない。

Katz の原理 (一応 C 上) : 与えられた (r, n) に対する既約で *l.r.* な φ_r は、同じ r で $n = 1$ のものから、"middle convolution" と " Λ -multiplication" の 2 つの操作を有限回くり返すことですべて得ることが出来る。

Dettweiler-Reiter: 一般の体 K でこれを線型代数化した。

後者は、全く初等的である。以下これについて述べる。再び任意の

$$\begin{aligned} \varphi : F_r &\rightarrow GL_n(K), & t_i &= \varphi(x_i) \quad (0 \leq i \leq r) \\ & & t_r \cdots t_1 t_0 &= 1 \end{aligned}$$

定理 2 ([K][DR]) φ は $n > 1$ かつ絶対既約、又は $n = 1$ で $\#\{i; 0 \leq i \leq r, t_i \neq 1\} \geq 2$ とするとき、次の (i) ~ (v) が成立つ。

(i) $MC_\lambda(\varphi)$ は絶対既約。

(ii) $MC_1(\varphi) \simeq \varphi$, $MC_\lambda(MC_{\lambda'}(\varphi)) \simeq MC_{\lambda\lambda'}(\varphi)$ ($\lambda, \lambda' \in K^\times$)。

(iii) φ と $MC_\lambda(\varphi)$ は同じ index of rigidity を持つ。とくに

$$\varphi : a.l.r \leftrightarrow MC_\lambda(\varphi) : a.l.r.$$

(iv) $MC_\lambda(\varphi)$ は φ への “braid action”, “dualization”, “inversion” と可換。

(v) すべての絶対既約で $a.l.r$ な $(r+1)$ -tuple φ は、 $n = 1$ の $(r+1)$ -tuple から、 MC_λ たちと Λ -乗法をほどこす操作を有限回くり返して得られる。ただし、 K は t_i ($0 \leq i \leq r$) のすべての固有値を含む (例えば $K = \bar{K}$) とする。ここに、 Λ 乗法とは、

$(\lambda_r, \dots, \lambda_1) \in K^{\times r}$ に対して、 $\lambda_1 \cdots \lambda_r \lambda_0 = 1$ で $\lambda_0 \in K^\times$ を定めたとき

$$(t_r, \dots, t_1, t_0) \rightarrow (\lambda_r t_r, \dots, \lambda_1 t_1, \lambda_0 t_0)$$

で得られる φ たち同志の間の変換。

このうち (v) の証明の要点を記す。

$\varphi \leftrightarrow (t_i)$, $n > 1$, 絶対既約かつ $a.l.r.$ とするとき、

各 i ($0 \leq i \leq r$) に対して t_i の固有空間の余次元の最小値を n_i 、対応する固有値 (の一つ) を λ_i^{-1} とおくと、命題 1 と Scott のレンマにより、

$$\sum_{i=0}^r n_i < 2n, \quad \lambda = \lambda_r \cdots \lambda_0 \neq 1$$

を得る。このとき

$$MC_{\lambda^{-1}}(\lambda_r t_r, \dots, \lambda_1 t_1, \lambda^{-1} \lambda_0 t_0)$$

の次元 $< n$ となる。

特に、 φ として $\varphi = \varphi(a) \leftrightarrow (t_r, \dots, t_0) = (a_r, \dots, a_0) \in K^{\times r}$

$$a_r \cdots a_0 = 1, \quad a_i \neq 1 \quad (\forall i)$$

をとり、 $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq a_0$ とするとき

$$MC_\lambda(\varphi_{(a)}) : F_r \rightarrow GL_r(K)$$

は絶対既約かつ *a.l.r.* これは

$K = \mathbb{C}$ のとき、Pochhammer differential equation と対応 (cf. [TB]).

$K = \mathbb{F}_q$ のとき、正規 Thompson $(r+1)$ -tuple と対応

ここで Thompson $(r+1)$ -tuple とは、

$$(t_r, \dots, t_0), \quad t_r \cdots t_0 = 1, \quad t_i \in GL_r(K) \quad (0 \leq i \leq r) \text{ で、}$$

既約かつ各 t_i が余次元 1 の固有空間を有するものこと。与えられた $a_i, b_i \in K$ ($0 \leq i \leq r$) に対して、 t_i の固有多項式が $(x-a_i)^{r-1}(x-b_i)$ なる Thompson $(r+1)$ -tuple が存在する為の必要十分条件は

$$a_r \cdots a_0 \neq 1, \quad b_j \prod_{i \neq j} a_i \neq 1 \quad (0 \leq j \leq r), \quad \prod_i (a_i^{r-1} b_i) = 1$$

である。又これらが満たされるとき、そのような tuple は $GL_r(K)$ 共役を除いて一意的に存在する (特に *l.r.*) ことが知られている。正規とは (Λ -乗法によって) 各 $a_i = 1$ ($1 \leq i \leq r$) と仮定されたものこと。

Völklein 等は、Thompson tuples とその $\varphi(F_r)$ の分類を使って (以下の) 結果を出し、Dettweiler-Reiter は、 $n = 2$ の特定の “rational” (この為 $m > q$ が必要) *a.l.r.* な φ から $M_{-1}(\varphi)$ 等によって (以下の) 結果を出した。

(問) M_λ と Λ -multiplications の積の間に成立つすべての乗法的関係を求めよ!

(筆者に興味あるが、現在答を知りません)。

3 主な応用上の結果

\mathbb{Q} 上の Galois 群として出てくるのが *l.r.* tuples を用いて示せる有限体上の reductive linear groups の主な例は次のものである。

$$\begin{aligned} GL_m(q) & \quad q : \text{odd}, < m \cdots m : \text{even} : \text{Völklein}, \\ PSO_{2m+1}(q) & \quad q : \text{odd} < m, 7 < m \cdots \text{Dettweiler-Reiter}, \\ PSp_{2m}(q) & \quad q : \text{odd} < m, 2 < m \cdots \text{Thompson, Völklein, Dettweiler-Reiter}. \end{aligned}$$

References

- [DR] M. Dettweiler, S. Reiter, An algorithm of Katz and its application to the Inverse Galois problem. Preprint **99 – 47**, IWR, Heidelberg (1999).
- [K] N. Katz, Rigid local systems, Princeton Univ. Press.
- [SV] K. Strambach, H. Völklein, On linearly rigid triples, *J. reine angew. math.* **510** (1999), 57–62.
- [V] H. Völklein, Rigid generators of classical groups, *Math. Ann.* **311** (1998).
- [TB] K. Takano, E. Bannai, A global study of Jordan-Pochhammer differential equations, *Funk. Ekvac.* **19**.
- [S] J-P. Serre, Topics in Galois theory, Research Notes in Math.
- [MM] G. Malle, B.H. Matzat, Inverse Galois theory, Springer.
- [V] H. Völklein, Groups as Galois groups, An Introduction, Cambridge Studies in Adv. Math.
- その他,
Aspects of Galois theory, London Math. Soc. LNS **256**, Cambridge Univ. Press.