数理解析研究所講究録
1155 巻 2000 年 143-148

多次元逆散乱理論について

大阪大学大学院理学研究科　磯崎　洋　Isozaki Hiroshi

多次元の逆散乱理論を簡単に紹介する．中心になるのは Faddeev の理論の解説である．雑誌「数学」にのせた解説記事と重複するところもかなりあるので，そちらも参照されたい．

1　S 行列とは何か

波動の散乱現象を記述する基本的手段が S 行列である．Schrödinger 作用素を例にとるとつぎのようになる．$H_0=-\triangle, H=H_0+V(x)$ を考える．空間次元は例えば3としよう．$V(x)$ は実数値関数で簡単のために有界連続かつ $|x|\to\infty$ で十分はやく 0 に近づくものを考えよう．遠方からある標的に粒子を衝突させ，散乱する様子を調べてこの標的の性質を知ろうとするのが逆散乱問題である．無限遠方からやってくる粒子は最初は $e^{-itH_0}\psi_-$ という形に表わされると考えてよいであろう．これが標的の影響を受けて $e^{-itH}\psi$ という波動関数になる．やがて標的から遠くに飛び去れば $e^{-itH_0}\psi_+$ という波動関数になるであろう．作用素 $S:\psi_-\to\psi_+$ を散乱作用素という．$\psi_\pm$ は Fourier 変換 $\mathcal{F}f(\xi)=(2\pi)^{-3/2}\int e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx$ を用いてかくと分かり易い．$|\xi|=\sqrt{E}$ とおけば

$$\psi_+(\sqrt{E}\theta)=\psi_-(\sqrt{E}\theta)-\int_{S^2}A(E,\theta,\theta')\psi_-(\sqrt{E}\theta')d\theta'$$

となる．$\psi_-(\sqrt{E}\cdot)$ を $\psi_+(\sqrt{E}\cdot)$ に対応させる作用素を S 行列という．これは $L^2(S^2)$ 上のユニタリー作用素である．$A(E,\theta,\theta')$ を散乱振幅という．$|A(E,\theta,\theta')|^2$ はエネルギー $E>0$ をもって θ' 方向から入射した粒子が θ 方向に散乱される割合を表わす．これは実験から定まる量である．散乱の逆問題とは

$A(E,\theta,\theta')$ からポテンシアル $V(x)$ を求めよ

という問題である．

2　グリーン関数をとりかえるとどうなるか？

以下 $\mathbf{R}^n$ で考える．自己共役作用素 $-\triangle+V(x)$ のレゾルベントを $R(z)=(-\triangle+V-z)^{-1}$ とおく．$s\in\mathbf{R}$ に対して

$$u\in L^{2,s}\Longleftrightarrow\|u\|_s^2=\int_{\mathbf{R}^n}(1+|x|)^{2s}|u(x)|^2dx<\infty$$

とすれば$s > 1/2, E > 0$のとき$L^{2,s}$から$L^{2,-s}$への作用素として極限$\lim_{\epsilon\to 0} R(E\pm i0) =: R(E\pm i0)$が存在することが分かっている．散乱振幅 A は エネルギー $E > 0$ に依存する定数倍を除いて

$$A(E,\theta,\theta') = \int e^{-i\sqrt{E}(\theta-\theta')\cdot x} V(x)dx - \int e^{-i\sqrt{E}\theta x} V(x) R(E+i0)(V(\cdot)e^{i\sqrt{E}\cdot})dx$$

と書ける．$R_0(z) = (-\triangle - z)^{-1}$ とおけば $R(E+i0) = (1+R_0(E+i0)V)^{-1}R_0(E+i0)$ とかけるから $A(E,\theta,\theta')$ はポテンシアル $V(x)$ と $-\triangle$ のグリーン作用素 $R_0(E+i0)$ を用いてかかれている．

ところでラプラシアンのグリーン作用素は無数にある．そこで上の散乱振幅の表現式でグリーン作用素を他のものにとりかえてみることを考えよう．このとき別のグリーン作用素を用いた散乱振幅と元のグリーン作用素を用いた散乱振幅の間には簡単な線形方程式が成立するのである．これは一般的に成り立つことだが以下では今の場合に限って説明しよう．

$s > 1/2, E > 0$ を固定する．$H_0 = -\triangle$ とし $\mathcal{H}_\pm = L^{2,\pm s}$ とおく．$G^{(0)} \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_+;\mathcal{H}_-)$ が $H_0 - E$ のグリーン作用素であるとは

$$(H_0 - E)G^{(0)} = 1 \quad \text{on} \quad \mathcal{H}_+$$

が成り立つこととする．

$$(\mathcal{F}_0(E)u)(\theta) = (2\pi)^{-n/2}2^{-1/2}E^{(n-2)/4}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\sqrt{E}\theta\cdot x}u(x)dx$$

とおく．$\mathcal{F}_0(E) \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_+; L^2(S^{n-1}))$ である．

$G_1^{(0)}, G_2^{(0)}$ を同じ E に対する 2 つのグリーン作用素とする．$G_1^{(0)}, G_2^{(0)}$ が条件 (C) をみたすとはある $M \in \mathbf{B}(L^2(S^{n-1}); L^2(S^{n-1}))$ に対して

$$G_2^{(0)} - G_1^{(0)} = \mathcal{F}_0(E)^* M \mathcal{F}_0(E)$$

が成り立つこととする．

$H = H_0 + V,\ V \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_-;\mathcal{H}_+)$ とする．$G^{(0)}$ を $H_0 - E$ のグリーン作用素とする．$G \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_-;\mathcal{H}_+)$ が $G^{(0)}$ に対応する H のグリーン作用素であるとは

$$G = G^{(0)} - G^{(0)}VG = G^{(0)} - GVG^{(0)}$$

がなりたつこととする．

$$A = \mathcal{F}_0(E)(V - VGV)\mathcal{F}_0(E)^*$$

を G に付随する散乱振幅と呼ぼう．

$G_1^{(0)}, G_2^{(0)}$ を $H_0 - E$ に対する 2 つのグリーン作用素とし G_1, G_2 を対応する H のグリーン作用素とする．A_1, A_2 を G_1, G_2 に付随する 2 つの散乱振幅とする．このとき

定理　条件 (C) のもとで

$$A_2 = A_1 - A_1 M A_2$$

が成り立つ．さらに

$$\text{仮定} \qquad G_1^{(0)}V, G_2^{(0)}V \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_-;\mathcal{H}_-) \text{ は } compact$$

を加えれば G_1, G_2 が存在するという条件のもとで上の方程式は常に解くことができ

$$A_2 = (1 + A_1 M)^{-1} A_1$$

となる．

このようなアイディアは実は量子電気力学における Feynman の propagator や Feynman の散乱振幅に深い関係がある．

3　ファデーエフのグリーン関数とはどのようなものか？

Faddeev のグリーン作用素は次のように定義される．$\gamma \in S^{n-1}$ を任意に固定する．$\lambda > 0$ と $z \in \mathbf{C}_+ = \{\mathrm{Im} z > 0\}$ に対して

$$G_{\gamma,0}(\lambda, z) f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{e^{ix\cdot\xi}}{\xi^2 + 2z\gamma\cdot\xi - \lambda^2} \hat{f}(\xi) d\xi$$

とおく．

定理 $s > 1/2$ とする．

(1)　$B(L^{2,s}; L^{2,-s})$ 値関数として $G_{\gamma,0}(\lambda, z)$ は $(\lambda, z) = (0, 0)$ を除いて $\lambda \geq 0, \gamma \in S^{n-1}, z \in \overline{\mathbf{C}}_+$ に関して連続である．

(2)　$G_{\gamma,0}(\lambda, z)$ は $z \in \mathbf{C}_+$ に関して解析的である．

(3)　任意の $\epsilon_0 > 0$ に対して定数 $C > 0$ が存在し

$$\|G_{\gamma,0}(\lambda, z)\|_{\mathbf{B}(L^{2,s};L^{2,-s})} \leq C(\lambda + |z|)^{-1}$$

が $\lambda + |z| \geq \epsilon_0$ に対して成り立つ．

(4)　$t \in \mathbf{R}$ に対して $\widetilde{R}_{\gamma,0}(\lambda, t) = e^{it\gamma\cdot x} G_{\gamma.0}(\lambda, t) e^{-it\gamma\cdot x}$ とおけば

$$(-\triangle - \lambda^2 - t^2)\widetilde{R}_{\gamma,0}(\lambda, t) = 1$$

が成り立つ．

Faddeev のグリーン作用素の重要な性質は解析性と次の等式である.

$$\widetilde{R}_{\gamma,0}(\lambda,t)=R_0(E-i0)M_\gamma^{(+)}(t)+R_0(E+i0)M_\gamma^{(-)}(t)$$

ここで $E=\lambda^2+t^2$ であり,

$$M_\gamma^{(\pm)}(t)=(\mathcal{F}_{x\to\xi})^{-1}F(\pm\gamma\cdot(\xi-t\gamma)\geq 0)\mathcal{F}_{x\to\xi}$$

また $F(\cdots)$ は集合 $\{\cdots\}$ の特性関数である.

$G_{\gamma.0}(\lambda,t)$ は形式的には次のような積分核をもっている.

$$(2\pi)^{-n/2}\int\frac{e^{i(x-y)\cdot\xi}}{\xi^2+2(t+i0)\gamma\cdot\xi+t^2-E}d\xi.$$

この積分核の t に関する解析接続をもとめればそれはエネルギーを固定したときの逆問題に有効である. 一見したところそれは

$$(2\pi)^{-n/2}\int\frac{e^{i(x-y)\cdot\xi}}{\xi^2+2z\gamma\cdot\xi+z^2-E}d\xi$$

で与えられるような気がするがこれは z に関して解析的ではない. Faddeev のグリーン関数はあまり形式的に取り扱ってはいけない. 正しい解析接続は Eskin-Ralston によって与えられたがここではその構成は省略する.

4 解析性はどのように用いられるか？

散乱振幅を $A(E)=\mathcal{F}_0(E)(V-VR(E+i0)V)\mathcal{F}_0(E)^*$ とする. $U_{\gamma,0}(E,t)$ を Eskin-Ralston のグリーン作用素とし $R_{\gamma,0}(E,t)=e^{it\gamma\cdot x}U_{\gamma,0}(E,t)e^{-it\gamma\cdot x}$ とおく. 摂動されたグリーン作用素を

$$R_\gamma(E,t)=(1+R_{\gamma,0}(E,t)V)^{-1}R_{\gamma,0}(E,t)$$

によって定義する. Faddeev の散乱振幅は

$$A_\gamma(E,t)=\mathcal{F}_0(E)(V-VR_\gamma(E,t)V)\mathcal{F}_0(E)^*$$

で定義される. このとき方程式

$$A_\gamma(E,t)=A(E)+2\pi iA(E)F_\gamma(t)A_\gamma(E,t),$$

$$F_\gamma(t)=F(\gamma\cdot\theta\geq\frac{t}{\sqrt{E}})$$

が成立し, またこの方程式は測度 0 の t を除いて常に解ける.

逆問題を考えるには $A_\gamma(E,t)$ の積分核 $A_\gamma(E,t;\theta,\theta')$ に注目する．$\omega,\omega' \in S^{n-1}$ を γ に直交するようにとればその積分核は

$$\int e^{-i\sqrt{E-t^2}(\omega-\omega')\cdot x}V(x)dx - \int e^{-i\sqrt{E-t^2}\omega\cdot x}V(x)U_\gamma(E,t)(V(\cdot)e^{i\sqrt{E-t^2}\omega'\cdot})dx$$

$U_\gamma(E,t)=(1+U_{\gamma,0}(E,t)V)^{-1}U_{\gamma,0}(E,t)$ となる．この式は t に関して上半平面に解析接続でき虚軸上の挙動から $V(x)$ が再構成される．

上の式で t を $i\tau$ にし $\eta=\sqrt{E+\tau^2}\omega, \eta'=\sqrt{E+\tau^2}\omega'$ とおく．さらに $\zeta=\eta'+i\tau\gamma, \xi=\eta-\eta'$ とおいた式を $T(\xi,\zeta)$ と書くことにする．このとき $\xi^2+2\zeta\cdot\xi=0$ が成立するからつぎのような集合を考えよう．

$$\mathcal{V}_\xi = \{\zeta \in \mathbf{C}; \zeta^2=E, |\zeta|>C, \mathrm{Im}\,\zeta \neq 0, \xi^2+2\zeta\cdot\xi=0\}$$

集合 $\{(\xi,\zeta);\zeta\in\mathcal{V}_\xi\}$ は Fibered space の構造をもっている．さらに各ファイバー $\mathcal{V}_\xi$ は $2n-4$ 次元の複素多様体である．この複素多様体上で次のような $\overline{\partial}$ 方程式が成立する．

$$\overline{\partial}T(\xi,\zeta)=\sum_{j=1}^{n}A_j(\xi,\zeta)d\overline{\zeta_j},$$

$$A_j(\xi,\zeta) = -(2\pi)^{1-2n}\int_{\mathbf{R}^n}T(\xi-\eta,\zeta+\eta)T(\eta,\zeta)\eta_j\delta(\eta^2+2\zeta\cdot\eta)d\eta].$$

この $\overline{\partial}$-方程式には興味深い応用がある．Nachman は複素多様体上での Bochner-Martinelli の公式に上の方程式を用いて $V(x)$ を $T(\xi,\zeta)$ で表わす表現式を作った．

Henkin-Novikof はこの $\overline{\partial}$-方程式が Faddeev の散乱振幅を特徴づけるものであることを示した．

5 少し一般的な枠組みを考える

Faddeev のグリーン作用素や Eskin-Ralston のグリーン作用素を他の場合にも構成できれば逆問題の適用範囲が大きく広がる．そのための手段として交換子の方法がある．これは Schrödinger 方程式の多体問題の研究の中で発展してきたものであるが最近多くの問題で用いられている．

この方法の利点としては, 作用素の交換関係という代数的な関係のみを使うことから, ある程度の一般的な枠組みが可能になることがあげられる．例として

(i) 層状媒質の中での波動方程式

(ii) 一様な電場の中での Schrödinger 作用素

(iii) 半空間における波動方程式

などがあげられる．逆問題を解くためにはさらにこれらの作用素のスペクトル表示を求める必要がある．それは作用素のスペクトル解析の長い研究の中で蓄積されてきた知識である．

6 参考文献

[1] 磯崎　洋, 量子力学的散乱理論における逆問題, 数学　第 50 巻　第 2 号 (1998), 163-180.

[2] L.D.Faddeev, Inverse problem of quantum scattering theory, *J. Sov. Math.* 5 (1976), 334-396.

[3] A.Nachman, Reconstruction from boundary measurements, *Ann. Math.* 128 (1988), 531-576.

[4] R.G.Novikov and G.M.Henkin, The $\overline{\partial}$- equation in the multi-dimensional inverse scattering problem, *Russian Math. Surveys* 42 (1987), 109-180.