

SEMICLASSICAL ERGODICITY AND THE RELATED PROBLEMS

(東京工業大学) 宮西 吉久 (YOSHIHISA MIYANISI)

Table of contents

- §1. compact Riemannian manifold 上の Laplacian に対する固有関数と測地流 (QP)
- §2. Schrödinger 作用素に対する固有関数と Hamiltonian flow(SP)
- §3. Scars and the related problems

§1.compact Riemannian manifold 上の Laplacian に対する固有関数と測地流 (既知の結果)

この章では, Laplacian に対する固有関数漸近挙動 (QP) と測地流 (CP) が ergodic になる時の関係を見る. 具体的には, まず次の様に問題を設定する.

$$(\text{QP}) \begin{cases} -\Delta u_n = \lambda_n u_n & \text{in } M, \\ \{u_n, \lambda_n\}; \text{固有関数展開 (in } L^2(M)), \end{cases} \quad (\text{CP}) \begin{cases} X_H \equiv (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial x}), \\ \exp(tX_H) : S^*M \rightarrow S^*M; \text{測地流.} \end{cases}$$

ただし,  $(M, g)$  は, smooth な compact Riemannian manifold とし,  $X_H$  は,  $H(x, p) = \sqrt{g_x(p, p)}$  を Hamiltonian とする Hamiltonian vector field とし,  $\exp(tX_H)$  は  $X_H$  から生成される Hamiltonian flow ( $S^*M$  上の速さ 1 の測地流) とする.

ここでは, 以下に Classical ergode (古典エルゴード性) 及び, Quantum ergode (量子エルゴード性) の定義を述べ, その関係を見る. おおざっぱに言うと, 古典力学 (CP), 量子力学 (QP), それぞれに対応するエルゴード性, すなわち測地流 (CP), もしくは固有関数 (QP) に対する,  $S^*M$  上の一様分布性を定義する.

**定義 1.1. (Classical ergodicity)** (古典エルゴード性). 測地流  $\exp(tX_H) : S^*M \rightarrow S^*M$  が classical ergodic であるとは, 次を満たす時をいう.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\exp(tX_H)(x, p)) dt = \frac{1}{\text{vol}(S^*M)} \int_{S^*M} f(x, p) d\text{vol}_{S^*M} \text{ for } \forall f(x, p) \in L^\infty(S^*M).$$

この定義 1.1. は良く知られている様に, 時間平均と空間平均が等しい事を意味しており, また Birkoff の定理によって左辺の収束も保証されている.

**定義 1.2. (Quantum ergodicity)** (量子エルゴード性).  $\{u_n, \lambda_n\}$  を固有関数展開とする. 固有関数展開が, quantum ergodic であるとは, ある部分列  $\{u_{n_k}, \lambda_{n_k}\}$  が存在して, 次を満たす時を言う.

$$\begin{cases} \text{条件 1. } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{k} = 1 \iff (\text{almost all, density 1}), \\ \text{and} \\ \text{条件 2. } \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \text{Op}(a)u_{n_k}, u_{n_k} \rangle_{L^2} = \frac{1}{\text{vol}(S^*M)} \int_{S^*M} a(x, p) d\text{vol}_{S^*M} \text{ for } \forall a(x, p) \in S^0(S^*M). \end{cases}$$

ただし,  $\text{Op}(a)$  は,  $a(x, p) \in S^0(S^*M)$  を symbol (表象) とする order 0 の擬微分作用素とし,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$  は, 多様体  $M$  上の  $L^2$  内積を意味する.

この定義 1.2. の意味する所は、多様体上の固有関数が漸近的に  $L^2$  norm の意味で一様分布する所にある。また、条件 1. によって、例外的な部分列を除けば、すなわち殆どすべての部分列に対し、一様分布の性質を持つ。注意として以上をまとめると、

注意 1.3.  $(M, g)$ : compact Riemannian manifold とし、固有関数展開  $\{u_n, \lambda_n\}$  が quantum ergodic とする。その時、ある固有関数展開の部分列  $\{u_{n_k}\}$  が存在して、次を満たす。

$$\begin{cases} 1. & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{k} = 1, \\ & \text{and} \\ 2. & \lim_{k \rightarrow \infty} \int_N |u_{n_k}|^2 d\text{vol}_M = \frac{\text{vol}(N)}{\text{vol}(M)} \quad (\text{一様分布性}). \end{cases}$$

但し、 $N \subset M$  を任意の開集合とする。

証明. 擬微分作用素の symbol として、形式的に次の様にする。

$$a(x, p) \equiv \begin{cases} 1 & \text{on } S^*N \equiv \{(x, p) \in S^*M : \pi(x, p) \in N\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ただし、 $\pi : S^*M \rightarrow M$  を projection とする。

そこで、定義 1.2. の条件 2. に今定義した symbol を代入すると、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \text{Op}(a)u_{n_k}, u_{n_k} \rangle_{L^2} &= \frac{1}{\text{vol}(S^*M)} \int_{S^*M} a(x, p) d\text{vol}_{S^*M} \\ &= \frac{1}{\text{vol}(S^n)\text{vol}(M)} \int_{S^n} \int_M \pi a(x, p) d\text{vol}_M d\text{vol}_{S^n} \\ &= \frac{1}{\text{vol}(M)} \int_M \pi a(x, p) d\text{vol}_M \\ &= \frac{1}{\text{vol}(M)} \int_N d\text{vol}_M \\ &= \frac{\text{vol}(N)}{\text{vol}(M)}. \end{aligned}$$

となって、示された。(q.e.d.)

では、Classical ergode (古典エルゴード性) と、Quantum ergode (量子エルゴード性) の関係を見る事にする。

定理 1.4. (Schnirelman) (参考文献 [1]). *Classical ergodic*,  $\implies$  任意の固有関数展開に対し、*quantum ergodic*.

例 1.  $(M, g)$  を、いたるところ負曲率 ( $K < 0$ ) をもつ compact manifold とすると、測地流は classical ergodic.

例 2.  $M = S^1$  (一次元の円) とすれば、 $u_n = e^{inx}$  となって、Quantum ergodic になることが、直接確かめられる。

例 3 (quantum ergodic でない固有関数展開) (参考文献 [2]).  $M = S^2, g = g_{st}$  ( $R^3$  に埋め込まれた二次元球面) とすると、ある固有関数展開  $\{Y_{l,m}, \lambda_{l,m}\}$  (球面調和関数) が存在して、

$$\lim_{\substack{l, m \rightarrow \infty \\ \frac{l}{m} \rightarrow e}} \int_{S^2} |Y_{l,m}|^2 d\text{vol} = \int_{S^2} \delta_{\gamma_e}$$

ただし、 $\gamma_e$  は、 $z$  軸となす仰角  $\theta$  が  $\cos(\theta) = e$  となる大円をあらわす。

一方、次の様な結果も知られている。

例 4(S.Zelditch)(参考文献 [2]).  $M = S^2, g = g_{st}$ (例 3 と同じ二次元球面) とすると, ある固有関数展開  $\{u_n, \lambda_n\}$  が存在して, quantum ergodic になる.

つまり, 多様体が同じでも固有関数の取り方で, quantum ergodic かどうか変化するわけである.

そこで, 次の様な必要十分条件が知られている. まず, 必要となる定義を用意する.

定義 1.5.(The counting function).

$$N(\lambda, M) \equiv \#\{\lambda_n \leq \lambda : \lambda_n \text{ は } (QP) \text{ の固有関数展開の固有値}\}.$$

定理 1.6.(Sunada)(参考文献 [3]).

多様体上の測地流が *classical ergodic*,

⇕ 必要十分

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{任意の固有関数展開が } \textit{quantum ergodic}, \\ \textit{and} \\ 2. \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{N(\lambda, M)} \sum_{0 < |\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}| < \delta} |\langle Op(a)u_i, u_j \rangle_{L^2}|^2 = 0 \text{ for } \forall a \in S^0(S^*M). \end{array} \right.$$

この結果によって, 測地流の古典エルゴード性が, 固有状態を用いて導かれた事になる.

また, 付加された 2. 式は, 物理的な解釈では推移振幅平均 (The average of transition amplitudes) と考えられている. すなわち, 擬微分作用素  $Op(a)$  を観測量 (observable) と考え, 違うエネルギー準位 (この場合, 固有値がエネルギー準位を表わす.) の間の確率振幅を求めている. この事については, §2. の普通の量子力学の設定の下で導かれる結果を見ると, さらに良くわかると思われる.

そこで, 次の§2 では, 上の定理 1.7. を電場, 磁場付きの  $T^*\mathbf{R}^n$  上の Hamilton 系, 及びその量子化と考えられる Schrödinger 方程式の固有状態に, 設定 (CP), (QP) を置き変えた時, 得られた結果を述べる事にする.

## §2. Schrödinger 作用素に対する固有状態と Hamiltonian flow

この章では, Schrödinger 作用素に対する固有状態 (SP) と, Hamiltonian flow (CP) が, ergodic になる時の相互関係をみる. §1. と基本的には同じ流れで話を進めるが, 固有状態 (SP) に対する極限の取り方が違う. §1. では, 固有値を無限に近づけた極限 (高エネルギー極限) を考えていたが, この章では Planch 定数  $h$  を 0 に近づける極限 (半古典極限) (semiclassial limit) を考える.

また, ここでは簡単の為に, スカラーポテンシャル (電場) を持つ時だけを考えるが, 以下の議論は,  $h$ -admissible と呼ばれる系にも拡張できる. (参考文献 [4]) その系は, ベクトルポテンシャルをも含む系となっている.

では, 具体的に問題を設定する.

$$(SP) \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{-h^2}{2m} \Delta + V(x) \right\} u_n(h) = E_n(h) u_n(h) \text{ in } \mathbf{R}^n, \\ \{u_n(h), E_n(h)\}; \text{固有関数展開 (in } L^2(\mathbf{R}^n)), \end{array} \right.$$

ただし,  $u_n(h) \equiv u_n(h)(x)$  であり,  $h$  が Planch 定数を表わし,  $x$  が空間座標を表わす. ここでは以下, 空間座標  $x$  は省略する.

$$(CP) \left\{ \begin{array}{l} H(x, p) \equiv \frac{p^2}{2m} + V(x) \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^n); \text{ (Hamiltonian)}, \\ X_H \equiv \left\{ \frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right\}; \text{ (Hamiltonian vector field)}, \\ \exp(tX_H) : H^{-1}(E) \rightarrow H^{-1}(E); \text{ (Hamiltonian flow)}. \end{array} \right.$$

ただし,  $H^{-1}(E) \equiv \{(x, p) \in T^*\mathbf{R}^n : H(x, p) = E\}$  は, 等エネルギー曲面を表わす.

次に、以下の仮定 (H1~H4) を置く。これらの仮定は、ゆるめる事もできるが、簡単の為、少し強い仮定をしておく。

(H1)((SP) のスペクトルが離散になり、(CP) の等エネルギー曲面がコンパクトになる為の条件)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty,$$

(H2)(regular(等エネルギー面に停留点なし))

$$\exists \epsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad dH \neq 0 \quad \text{on} \quad H^{-1}((E - \epsilon, E + \epsilon)),$$

(H3)(Schrödinger 方程式の解の構成に必要な条件)

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n \exists C_{\alpha, \beta} > 0 \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta H(x, p)| < C_{\alpha, \beta} (1 + H^2)^{1/2} \\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta H(x, p)| < C_{\alpha, \beta} (1 + |x| + |\xi|)^{(2 - |\alpha| - |\beta|)_+}, \end{cases}$$

(H4)(Periodic points が measure 0) (スペクトルの漸近挙動の解析に必要な条件)

$$m_E(\{(x, p) \in H^{-1}(E) : \exists t \neq 0 \text{ s.t. } \exp tX_H(x, p) = (x, p)\}) = 0.$$

ただし、 $m_E$  は、等エネルギー面上の Liouville measure.

次に、必要となる定義をいくつか用意する。

**定義 2.1.(The energy shell, The counting function)** (参考文献 [4]).

$$\begin{cases} \Lambda(E, h) \equiv \{E_j(h) : E - h < E_j(h) < E + h\}, \\ N(E, h) \equiv \#\Lambda(E, h). \end{cases}$$

この定義は、§1. の定義 1.6. に対応した物になっているが、§1. では、高エネルギー極限と呼ばれる固有値が無限大に近い部分を注目するのに対し、上の定義 2.1. では、エネルギーが  $E$  に近い部分を見ている所が相違点である。

次に、Weyl 型擬微分作用素 (The Weyl quantization) と呼ばれる作用素を定義する。

**定義 2.2.(The Weyl quantization).**  $a(x, p) \in S^0(T^*\mathbf{R}^n)$  とする。そのとき、

$$Op_h^W(a)f(x) \equiv \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{T^*\mathbf{R}^n} a\left(\frac{x+y}{2}, p\right) e^{\frac{i(x-y)p}{h}} f(y) dy dp \quad \text{for } \forall f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

では、古典力学 (CP), 量子力学 (SP), それぞれに対応するエルゴード性として、Classical ergode(古典エルゴード性), Semiclassical ergode(半古典エルゴード性) を定義する。

**定義 2.3.(Classical ergodic(at  $H^{-1}(E)$ )).**  $\exp(tX_H) : H^{-1}(E) \rightarrow H^{-1}(E)$  が classical ergodic であるとは、次を満たす時を言う。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\exp(tX_H)(x, p)) dt = \frac{1}{m_E(H^{-1}(E))} \int_{H^{-1}(E)} f(x, p) dm_E \quad \text{for } \forall f \in L^\infty(H^{-1}(E))$$

この定義 2.3. は、§1. の定義 1.1. に対応した物になっており、Hamiltonian flow( $\exp(tX_H)$ ) が、 $H^{-1}(E)$  上で、測度  $m_E$  に対する保測変換であるから自然な定義と言える。

**定義 2.4.(Semiclassical ergodic(near  $H^{-1}(E)$ )).** 固有関数列  $\{u_j(h), E_j(h)\}$  が、semiclassical ergodic (near  $H^{-1}(E)$ ) であるとは、殆どすべての部分列に対して、

$$\lim_{h \rightarrow 0, E_j(h) \in \Lambda(E, h)} \langle Op_h^W(a)u_j(h), u_j(h) \rangle_{L^2} = \frac{1}{m_E(H^{-1}(E))} \int_{H^{-1}(E)} a(x, p) dm_E.$$

正確にいうと,

$$\{u_j(h), E_j(h)\} \text{ が, semiclassical ergodic,}$$

$$\Downarrow \text{定義}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\#\{j : |\langle Op_h^W(a)u_j(h), u_j(h) \rangle - \frac{1}{m_E(H^{-1}(E))} \int_{H^{-1}(E)} a(x, p) dm_E| < \epsilon\}}{N(E, h)} = 0,$$

$$\text{for } \forall \epsilon > 0, \forall a(x, p) \in C_0^\infty(T^*\mathbf{R}^n).$$

と定義する.

この定義 2.4. は, §1.の定義 1.2. に対応しているが, 極限の取り方が半古典極限 ( $h \rightarrow 0$ ) になっている所が違う. この事が, semiclassical(半古典) と呼ぶ所以である.

そこで, classical ergodicity と semiclassical ergodicity の既知の関係として次が知られている.

**定理 2.5. (Helffer, Martinez, Robert)** (参考文献 [4]). (H1)~(H4) の仮定の下で,

$$\exp(tX_H) : H^{-1}(E) \rightarrow H^{-1}(E) \text{ が classical ergodic} \implies \text{Semiclassical ergodic (near } H^{-1}(E)).$$

ところが, この定理では逆がわからない. そこで, 必要十分条件として次を得た.

**主定理 2.6** (参考文献 [5]). 仮定 (H1)~(H4) の下で,

$$\exp(tX_H) : H^{-1}(E) \rightarrow H^{-1}(E) \text{ が classical ergodic}$$

$$\Downarrow \text{必要十分}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Semiclassical ergodic (near } H^{-1}(E)), \\ \text{and} \\ 2. \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{N(E, h)} \sum_{\substack{E_j(h) \in \Lambda(E, h), \\ 0 < |E_j(h) - E_k(h)| < \delta h}} |\langle Op_h^W(a)u_j(h), u_k(h) \rangle_{L^2}|^2 = 0, \\ \text{(the average of transition amplitudes} = 0) \quad \text{for } \forall a \in C_0^\infty(T^*\mathbf{R}^n). \end{array} \right.$$

上の定理 2.6. が, §1.の定理 1.7. に対応する結果となる.

しかし, 定理 1.7. と大きく違うのは, 高エネルギー極限の代わりに, 半古典極限になっている部分と, 2. 式に入っている和の範囲が定理 1.7. では  $\sqrt{\lambda}$  で指定されていたのが, 上の定理 2.6. では  $E(h)$  となって, 固有値のルートがはずれている部分である. これは, 証明法が定理 1.7. では多様体上の波動方程式を使い, 定理 2.6. では,  $\mathbf{R}^n$  上の Shorödinger 方程式を使う所に起因する.

また, 2. 式では, §1.で説明した推移振幅平均 (The average of transition amplitudes on the energy shell  $\Lambda(E, h)$ ), が, そのまま見える形になっている.

### §3. Scars and the related problems

以下, §3. での設定や記号は, §1. と同じとしておく.

まず, quantum ergodicity に関する予想を紹介する.

**予想 3.1. (Quantum unique ergodicity) (Sarnack, Rudnik).** (参考文献 [6].)  $(M, g)$  を負曲率 ( $K < 0$ ) compact Riemannian manifold とする. その時, 部分列を選ぶことなく

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Op(a)u_n, u_n \rangle = \frac{1}{\text{vol}(S^*M)} \int_{S^*M} a(x, \xi) d\text{vol}_{S^*M}.$$

となるか?

予想 3.2. (参考文献 [2][3].) "Quantum ergodic  $\implies$  Classical ergodic" は generic property か?

この予想 3.2. は, §1. の定理 1.5. で述べたが, 要するに任意の固有関数展開が quantum ergodic ならば, 測地流が classical ergodic になるかどうか問題になっている.

次にここでは, 固有関数の  $L^2$ -norm に対する一様分布性 (ergodicity) に注目して来たが, 必ずしも固有関数は多様体上, 一様分布するとは限らない. (§1. 例 3. 参照) つまり, 固有関数の  $L^2$ -norm が, 多様体上のある部分集合上に集中する事もある. (参考文献 [2],[7],[8].) この事に関する予想について, いくつか最後に述べる.

予想 3.3. (Latzukin). (参考文献 [9].)  $\gamma \subset S^*M$  を測地流で不変な集合とする. すなわち,  $\exp(tX_H)\gamma = \gamma$  for  $\forall t \in \mathbf{R}$  とし,  $meas(\gamma) > 0$  とする. そのとき, ある部分列  $\{u_{n_k}\}$  が存在して,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\pi\gamma} |u_{n_k}|^2 dvol_M = 1$$

となるか?

つまり, 予想 3.3. では, 周期解などの測地流に対する不変集合に固有関数の  $L^2$ -norm が集中する可能性をしめす事が問題となっている.

注意 3.4. 上の Conjecture の逆は, 成立する. すなわち, ある部分列  $\{u_{n_k}\}$  が存在して,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_S |u_{n_k}|^2 dvol_M = 1.$$

となるならば, ある  $\gamma \subset S^*M$  が存在して, 測地流で不変であり,  $\pi\gamma \subset S$  となる.

もう一つ, scare と呼ばれる固有関数集中の問題を述べる.

定義 3.5. (scar) (参考文献 [6]). 固有関数展開  $\{u_n(x)\}$  に対し,  $\mu_n \equiv |u_n(x)|^2 dvol_M$  は, 多様体  $M$  上の Radon 測度になるが, 部分列  $\{\mu_{n_k}\}$  を選んで次の様に弱収束する時, 固有関数展開は (閉集合)  $S \subset M$  に scar すると言う. すなわち,

$$\begin{aligned} & \{\mu_{n_k}\} \text{ scars to } S \subset M, \\ & \updownarrow (\text{定義}) \\ & \left\{ \begin{array}{l} 1. \mu_{n_k} \rightarrow \exists \mu (\text{Radon 測度}) \quad (\text{弱収束}), \\ \text{and} \\ 2. \text{support}(\mu_{sing}) \subset S. \end{array} \right. \end{aligned}$$

ただし,  $\mu \equiv \mu_{reg} + \mu_{sing}$  を Lebesgue 分解とする.

この定義 3.5. の意味は, 固有関数展開の高エネルギー極限の特異台 (singular support) の事である.

また, 固有関数展開のある部分列が一様分布する (quantum ergodic) ならば, その列に対する特異台は空集合になる.

問題 3.6. scar の構造を調べよ. (特に, 測地流との関係を求めよ.)

この問題については, 数値計算はあるのだがあまり良くわかっていない. 唯一, arithmetic Riemannian surface 上で scar が決して起こらない事, すなわち, 任意の弱収束列の特異台は常に空集合となる事がわかっていて.

定理 3.7. (Rudnick, Sarnack) (参考文献 [6].).  $(M, g)$  を arithmetic Riemannian surface とする. 固有関数展開  $\{u_n, \lambda_n\}$  が, 閉集合  $S$  に scar するとする. さらに,  $S$  が, 有限個の geodesic curve と point に含まれるならば,  $S = \emptyset$

そこで, 次の事を注意として得た. この定理をまず紹介する.

注意 3.8.  $\{\mu_{n_k}\}$  scars to  $S \subset M$ , とする. さらに,  $x \in S$  を孤立点とする. そのとき,

$$\{\mu_{n_k}\} \text{ scars to } S \setminus \{x\}.$$

この注意によって, 孤立点に scar が起こらない事がわかった. 例えば, デルタ関数  $\delta(x)$  などの, その特異台が孤立点を含む測度には決して固有関数列は収束しないのである.

注意 3.8 の証明. 背理法で証明する. ある孤立点  $x_0$  に固有関数列が scar したと仮定する. よって, ある部分列  $u_{j_k}$  が存在して,  $x_0$  の任意の  $\epsilon$  近傍  $B_{x_0}(\epsilon)$  に対して,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_{x_0}(\epsilon)} |u_{j_k}|^2 d\text{vol}_M > \exists C(\text{indep of } \epsilon) > 0.$$

ところで,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_{j_k}, \phi(x)u_{j_k} \rangle_{L^2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle e^{it\sqrt{\lambda_{j_k}}} u_{j_k}, \phi(x)e^{it\sqrt{\lambda_{j_k}}} u_{j_k} \rangle_{L^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle e^{it\sqrt{-\Delta}} u_{j_k}, \phi(x)e^{it\sqrt{-\Delta}} u_{j_k} \rangle_{L^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_{j_k}, \phi(\exp(tX_H))u_{j_k} \rangle_{L^2} \quad \dots \text{Egorov の定理} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_{x_0}(t+\epsilon) \setminus B_{x_0}(t-\epsilon)} |u_{j_k}|^2 d\text{vol}_M \quad \dots \text{Garding inequality} \\ &= \mu(B_{x_0}(t+\epsilon) \setminus B_{x_0}(t-\epsilon)) \\ &= \mu_{\text{reg}}(B_{x_0}(t+\epsilon) \setminus B_{x_0}(t-\epsilon)) \\ &\leq \exists C' \text{vol}_M(B_{x_0}(t+\epsilon) \setminus B_{x_0}(t-\epsilon)) \quad \dots \text{測度の絶対連続性} \\ &\rightarrow 0 \text{ as } \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となって矛盾.

さらに, 次の定理も証明される.

定理 3.9. (参考文献 [10])  $\{\mu_{n_k}\}$  scars to  $S \subset M$ , とする. さらに,  $H^1(S) = 0$  ( $S$  の 1 次元ハウスドルフ測度が 0) とする. そのとき,

$$\{\mu_{n_k}\} \text{ scars to } \emptyset.$$

最後に, この研究集会ではいえなかったが, まだまだ固有関数の漸近挙動の問題には,  $L^\infty$  ノルムの挙動や力学系との関係なども調べられている.

まだまだ, さまざまな問題が関係しているのです.

#### REFERENCES

1. Schnirelman, A.I., *Ergodic properties of eigenfunctions.*, Usp.Math.Nauk **29** (1974), 181–182.
2. S.Zelditch, *Quantum ergodicity on the sphere*, Commun.Math.Phys. **146** (1992), 61–71.
3. T.Sunada, *Quantum ergodicity*, preprint..
4. B.Helffer, A.Martinez, D.Robert, *Ergodicite et limite semiclassique*, Commun.Math.Phys. **109** (1987), 313–326.
5. Y.Miyajima, *A Remark on Semiclassical ergodicity.*, Preprint.
6. Z.Rudnik, P.Sarnack, *The behavior of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifold.*, Commun.Math.Phys. **161** (1994), 195–213.
7. S.Zelditch, *Quantum transition amplitudes for ergodic and for completely integrable systems.*, J.Funct.Anal. **94** (1990), 415–436.
8. Colin de Verdiere, *Ergodicite et fonctions propres du Laplacien.*, Commun.Math.Phys. **102** (1985), 497–502.

9. Vladimir F.Lazutkin, *KAM theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions.*, Springer Verlag, 1993.
  10. Y.Miyani, *On the Hausdorff dimension of Scars.*, preprint.
- その他の関連文献.
11. P.Gérard and E.Leichtnam, *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem.*, Duke.Math.J. **71** (1993), 559–607.
  12. T.Paul,A.Uribe, *On the pointwise behavior of semiclassical measures.*, Commun.Math.Phys. (1996), 229–258.
  13. S.Zelditch, *Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces.*, Duke.Math.J. **55** (1987), 919–941.
  14. S.Zelditch,M.Zwolski, *Ergodicity of eigenfunctions for ergodic billiards*, Commun.Math.Phys. **175** (1996), 673–682.
  15. M.Farris, *Egorov's theorem on a manifold with diffractive boundary.*, Commun.P.D.E. **6** (1981), 651–687.

さらに詳しい参考文献については, 上の S.Zelditch の論文を参照の事.