数理解析研究所講究録
1156巻 2000年 1-10

ファインマン経路積分と群の表現

名城大理工　岡本清郷 (Kiyosato Okamoto)

1. ハイゼンベルグの交換関係式とシュレディンガー方程式

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の点を (q_1,q_2,q_3) で表し，相空間 $\mathbf{R}^6$ の点を $(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3)$（厳密には $\mathbf{R}^3$ の余接バンドル $T^*(\mathbf{R}^3)$ を考え元 $p_1dq_1+p_2dq_2+p_3dq_3$ に $(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3)$ を対応させる）で表す.

ハイゼンベルグは q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3 に無限次の行列（厳密にはヒルベルト空間上の自己共役作用素）$\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2,\mathbf{Q}_3,\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\mathbf{P}_3$ を対応させ，それらが交換関係式

$$[\mathbf{Q}_i,\mathbf{Q}_j]=0,\quad [\mathbf{P}_i,\mathbf{P}_j]=0,\quad [\mathbf{Q}_i,\mathbf{P}_j]=\sqrt{-1}\hbar\delta_{ij}\mathbf{I}$$

（ただし，$\hbar$ はプランクの定数を 2π で割ったもの）
を満たすと仮定し，不確定性原理を導いた.

一方，シュレディンガーは「ヒルベルト空間」（実際には関数空間 $L^2(\mathbf{R}^3)$）を考え「量子力学系の時間的発展は方程式

$$\sqrt{-1}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\mathbf{H}\psi \qquad (\mathbf{H}\text{はハミルトニアン})$$

に従う状態関数 ψ の時間的変動によって記述される.」と主張した.

ハイゼンベルグの交換関係式とシュレディンガー方程式は表現論により，次のように結ばれる.

$\boxed{\text{ハイゼンベルグの交換関係式}}$ （リー環の表現） $\Longrightarrow$ （リー群の表現） $\boxed{\text{シュレディンガー方程式の解}}$

2. ハイゼンベルグの交換関係式とハイゼンベルグリー環の表現

線形リー群

$$G=\left\{\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n & c \\ & 1 & & \mathbf{0} & b_1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{0} & & 1 & b_n \\ & & & & 1 \end{pmatrix};\ a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n,c\in\mathbf{R}\right\}$$

はハイゼンベルグ群と呼ばれ，そのリー環は

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n & c \\ & 0 & & \text{\Large 0} & b_1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & \text{\Large 0} & & 0 & b_n \\ & & & & 0 \end{pmatrix} ; a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n, c \in \mathbf{R} \right\}$$

で与えられる.
ただし，リー環のブラケット積は $[X, Y] = XY - YX$ と定義する.

以下，$n = 3$ つまり空間次元が 3 次元の場合を考える. このとき，G を単にハイゼンベルグ群と呼ぶことにする.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$[X_i, X_j] = 0, \quad [Y_i, Y_j] = 0, \quad [X_i, Y_j] = \delta_{ij} Z$$

が成り立つから，対応

$$X_i \mapsto -\frac{\sqrt{-1}}{\hbar}\mathbf{Q}_i, \quad Y_j \mapsto -\frac{\sqrt{-1}}{\hbar}\mathbf{P}_j, \quad Z \mapsto -\frac{\sqrt{-1}}{\hbar} I$$

はリー環の表現となる.

実際、この対応を ρ とするとき

$$\begin{aligned} [\rho(X_i), \rho(Y_j)] &= [-\frac{\sqrt{-1}}{\hbar}\mathbf{Q}_i, -\frac{\sqrt{-1}}{\hbar}\mathbf{P}_j] = -\frac{1}{\hbar^2}[\mathbf{Q}_i, \mathbf{P}_j] \\ &= -\frac{1}{\hbar^2}\sqrt{-1}\hbar\delta_{ij} I = -\frac{\sqrt{-1}}{\hbar}\delta_{ij} I = \rho(\delta_{ij} Z) = \rho([X_i, Y_j]). \end{aligned}$$

3. シュレディンガー方程式とハイゼンベルグ群の表現

「ハイゼンベルグ群の既約ユニタリ表現をすべて求めよ.」という問題が提起され，フォン・ノイマンによって完全に解かれた.

ハイゼンベルグ群の既約ユニタリ表現は1次元表現（つまりユニタリ指標）を除き，すべて無限次元で次の定理により得られる.

【フォン・ノイマンの定理】

G をハイゼンベルグ群とし，零でない実数 σ を一つ固定する.

任意の $g = \exp\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$ に対して，

$a = (a_1, a_2, a_3)$,　$b = (b_1, b_2, b_3)$ とおき

$$(U_\sigma(g)F)(q) = e^{-\sqrt{-1}\sigma((a,q)-\frac{(a,b)}{2}+c)}F(q-b) \quad (F \in L^2(\mathbf{R}^3))$$

と定義すると，U_σ は G の $L^2(\mathbf{R}^3)$ 上の既約ユニタリ表現となる.

σ が異なる表現は同値でなく，すべての無限次元既約ユニタリ表現はこのようにして得られる.

さて，正準量子化 $q_i \mapsto \mathbf{Q}_i$（q_i をかける作用素），$p_i \mapsto \mathbf{P}_i = -\sqrt{-1}\hbar\frac{\partial}{\partial q_i}$ に対し，$\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$,　$\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$,　$\mathbf{e}_2 = (0,0,1)$ とおくとき

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{-1}t\mathbf{Q}_i/\hbar}\psi(q) &= e^{-\sqrt{-1}tq_i/\hbar}\psi(q), \\ e^{-\sqrt{-1}t\mathbf{P}_i/\hbar}\psi(q) &= \psi(q - t\mathbf{e}_i) \end{aligned}$$

であることが容易に確かめられる.

しかしながら，$e^{-\sqrt{-1}t(a_1\mathbf{Q}_1+a_2\mathbf{Q}_2+a_3\mathbf{Q}_3+b_1\mathbf{P}_1+b_2\mathbf{P}_2+b_3\mathbf{P}_3+c\mathbf{I})/\hbar}$ は $\mathbf{Q}_i$ と $\mathbf{P}_i$ が非可換であるために「作用素の順序」が問題となり，単に個々の作用素の積では得られない.

$\sigma = \frac{1}{\hbar}$ とおくと，任意の $X = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}\hbar\left[\frac{d}{dt}U_\sigma(\exp tX)\right]_{t=0} &= (a,q) + c - \sqrt{-1}\hbar(b_1\frac{\partial}{\partial q_1} + b_2\frac{\partial}{\partial q_2} + b_3\frac{\partial}{\partial q_3}) \\ &= a_1\mathbf{Q}_1 + a_2\mathbf{Q}_2 + a_3\mathbf{Q}_3 + b_1\mathbf{P}_1 + b_2\mathbf{P}_2 + b_3\mathbf{P}_3 + c\mathbf{I} \end{aligned}$$

であるから，U_σ がユニタリ表現であることより

$$
\begin{aligned}
&e^{-\sqrt{-1}t(a_1\mathbf{Q}_1+a_2\mathbf{Q}_2+a_3\mathbf{Q}_3+b_1\mathbf{P}_1+b_2\mathbf{P}_2+b_3\mathbf{P}_3+c\mathbf{I})/\hbar}\psi(q)\\
&=\exp\left\{-\frac{\sqrt{-1}}{\hbar}\left((a,q)t-\frac{(a,b)t^2}{2}+ct\right)\right\}\psi(q-bt)
\end{aligned}
$$

であることが分かる．

【注意】

U_σ がユニタリ表現であることより

$$[U_\sigma(\exp tX)]_{t=0}=I$$

および

$$U_\sigma(\exp((t_1+t_2)X))=U_\sigma(\exp t_1X\exp t_2X)=U_\sigma(\exp t_1X)U_\sigma(\exp t_2X)$$

が成り立つ．

故に，$U_\sigma(\exp tX)$ はユニタリ作用素の半群（実際は，1パラメータ群）である．

4. シンプレクティック等質空間に関するコスタント理論

コスタント理論は一般のリー群で成り立つが，簡単のため $n=1$ のハイゼンベルグ群 G の場合に述べる．

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix};a,b,c\in\mathbf{R}\right\}$$

で，そのリー環は

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix};a,b,c\in\mathbf{R}\right\}$$

である．

任意の $g\in G$ に対し

$$\mathrm{Ad}(g)X=gXg^{-1}\quad(X\in\mathfrak{g})$$

と定義すると，Ad は G の $\mathfrak{g}$ 上の表現となる．これを随伴表現と呼ぶ．

$\mathfrak{g}$ の双対空間を $\mathfrak{g}^*$ で表し，任意の $g\in G$ に対し

$$(\mathrm{Ad}^*(g)\lambda)(X)=\lambda(\mathrm{Ad}(g^{-1})X)\quad(\lambda\in\mathfrak{g}^*,X\in\mathfrak{g})$$

とおくと，Ad^* は G の $\mathfrak{g}^*$ 上の作用を定義する．これを余随伴作用という．

任意の実数 σ を一つ固定し

$$\lambda_\sigma : \mathfrak{g} \ni \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \sigma c \in \mathbf{R}$$

により $\mathfrak{g}^*$ の元 λ_σ を定義すると，余随伴作用の軌道のうち 0 次元でないものは或る 0 でない σ が存在して，λ_σ の G 軌道となる．このとき，λ_σ の固定部分群は

$$G_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbf{R} \right\}$$

となり，そのリー環は

$$\mathfrak{g}_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad c \in \mathbf{R} \right\}$$

である．従って，λ_σ の G 軌道は等質空間 G/G_{λ_σ} と同一視され

$$G/G_{\lambda_\sigma} \ni \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_{\lambda_\sigma} \longmapsto (q, p) \in \mathbf{R}^2$$

なる座標系により，G/G_{λ_σ} は相空間と同一視される．

G の局所座標系 (q, p, r) を

$$G \ni \begin{pmatrix} 1 & p & r \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto (q, p, r) \in \mathbf{R}^3$$

により定義し，1 次微分形式 λ_σ を局所座標系 (q, p, r) で表せば

$$\lambda_\sigma(g^{-1}dg) = \sigma(dr - pdq)$$

であるから

$$\omega_{\lambda_\sigma} = d(\sigma(dr - pdq)) = \sigma dq \wedge dp$$

を得る．これを軌道上の自然なシンプレクティック形式という．

【コスタントの定理】

一般に，リー群の余随伴作用の軌道はすべてシンプレクティック等質空間であり，逆にすべてのシンプレクティック等質空間はリー群の余随伴作用の或る軌道（またはその被覆空間）と同型である．

さて

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a, c \in \mathbf{R} \right\}$$

とおくと（$\mathfrak{p}$ は実の偏光化部分環と呼ばれる），$\mathfrak{p}$ をリー環として持つリー群は

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & p & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; p, r \in \mathbf{R} \right\}$$

で与えられ

$$G/P \ni \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \longmapsto q \in \mathbf{R}$$

なる座標系により，G/P は空間 $\mathbf{R}$ と同一視される．

リー環の準同型

$$\mathfrak{p} \ni \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto -\sqrt{-1}\sigma c \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$$

は明らかに P のユニタリ指標 ξ_{λ_σ}：

$$P \ni \begin{pmatrix} 1 & p & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto e^{-\sqrt{-1}\sigma r} \in U(1)$$

にリフトされる．

等質空間 G/P 上の ξ_{λ_σ} に随伴する直線バンドルを $L_{\xi_{\lambda_\sigma}}$ で表し，$L_{\xi_{\lambda_\sigma}}$ の 2 乗可積分な切断の全体のなすヒルベルト空間を $\mathcal{H}^{\mathfrak{p}}_{\lambda_\sigma}$ で表す．

任意の $f \in \mathcal{H}^{\mathfrak{p}}_{\lambda_\sigma}$ に対し

$$F(q) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \quad (q \in \mathbf{R})$$

とおくと，写像 $f \longmapsto F$ は等長変換

$$\mathcal{H}_{\lambda_\sigma}^{\mathfrak{p}} \ni f \longmapsto F \in L^2(\mathbf{R})$$

を定義する．

$\alpha = -\sigma p dq$ とおけば，α は λ_σ と同じドラーム・コホモロジー類を与える．このとき，α の選び方は次の通りである．先ず (q,p) が G/G_{λ_σ} の座標系を与えることに注意する．そこで変数 (q,p) の 1 次微分形式 $\alpha = f(q,p)dq + g(q,p)dp$ を考える．次に q が G/P の座標系を与えることおよび $\frac{\partial}{\partial p}$ が $\mathfrak{p}/\mathfrak{g}_{\lambda_\sigma}$ の代表元を与えることより $g(q,p) \equiv 0$ となるものを λ_σ と同じコホモロジー類から選ぶ．

5. ファインマン経路積分とファデーエフの問題

【ハミトン形式のファインマン経路積分】

素粒子が点 $q = q_0$ から点 $q' = q_N$ に移動する確率振幅は

$$\int_\Phi e^{\sqrt{-1}\int_0^T(\phi^*\alpha - \phi^* H dt)}\, d\mu(\phi)$$

によって得られる．ここに，α は相空間上の「Canonical form」で，H はハミルトン関数である．また，Φ は点 q と q' を結ぶ曲線の全体で，μ は Φ 上の「測度！」である．

【ファデーエフの問題】

余随伴作用の各軌道上のファインマン経路積分によりリー群の既約ユニタリ表現を構成せよ．

以下の議論は一般のハイゼンベルグ群 G の場合に成り立つが簡単のため $n = 1$ の場合に述べる．

6. ファインマン経路積分の計算

余随伴軌道上のファインマンの経路積分には次の《１》～《４》が重要である．

《１》相空間上の「Canonical form」
《２》シンプレクティック空間上の不変体積要素
《３》相空間上のハミルトン関数
《４》作用素の順序を決める「経路」の選び方

先ず、《１》,《２》については前節の結果より，それぞれ

$$\alpha = -\sigma p dq, \quad \frac{\omega_{\lambda_\sigma}}{2\pi} = \frac{d\alpha}{2\pi} = \frac{\sigma dq \wedge dp}{2\pi}$$

で与えられる．

次に，《３》については，次のように選ぶ．

任意の $X = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$ に対し，G/G_{λ_σ} 上のハミルトン関数 H_X を

$$H_X = (\mathrm{Ad}^*(g)\lambda_\sigma)(X) \quad (gG_{\lambda_\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_{\lambda_\sigma} \in G/G_{\lambda_\sigma})$$

により定義すれば

$$\begin{aligned} H_X &= \lambda_\sigma(g^{-1}Xg) = \lambda_\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 & -p & pq \\ 0 & 1 & -q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \lambda_\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 & a & aq-bp+c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sigma(aq-bp+c) \end{aligned}$$

を得る．

最後に，《４》については以下のように定める．

G/G_{λ_σ} 上の曲線 $\phi(t) \quad (t \in [0,T])$ に沿っての作用積分は

$$\int_0^T (\phi^*\alpha - \phi^* H_X dt) = \int_0^T \{-\sigma p(t)\dot{q}(t) - \sigma(aq(t) - bp(t) + c)\}\, dt$$

で与えられる．

時間区間 $[0,T]$ を N 個の小区間 $[\frac{k-1}{N}T, \frac{k}{N}T]$ に分け作用積分を計算する．量子化では作用素 $\mathbf{Q}$ と $\mathbf{P}$ が非可換であるため量子化をする順序が大切であり，物理で採用する「順序」を与える計算法

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{-\sigma p_{k-1}(q_k - q_{k-1}) - \sigma(a\frac{q_k + q_{k-1}}{2} - bp_{k-1} + c)\frac{T}{N}\right\}$$

は数学的に次のように定式化される．

区間 $[\frac{k-1}{N}T, \frac{k}{N}T]$ において，作用積分を G/G_{λ_σ} 上の線分

$$\begin{aligned} q(t) &= q_{k-1} + (t - \frac{k-1}{N}T)\frac{q_k - q_{k-1}}{T/N}, \\ p(t) &= p_{k-1}, \\ q(0) &= q \quad \text{and} \quad q(T) = q'. \end{aligned}$$

に沿って積分する．このとき上記の作用積分は

$$
\begin{aligned}
\int_0^T (\phi^*\alpha - \phi^* H_X dt) &= \int_0^T \{-\sigma p(t)\dot q(t) - \sigma(aq(t) - bp(t) + c)\}\, dt \\
&= \sum_{k=1}^N \left\{ -\sigma p_{k-1}(q_k - q_{k-1}) - \sigma(a\frac{q_k+q_{k-1}}{2} - bp_{k-1} + c)\frac{T}{N} \right\}
\end{aligned}
$$

となる．

ここで $p_0, \cdots, p_{N-1}, q_1, \cdots, q_{N-1}$ を自由に動かし，$N \mapsto 0$ と極限移行することにより G/G_{λ_σ} 上の曲線の或る集合 Φ が得られる．

ファイマンの原点に戻って経路積分を計算すれば

$$
\begin{aligned}
K_X(q', q; T) &= \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma| \frac{dp_0}{2\pi} \cdots |\sigma| \frac{dp_{N-1}}{2\pi} dq_1 \cdots dq_{N-1} \\
&\quad \times \exp\left\{ \sqrt{-1}\sigma \sum_{k=1}^N \left[-p_{k-1}(q_k - q_{k-1}) - (a\frac{q_k+q_{k-1}}{2} - bp_{k-1} + c)\frac{T}{N} \right] \right\} \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \cdots dq_{N-1} \prod_{k=1}^N \delta(-q_k + q_{k-1} + b\frac{T}{N}) \\
&\quad \times \exp\left\{ -\sqrt{-1}\sigma \sum_{k=1}^N (a\frac{(q_k+q_{k-1})}{2} + c)\frac{T}{N} \right\} \\
&= \delta(-q' + q + bT) \exp\left\{ -\sqrt{-1}\sigma(aqT + \frac{abT^2}{2} + cT) \right\}
\end{aligned}
$$

を得る．

任意の $F \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ に対し

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} K_X(q', q; T) F(q) dq &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-q' + q + bT) \exp\left\{ -\sqrt{-1}\sigma(aqT + \frac{abT^2}{2} + cT) \right\} F(q) dq \\
&= \exp\left\{ -\sqrt{-1}\sigma \left(aq'T - \frac{abT^2}{2} + cT \right) \right\} F(q' - bT) \\
&= (U_\sigma(\exp TX)F)(q')
\end{aligned}
$$

であるから，経路積分によりハイゼンベルグ群の既約ユニタリ表現が得られた．

更に，$\sigma = \frac{1}{\hbar}$ のとき，前節の結果より経路積分は

$$
e^{-\sqrt{-1}t(a\mathbf{Q} + b\mathbf{P} + c\mathbf{I})/\hbar}
$$

を与えることが分かる．

7. おわりに

この講演では，記号の煩雑さを避けるため最も簡単なハイゼンベルグ群の場合を扱ったが，$SL(2, \mathbf{R})$ や 2 次元の可解群の場合は $q + pq^2$ や $ap + be^{-q}$ 等の形

のハミルトン関数の幾何学的量子化が具体的に計算でき，それらの経路積分も具体的に計算することが出来る．更に，ハイゼンベルグ群の場合完全複素偏光化部分環を考えれば，コヒーレント表現が得られる．これを半単純リー群の場合に実行することによりボレル・ヴェイユ理論の新しいアプローチが得られる．

カッツ・ムーディー群等の無限次元リー群の場合は相空間が無限次元になり，余随伴軌道上には不変測度が存在しないため困難になる．アファインカッツ・ムーディーリー環の場合にはホワイトノイズを用いることにより基本表現に対する経路積分が計算できる．

これらについては下記の文献を参照されたい．

参考文献

[1] R.P.Feynman and A.R.Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw Hill Inc.(1965)

[2] A.Alekseev, L.D.Faddeev and S.Shatashvili, *Quantization of symplectic orbits of compact Lie groups by means of the functional integral*, J.Geometry and Physics **5** (1989), 391–406.

[3] T.Hashimoto,K.Ogura,K.Okamoto,R.Sawae and H.Yasunaga, *Kirillov-Kostant theory and Feynman path integrals on coadjoint orbits I*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 353–405.

[4] T.Hashimoto,K.Ogura,K.Okamoto and R.Sawae, *Kirillov-Kostant theory and Feynman path integrals on coadjoint orbits of $SU(2)$ and $SU(1,1)$*, Proc. of the RIMS Reseach Project 91 on Infinite Analysis (1991) 1-17.

[5] T.Hashimoto,K.Ogura,K.Okamoto and R.Sawae, *Borel-Weil theory and Feynman path integrals on flag manifolds*, Hiroshima Math. J. **23** (1993), 231–247.

[6] K.Okamoto, *The Borel-Weil theorem and the Feynman path integral, International Colloqium at Tata Institute of Foundamental Research*, Geometry and Analysis (1995) 275-297.

[7] M.Hamada,H.Kanno,K.Ogura,K.Okamoto and Y.Togoshi, *Kirillov-Kostant theory and the fundamental representation of the affine Lie algebra $\mathbf{A}_{n-1}^{(1)}$ and the Feynman path integral*, Hiroshima Math.J. **26** (1996), 209–221.

[8] 岡本清郷, 幾何学的量子化と経路積分, 数理科学（特集「量子化」）, (1996),45-53.

[9] 岡本清郷, フーリエ解析の展望, 朝倉書店, (1997)