数理解析研究所講究録
1154巻 2000年 22-32

Rigid syntomic cohomology と p-進 polylogarithm

東大数理　坂内 健一 (Kenichi Bannai)

様々な cohomology 群の中で，数論的に重要な元を具体的に捕らえる事は重要である．Beilinson の polylogarithm の理論は，ある程度整備された cohomology 理論に対して，cohomology 群の中に数論的に重要と思われる元を構成する手段である．

この文章では, 係数付き rigid syntomic cohomology と呼ばれる p-進的な cohomology 理論を紹介し，これが，実際 Beilinson の元を計算するのに適している根拠を与える．最初の章では問題の背景と polylogarithm の理論を紹介する．主結果（定理2）はここで述べる．2章では，係数付き rigid syntomic cohomology を紹介する．この cohomology は，Hodge 理論の Beilinson-Deligne cohomology の p-進類似として定義される．最後の章では係数付き rigid syntomic cohomology の性質を列挙する．

1. Polylogarithm の理論

1.1. **背景.** X を代数体 F 上の非特異な代数多様体とする．この時 Beilinson は regulator 写像と呼ばれる射

$$r_{\mathscr{D}}: H^i_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(j)) \to H^i_{\mathscr{D}}(X, \mathbb{R}(j))$$

を定義した．ここで $H^i_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(j))$ は motivic cohomology と呼ばれる $\mathbb{Q}$-ベクトル空間で，定義は複雑である．$H^i_{\mathscr{D}}(X, \mathbb{R}(j))$ は Beilinson-Deligne cohomology と呼ばれるもので，X を複素数体まで係数拡大し，Hodge 理論を用いる事によって定義される $\mathbb{R}$-ベクトル空間である．Regulator 写像が重要な理由として，Beilinson 予想の定式化に必要である事があげられる．

予想 (Beilinson 予想 [Bei1]). X を代数体 F 上の完備非特異な射影多様体とする．この時，X の L-関数の特殊値 (=整数点での値) は，regulator 写像を用いて，具体的に記述される．

X に対しては L-関数と呼ばれる関数が定義され，非常に良い性質を満たしていると思われている．昔から，整数論では，この関数の特殊値が数論的に重要な量を記述していると信じられている．これに関連して，BSD 予想や Deligne 予想など，数々の予想が提唱された．Beilinson 予想は，これらの予想の集大成，すなわち，これらの予想をすべて含む予想である．予想の詳細は [Sch] で紹介されている．

p を素数とし，$\mathfrak{p}$ を F の p 上にある素数とする．また，K を F の $\mathfrak{p}$ での完備化，$\mathcal{O}_K$ を K の整数環とする．また，$\mathfrak{X}$ を $\mathcal{O}_K$ 上 smooth で finite type な代数多様体とする．この時，Amnon Besser [Bes] は，regulator 写像の p-進類似として syntomic regulator 写像

$$r_{\mathrm{syn}}: H^i_{\mathscr{M}}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}(j)) \to H^i_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}, K(j))$$

を定義した．ここで右辺は $\mathfrak{X}$ の rigid syntomic cohomology と呼ばれるもので，定義は次の章で述べる．

Beilinson 予想の p-進類似として，以下の事が成り立つかを考えてみる．この主張は，Beilinson 予想の場合と異なり，厳密には定式化されていないので，“予想” と記す．

予想 (p-進 Beilinson “予想”). X を代数体 F 上の完備非特異な射影多様体とする．また，X が $\mathfrak{p}$ で good reduction を持ち，$\mathfrak{X}$ が X の $\mathcal{O}_K$ 上の model とする．この時，X の p-進 L-関数の特殊値は，syntomic regulator 写像を用いて，具体的に記述される．

この “予想”の最初の重要な根拠として，Gros-栗原の結果がある．$d \geq 2$ を p と素な整数，$F = \mathbb{Q}(\mu_d) \subset K = \mathbb{Q}_p(\mu_d)$ とする．整数 $j \geq 1$ と 1 の原始 d-乗根 ω に対して，Beilinson は cyclotomic element と呼ばれる元

$$C_j^B(\omega) \in H^1_{\mathscr{M}}(\mathcal{O}_K, \mathbb{Q}(j))$$

を構成した．Gros と栗原は，以下の事を証明した．

定理 1 (Gros-栗原 [GK], Gros [G]).

$$r_{\mathrm{syn}}(C_j^B(\omega)) = \ell_j^{(p)}(\omega).$$

ここで，

$$\ell_j^{(p)}(t) = \sum_{k \geq 1, (k,p)=1} \frac{t^k}{k^j}$$

は Coleman [Col] によって定義された p-進 polylog 関数である．また，標準同型

$$H^1_{\mathrm{syn}}(\mathcal{O}_K, K(j)) = K$$

を通して $r_{\mathrm{syn}}(C_j^B(\omega))$ を K の元と見なしている．p-進 polylog 関数 $\ell_j^{(p)}(t)$ は 久保田-Leopoldt の p-進 L-関数と密接な関係にある事が知られているので，上記定理は，p-進 Beilinson “予想” の精神に沿ったものである．

p-進 Beilinson “予想” の妥当性を検証する為には，より多くの例で，syntomic regulator 写像による motivic cohomology の元の像を計算する必要がある．しかしながら，motivic cohomology の定義が非常に複雑な為，motivic cohomology の中に具体的な元を構成する事は難しい．Beilinson 予想や p-進 Beilinson “予想” を検証する上での難しさは，ここに由来する．

1.2. **Polylogarithm の理論.** ここで，Beilinson の polylogarithm の理論が現れる [Bei2]．これは，motivic cohomology の中に形式的な方法によって組織的に大量に元を構成する手段である．

$\mathbb{U}$ を $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K[t, t^{-1}, (t-1)^{-1}] = \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_K} \setminus \{0, 1, \infty\}$ とする．Polylogarithm とは，

$$\mathrm{pol} \in H^1_{\mathscr{M}}(\mathbb{U}, \mathcal{L}og)$$

の元である．ここで $H^1_{\mathscr{M}}(\mathbb{U}, \mathcal{L}og)$ は $\mathbb{U}$ 上のある simplicial scheme の motivic cohomology として定義する．もし係数付き motivic cohomology の理論が将来整備されれば，これは $\mathcal{L}og$ と呼ばれる $\mathbb{U}$ 上の motive に係数を持つ $\mathbb{U}$ の motivic cohomology と同型になる．

Polylogarithm の重要性は，まず最初に，Beilinson の cyclotomic element を統制している事，次には，非常に簡単な特徴づけを持っている事，の2点である．より詳しく説明すると，以下の通りである．

$i_\omega : \mathcal{O}_K \to \mathbb{U}$ を $t \mapsto \omega$ で定義される射とする．この時，$\mathcal{L}og$ の性質から，

$$i_\omega^* \mathcal{L}og = \prod_{j\geq 1} K(j) \tag{1.1}$$

と分解する．引き戻しによる合成射

$$H^1_{\mathscr{M}}(\mathbb{U}, \mathcal{L}og) \xrightarrow{i_\omega^*} H^1_{\mathscr{M}}(\mathcal{O}_K, i_\omega^*\mathcal{L}og) \overset{(1.1)}{=} \prod_{j\geq 1} H^1_{\mathscr{M}}(\mathcal{O}_K, K(j))$$

による pol の像は, cyclotomic element $(C_j^B(\omega))_j$ で与えられる．即ち，pol は cyclotomic element を統制しているわけである．

この pol は非常に簡単な特徴付けを持っている．$H^1_{\mathscr{M}}(\mathbb{U}, \mathcal{L}og)$ から, $\{1\}$ での residue と呼ばれる射

$$\mathrm{Res} : H^1_{\mathscr{M}}(\mathbb{U}, \mathcal{L}og) \longrightarrow H^0_{\mathscr{M}}(\mathcal{O}_K, \mathbb{Q}(0)) \cong \mathbb{Q}$$

が定義され，これが同型である事が知られている．Polylogarithm は，この射による $\{1\} \in \mathbb{Q}$ の逆像

$$\mathrm{pol} = \mathrm{Res}^{-1}(\{1\})$$

と定義される．

1.3. **結果.** Polylogarithm のこれらの性質を用いる事によって，Gros-栗原の計算結果を得る事を考える．この為に，[Ban1]では係数付き rigid syntomic cohomology の理論を整備し, 図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q} & \xleftarrow[\cong]{\mathrm{Res}} & H^1_{\mathscr{M}}(\mathbb{U}, \mathcal{L}og) & \xrightarrow{i_\omega^*} & \prod_{j\geq 1} H^1_{\mathscr{M}}(\mathcal{O}_K, \mathbb{Q}(j)) \\ \downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle r_{\mathrm{syn}}} \\ \mathbb{Q}_p & \xleftarrow[\cong]{\mathrm{Res}_p} & H^1_{\mathrm{syn}}(\mathbb{U}, \mathcal{L}og) & \xrightarrow{i_\omega^*} & \prod_{j\geq 1} H^1_{\mathrm{syn}}(\mathcal{O}_K, K(j)) \end{array} \tag{1.2}$$

が自然に得られる事を示した.

Motivic cohomology の場合と同様に，p-進 polylogarithm pol_p を

$$\mathrm{pol}_p = \mathrm{Res}_p^{-1}(\{1\})$$

で定義する．これに関して，以下の結果を得た．

定理 2 ([Ban1] Corollary 6.7). 記号を前述の通りとする． この時,

$$i_\omega^*(\mathrm{pol}_p) = (\ell_j^{(p)}(\omega))_j \in \prod_{j\geq 1} H^1_{\mathrm{syn}}(\mathcal{O}_K, K(j)).$$

pol_p の構成は，simplicial scheme を用いる事によってなされた染川 [Som] による構成を，係数付き syntomic cohomology を用いる事によって sheaf 論的に行ったものである．将来的に，係数付き rigid syntomic cohomology や syntomic regulator の

理論がより整備されれば，この2つの構成の同値性も一般論より証明されるはずである．

図式 (1.2) は結果として可換であるが，仮に可換である事が先に証明されれば 定理 2 は定理 1 の別証を与えた事になる．理論が整備されれば，図式 (1.2) の可換性は一般論から従うはずである．[Som] では実際に定理 1の別証が与えられている．この意味では [Som] の結果の方が強い．

係数付き rigid syntomic cohomology を用いた構成法を考える事の意義は，この cohomology 理論が非常に計算しやすい所にある．定理 2 は，係数付き rigid syntomic cohomology を用いて構成された p-進 polylogarithm が，[Som] の方法で構成された p-進 polylogarithm と，等分点では同じ値を取る事を主張している．これは，係数付き rigid syntomic cohomology の理論が良いもので，p-進 polylogarithm の計算を行うのに適していると思われるひとつの根拠である．

これに基づいて，[Ban3] では，係数付き rigid syntomic cohomology を用いて，楕円曲線に対して定義される polylogarithm の p-進版を構成し，さらに楕円曲線が $\mathbb{Q}$ 上定義され，かつ虚数乗法を持つ場合には，p-進楕円 polylogarithm の等分点での制限が，もとの楕円曲線の 1 変数 p-進 L-関数の特殊値を与えている事を証明した．即ち，$\mathbb{Q}$ 上定義された虚数乗法を持つ楕円曲線の場合にも，p-進 Beilinson "予想" の精神に沿った結果を得たわけである．

2. 係数付き SYNTOMIC COHOMOLOGY の理論

この章では，係数付き rigid syntomic cohomology を定義するのに必要な考察を述べる．思想的に重要なのは，rigid syntomic cohomology を Beilinson-Deligne cohomology の p-進類似として捕らえることである．この為，Beilinson-Deligne cohomology の理論を説明しながら，平行して rigid syntomic cohomology の理論を構築する．Beilinson-Deligne cohomology は [BZ] で詳しく紹介されている．

2.1. 混合 Hodge 構造. 前章で，Beilinson-Deligne cohomology は Hodge 理論を用いて定義すると述べた．Hodge 理論で基本となるのは，混合 Hodge 構造である．

定義 2.1. 混合 Hodge 構造とは，組 $(M_0, W_\bullet, F^\bullet)$ で，以下の性質を満たすものである．

(i) M_0 は有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間
(ii) $W_\bullet$ は weight filtration と呼ばれる M_0 の ascending filtration.
(iii) $F^\bullet$ は Hodge filtration と呼ばれる $M = M_0 \otimes \mathbb{C}$ の descending filtration.
(iv) $\mathrm{Gr}_n^W(M) = \mathrm{Gr}_n^W(M_0) \otimes \mathbb{C}$ に Hodge 分解が与えられる．即ち，各整数 n に対して

$$\mathrm{Gr}_n^W(M) = \bigoplus_{p+q=n} F^p \mathrm{Gr}_n^W(M) \cap \overline{F}^q \mathrm{Gr}_n^W(M)$$

と分解する．

混合 Hodge 構造全体がなす圏はアーベル圏である．この圏を MHS と記述する．

K を p-進体，K_0 を $K \cap \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$，$\sigma$ を K_0 の Frobenius 写像とする．混合 Hodge 構造全体がなす圏 MHS の p-進類似として，Fontaine の weakly admissible filtered Frobenius module の圏 MF_K^f を考える．

定義 2.2. 圏 MF_K^f の対象は，組 $(M_0, \varphi, F^\bullet)$ で，以下の性質を満たすものである．

(i) M_0 は有限次元 K_0-ベクトル空間．

(ii) φ は Frobenius と呼ばれる M_0 の σ-linear な automorphism. 即ち，

$$\varphi(am) = a^\sigma \varphi(m) \quad a \in K_0, m \in M_0$$

を満たす M_0 の自己同型写像．

(iii) $F^\bullet$ は Hodge filtration と呼ばれる $M = M_0 \otimes K$ の descending filtration.

(iv) さらに組 $(M_0, \varphi, F^\bullet)$ は weakly admissible ([Fon1] 4.1.4).

最後の条件は，混合 Hodge 構造の場合の Hodge 分解の存在同様，圏 MF_K^f がアーベル圏となる事を保証するものである．

2.2. **幾何的 cohomology 理論.** $\mathbb{C}$ 上定義された代数多様体 X に対して，混合 Hodge 構造が定義される事が知られている．ここでは，これを X の幾何的 cohomology と呼ぶことにする．この cohomology 理論の p-進類似を考える．この為，まず幾何的 cohomology の定義を復習する．

簡単の為に X を $\mathbb{C}$ 上 smooth な代数多様体とする．この時，de Rham の定理から，

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}) \cong H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

が知られている．ここで左辺は X の代数的 de Rham cohomology, 右辺は $X(\mathbb{C})$ の Betti cohomology $\otimes\mathbb{C}$ である．$H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ には weight filtration $W_\bullet$ が入り，$H^i_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})$ には Hodge filtration $F^\bullet$ が入る事が知られている． また，組

$$(H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}), W_\bullet, F^\bullet)$$

が MHS の元を与えている事は知られている．

定義 2.3. X の幾何的 cohomology 群

$$H^i(X) \in \mathrm{MHS}$$

を，組 $(H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}), W_\bullet, F^\bullet)$ によって与えられる混合 Hodge 構造と定義する．

次に K, K_0, σ を前節の通りにし，$\mathcal{O}_K$ を K の整数環，k を $\mathcal{O}_K$ の剰余体とする．また，$\mathfrak{X}$ を $\mathcal{O}_K$ 上 smooth で finite type な scheme で， projective smooth なコンパクトか $\overline{\mathfrak{X}}$ を持ち，complement D が $\mathcal{O}_K$ 上 relative な strict normal crossing divisor であると仮定する．

この時，Baldassarri-Chiarellotto [BC] の結果により，同型

$$H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_K/K) \cong H^i_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}_k/K_0) \otimes_{K_0} K$$

を得る．ここで左辺は $\mathfrak{X}_K = \mathfrak{X} \otimes K$ の de Rham cohomology 群，右辺は $\mathfrak{X}_k = \mathfrak{X} \otimes k$ の rigid cohomology 群である．

Rigid cohomology $H^i_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}_k/K_0)$ とは，k 上の finite type な代数多様体 $\mathfrak{X}_k$ に対して定義される K_0-ベクトル空間である． 特に $\mathfrak{X}_k$ が proper で smooth な場合には，$\mathfrak{X}_k$ の cristalline cohomology と同型になる． Rigid cohomology は，cristalline cohomology とは異なり， proper とは限らない smooth な代数多様体に対しても良い cohomology 理論になっている．Rigid cohomology の一般論は [Ber1] で紹介されている．

Rigid cohomology には cristalline cohomology と同様，Frobenius 写像と呼ばれる σ-linear な自己同型

$$\varphi : H^i_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}_k/K_0) \to H^i_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}_k/K_0)$$

が定義される．また，$\mathfrak{X}_K$ の de Rham cohomology $H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_K/K)$ には，$\mathbb{C}$ 上の場合と同様に Hodge filtration $F^\bullet$ が入る．これより，組 $(H^i_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}_k/K_0), \varphi, F^\bullet)$ は filtered Frobenius module である．

定義 2.4. 上記 $\mathfrak{X}$ に対して，組 $(H^i_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}_k/K_0), \varphi, F^\bullet)$ が weakly admissible なとき，p-進幾何的 cohomology

$$H^i_p(\mathfrak{X}) \in \mathrm{MF}^f_K$$

を，組 $(H^i_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}_k/K_0), \varphi, F^\bullet)$ によって与えられる weakly admissible filtered Frobenius module と定義する．

Remark 2.5. Cristalline 予想が立証された事から，$\mathfrak{X}$ が projective smooth な時は，これに対応する $(M_0, \varphi, F^\bullet)$ は weakly admissible である．

2.3. **Admissible variation 混合 Hodge 構造.** 次に，Beilinson-Deligne cohomology の係数として，代数多様体上に混合 Hodge 構造の admissible な族，即ち admissible variation of mixed Hodge structures を考える必要がある．まず X を $\mathbb{C}$ 上の smooth な代数多様体とする．

定義 2.6. X 上の admissible variation 混合 Hodge 構造とは，

(i) M_0 は $X(\mathbb{C})$ 上の $\mathbb{R}$-ベクトル空間の local system, M は X 上の integrable connection 付き coherent module で Riemann-Hilbert 対応を通して $M_0 \otimes \mathbb{C}$ と対応している．即ち，

$$M^{\nabla=0} = M_0 \otimes \mathbb{C}.$$

(ii) $W_\bullet$ は weight filtration と呼ばれる M_0 の ascending filtration.

(iii) $F^\bullet$ は Hodge filtration と呼ばれる M の descending filtration.

からなる組 $((M_0, W_\bullet), (M, F^\bullet))$ で，“良い”性質を満たすものである．Variation 混合 Hodge 構造全体がなす圏を VMHS(X) と記述する．

M_0 は Betti cohomology を族として考えたもの，M は de Rham cohomology を族として考えたものであり，Riemann-Hilbert 対応によって結ばれている．これに $W_\bullet$ や $F^\bullet$ などの付加構造が入り，この中で “良い”のもが VMHS(X) の元である．

これの p-進類似として，rigid cohomology を族として考えたものと de Rham cohomology を族として考えたものを何らかの対応で張り合わせ，そこに付加構造を入れたものを考えるのが自然である．Rigid cohomology を族として考えたものとして，isocrystal の圏が定義されている．また，自然な関手

$$\mathbf{p} : \begin{pmatrix} \text{Coherent } \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}\text{-module} \\ \text{with integrable connection} \\ \text{logarithmic along } D. \end{pmatrix} \to \big(\mathfrak{X}_k \text{ 上の isocrystal の圏}\big) \otimes_{K_0} K$$

が存在する．

定義 2.7. $\mathfrak{X}$ 上の admissible variation 混合 Hodge 構造の p-進類似として，

(i) M_0 は $\mathfrak{X}_k$ 上の isocrystal, M は $\overline{\mathfrak{X}}_K$ 上の integrable connection 付き coherent module で D 上 logarithmic pole を持つものとする．さらに M の $\mathbf{p}$ による像から $M_0 \otimes K$ へ同型写像

$$\mathbf{p}(M) \cong M_0 \otimes K$$

が与えられている．

(ii) $\mathfrak{X}_k$ 上の isocrystal $\phi^* M_0$ を，$\mathfrak{X}_k$ の絶対 Frobenius 写像 $\phi : \mathfrak{X}_k \to \mathfrak{X}_k$ による M_0 の引き戻しとして定義する．Φ は Frobenius と呼ばれる isocrystal の同型写像

$$\Phi : \phi^* M_0 \xrightarrow{\cong} M_0$$

である．

(iii) $F^\bullet$ は Hodge filtration と呼ばれる M の descending filtration.

からなる組 $((M_0, \Phi), (M, F^\bullet))$ で，“良い”性質を満たすもを考える．これらの対象がなす圏を $S^{\mathrm{ad}}(\mathfrak{X})$ と記述する．

上で定義された圏 $S^{\mathrm{ad}}(\mathfrak{X})$ が，admissible variation 混合 Hodge 構造の圏の p-進類似の役割を果たす．この圏の元を係数として，係数付き rigid syntomic cohomology を定義する．

2.4. **係数付き幾何的 cohomology.** $M \in \mathrm{VMHS}(X)$ が与えられたとき，これに対して混合 Hodge 構造が定義される．これをここでは，係数付き幾何的 cohomology と呼び，$H^i(X, M)$ と記す．特に M が自明な variation 混合 Hodge 構造 $\mathbb{R}(0)$ の時には，これは幾何的 cohomology $H^i(X)$ になる．

この p-進類似を考える．$M = ((M_0, \Phi), (M, F^\bullet))$ を $S^{\mathrm{ad}}(\mathfrak{X})$ の元とする．この時，関手 $\mathbf{p}$ は，写像

$$\theta : H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_K/K, M) \to H^i_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}_k/K_0, M_0) \otimes K$$

を導く．ここで，$H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_K/K, M)$ は $(M, F^\bullet)$ に係数を持つ X_K の de Rham cohomology で Hodge filtration $F^\bullet$ を持つ．また，$H^i_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}_k/K_0, M_0)$ は (M_0, Φ) に係数を持つ rigid cohomology で，Frobenius φ の作用を持つ．

圏 $S^{\mathrm{ad}}(\mathfrak{X})$ の “良い”の定義の中に，θ が同型である事も入っている．これより，組 $(H^i_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}_k/K_0, M_0), \varphi, F^\bullet)$ は filtered Frobenius module となる．M が “良い” ものである事から，$(H^i_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}_k/K_0, M_0), \varphi, F^\bullet)$ は weakly admissible である．

定義 2.8. 上記 $\mathfrak{X}$ と $M = ((M_0, \Phi), (M, F^\bullet))$ に対して，係数付き p-進幾何的 cohomology

$$H^i_p(\mathfrak{X}, M) \in \mathrm{MF}^f_K$$

を，$(H^i_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}_k/K_0, M_0), \varphi, F^\bullet)$ によって与えられる weakly admissible filtered Frobenius module として定義する．

特に M が $S^{\mathrm{ad}}(\mathfrak{X})$ の自明な対象の場合は，前に定義した p-進幾何的 cohomology と一致する．

2.5. **Beilinson-Deligne cohomology.** 良い sheaf の理論は Grothendieck の 6 つの functor

$$f_*, f^*, f_!, f^!, \underline{\otimes}, \mathcal{H}\mathrm{om}$$

で閉じていなければならない．しかし，VMHS(X) はこの性質を満たしていない．この為，VMHS(X) を含み，さらに Grothendieck の 6 つの functor で閉じている mixed Hodge module の圏 MHM(X) が斎藤盛彦によって定義された ([Sai1], [Sai2]).

特に MHM(Spec $\mathbb{C}$) = MHS である．$f : X \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ を構造射とし，D^b(MHS) を圏 MHS の導来圏とすると，$M \in$ VMHS(X) に対して，$Rf_*M \in D^b$(MHS) である．M の係数付き幾何的 cohomology は

$$H^i(X, M) = H^i(Rf_*M) \tag{2.1}$$

で与えられる．

定義 2.9. M を VMHS(X) の元とする．M 係数の Beilinson-Deligne cohomology を

$$H^i_{\mathscr{D}}(X, M) = \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{MHM}(X)}(\mathbb{R}(0), M)$$

として定義する．ここで $\mathbb{R}(0)$ は X 上の自明な variation of mixed Hodge structures である．

仮に mixed Hodge module の圏の p-進類似 $\mathrm{MHM}_p(\mathfrak{X})$ が定義されたとすれば，$M \in S^{\mathrm{ad}}(\mathfrak{X})$ に対して，係数付き rigid syntomic cohomology を

$$H^i_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}, M) = \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{MHM}_p(\mathfrak{X})}(K(0), M)$$

と定義すれば良い．しかし残念ながら，今のところ，$\mathrm{MHM}_p(\mathfrak{X})$ は定義されていない．

しかし，もし仮に圏 $\mathrm{MHM}_p(\mathfrak{X})$ が定義されていたとすると，構造射を $f : \mathfrak{X} \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ としたとき，f^* と f_* の随伴性から，

$$\begin{aligned} H^i_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}, M) &= \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{MHM}_p(\mathfrak{X})}(K(0), M) \\ &= \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{MHM}_p(\mathcal{O}_K)}(K(0), Rf_*M) \end{aligned}$$

を得る．また，MHM(Spec $\mathbb{C}$) = MHS となる事から，$\mathrm{MHM}_p(\mathcal{O}_K) = \mathrm{MF}^f_K$ と推測すると，

$$H^i_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}, M) = \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{MF}^f_K}(K(0), Rf_*M)$$

を得る．

係数付き rigid syntomic cohomology を定義する為には，$D^b(\mathrm{MF}^f_K)$ を MF^f_K の導来圏としたとき，

$$Rf_*M \in D^b(\mathrm{MF}^f_K)$$

の役割をする complex を構成すれば良い．(2.1) の類似から，この complex は

$$H^i(Rf_*M) = H^i_p(\mathfrak{X}, M) \tag{2.2}$$

を満たすはずである．即ち，係数付き rigid syntomic cohomology を定義するには，(2.2) を満たす $D^b(\mathrm{MF}^f_K)$ の complex を functorial に構成すれば良い．

2.6. **Rigid syntomic cohomology.** 現在， rigid syntomic cohomology が定義されているのは以下の場合である．

1. [Ban2] では，係数 M が Tate object $K(j)$ の場合に(2.2) を満たす complex $Rf_*K(j)$ を定義し，rigid syntomic cohomology を
$$H^i_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}, K(j)) = \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{MF}^f_K}(K(0), Rf_*K(j))$$
として定義した．また，この cohomology が Amnon Besser [Bes] によって定義された rigid syntomic cohomology $H^i(\mathfrak{X}, j)$ と同型になる事を証明し，実際に上の定義が意味のある群を導き出す事を証明した．
2. [Ban1] では，$K = K_0$ の場合に，一般の $M \in S^{\mathrm{ad}}(\mathfrak{X})$ に対して (2.2) を満たす complex Rf_*M を定義し，これを用いて rigid syntomic cohomology を定義した．(実際には，rigid syntomic cohomology を cone を用いて定義しているが，[Ban2] の結果を用いると，Ext 群と同型になる事がわかる)．$M = K(j)$ のときには，上の定義と一致する．

前章の polylogarithm の計算は $K = K_0$ の場合で十分である．定理 2 の証明は，上の 2 の理論を用いて行った．

3. 係数付き RIGID SYNTOMIC COHOMOLOGY の性質

最後に，$K = K_0$ の場合に，係数付き rigid syntomic cohomology の基本的な性質を述べる．$\mathfrak{X}$ は前章の通りとする．

Beilinson-Deligne cohomology と同様に，以下の完全系列が存在する．

Proposition 3.1 (= [Ban1] Lemma 2.6). $M = ((M_0, \Phi), (M, F^\bullet)) \in S^{\mathrm{ad}}(\mathfrak{X})$ とする．この時，完全系列
$$\cdots \to F^0 H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_K/K, M) \to H^i_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}_k/K, M_0) \to H^{i+1}_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}, M) \to \cdots$$
が存在する．

また，rigid syntomic cohomology の定義から，以下の spectral 系列が導かれる．

Proposition 3.2. $M \in S^{\mathrm{ad}}(\mathfrak{X})$ とする．この時，spectral 系列
$$E_2^{i,j} = H^i_{\mathrm{syn}}(\mathcal{O}_K, H^j_p(\mathfrak{X}, M)) \Rightarrow H^{i+j}_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}, M)$$
が存在する．

圏 MF^f_K では Ext^i が $i \geq 2$ で消える事が知られているので，上の spectral 系列は E_2 で退化し，次の完全系列を与える．

Corollary 3.3 (= [Ban1] Lemma 2.7). $M \in S^{\mathrm{ad}}(\mathfrak{X})$ とする． この時，完全系列
$$0 \to H^1_{\mathrm{syn}}(\mathcal{O}_K, H^i_p(\mathfrak{X}, M)) \to H^i_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}, M) \to H^0_{\mathrm{syn}}(\mathcal{O}_K, H^{i+1}_p(\mathfrak{X}, M)) \to 0$$
が存在する．

Polylogarithm の計算には以下の定理が重要である．

定理 3 (= [Ban1] Theorem 1). $M \in S^{\mathrm{ad}}(\mathfrak{X})$ とする．この時，標準的な同型

$$H^1_{\mathrm{syn}}(\mathfrak{X}, M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ext}^1_{S(\mathfrak{X})}(K(0), M)$$

が存在する．ここで，$S(\mathfrak{X})$ は $S^{\mathrm{ad}}(\mathfrak{X})$ を部分圏として持つもので，$S^{\mathrm{ad}}(\mathfrak{X})$ と比べて多少条件を弱めたものである．

この定理を用いる事によって，最初の章の $\mathrm{pol}_p \in H^1_{\mathrm{syn}}(\mathbb{U}, \mathcal{L}og)$ を $S(\mathbb{U})$ の元と解釈する事ができる．実際計算すると，杉本 [Sug] が Faltings の圏 $\mathrm{MF}^{\nabla}_{[0,p-1]}$ に定義した polylogarithm sheaf と似た物が導かれる．定理 2 の証明は，この表示を用いる事によって行われた．

References

[BC] *F. Baldassarri, B. Chiarellotto*, Algebraic versus rigid cohomology with logarithmic coefficients, in: V. Cristante, W. Messing (eds.), Barsotti Symposium in Algebraic Geometry, Perspectives in Math. **15**, Academic Press (1994).

[Ban1] *K. Bannai*, Rigid syntomic cohomology and p-adic polylogarithms, Preprint series **UTMS** 2000-9, University of Tokyo (2000).

[Ban2] *K. Bannai*, Syntomic cohomology as a p-adic absolute Hodge cohomology, preprint (2000).

[Ban3] *K. Bannai*, On the p-adic elliptic polylogarithm for CM-elliptic curves, 博士論文, 東京大学 (2000).

[Bei1] *A.A. Beilinson*, Higher regulators and values of L-functions, J. Sov. Math. **30** (1985), pp. 2036-2070.

[Bei2] *A.A. Beilinson*, Polylogarithm and Cyclotomic Elements, typewritten preprint, MIT (1989) or (1990).

[Ber1] *P. Berthelot*, Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de charactéristique p, Journées d'analyse p-adique (1982), in Introduction aux cohomologie p-adiques, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **23** (1986), 7-32.

[Ber2] *P. Berthelot*, Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres, Première partie, Prépublication IRMAR **96-03**, Université de Rennes (1996).

[Ber3] *P. Berthelot*, Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide, Invent. math. **128** (1997), 329-377.

[Bes] *A. Besser*, Syntomic Regulators and p-adic Integration I: Rigid Syntomic Regulators, to appear in Israel. J. Math.

[BZ] *J.-L. Brylinski, S. Zucker*, An Overview of Recent Advances in Hodge Theory. In: Barth, Narasimhan, Several Complex Variables VI, Encycl. of Math. Sciences **69**, Springer-Verlag 1990.

[Col] *R. Coleman*, Dilogarithms, Regulators and p-adic L-functions, Invent. math. **69** (1982), 171-208.

[Del] *P. Deligne*, Théorie de Hodge II, Publ. Math. IHES **40** (1972), 5-57.

[Fon1] *J.-M. Fontaine*, Modules Galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, Astérisque **65** (1979), 3-80.

[Fon2] *J.-M. Fontaine*, Exposé III: Représentations p-adiques semi-stables, Astérisque **223** (1994), 113-184.

[GK] *M. Gros*, Régulateurs syntomiques et valeurs de fonctions L p-adiques I (avec un appendice par Masato Kurihara), Invent. Math. **99** (1990), 293-320.

[G] *M. Gros*, Régulateurs syntomiques et valeurs de fonctions L p-adiques II, Invent. Math. **115** (1994), 61-79.

[HW1] *A. Huber, J. Wildeshaus*, The Classical Polylogarithm, Abstract of a series of lectures given at a workshop on polylogs in Essen, May 1-4, (1997).

[HW2] *A. Huber, J. Wildeshaus*, Classical Motivic Polylogarithms according to Beilinson and Deligne, Doc. Math. **3** (1998), 27-133.

[Sai1] *M. Saito*, Modules de Hodge Polarisable, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **24** (1988), pp. 849-995.

[Sai2] *M. Saito*, Mixed Hodge Modules, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **26** (1990), pp. 221-333.

[Sch] *P. Schneider*, Introduction to the Beilinson conjectures. In: Rapaport, Schappacher, Schneider (eds.) Beilinsion's conjectures on special values of L-functions, Perspectives in Math., Vol. **4**, Boston-New York : Academic Press (1988).

[Som] *M. Somekawa*, Log-syntomic regulators and p-adic polylogarithm, K-Theory **17** (1999), 256-294.

[Sug] *S. Sugimoto*, Filtered modules and p-adic polylogarithms, 博士論文, 東京大学 (1992).

[Wil] *J. Wildeshaus*, Realizations of Polylogarithms, SLN **1650** (1997).