

ある種のフックス型分岐コーシー問題について

千葉工業大学自然系 山根英司 (Hideshi Yamane)*

概要

$a(x, D) = x_0(D_0 + qx_0^{q-1}D_1)D_0 + \sum_{j=1}^n a_j(x)D_j + b(x)$ の形のフックス型作用素に対する分岐コーシー問題について考察する. 証明の詳細は [10] に譲る.

0 イントロダクション

線型偏微分作用素 $a(x, D) = x_0(D_0 + qx_0^{q-1}D_1)D_0 + \sum_{j=1}^n a_j(x)D_j + b(x)$ は $x_0 = 0$ に沿ってフックス型である. 特性曲面 $x_1 = 0, x_1 - x_0^q = 0$ の周りに分岐する (多価正則な) 右辺に対して, $a(x, D)$ のコーシー問題を考える.

$(D_0 + qx_0^{q-1}D_1)D_0$ の形の主部を持つ作用素に関しては Wagschal [8] が分岐コーシー問題を考察している. 彼は小林 [4] の結果を用いて解の積分表示を与えている. この論説では彼らの方法を利用するが, ただし被積分関数として有理型関数を許容する.

フックス型作用素に対する分岐コーシー問題は浦部 [7], 大内 [5], 藤家 [3] 等で研究されている. これらの論文で扱われているのは, 特性曲面が互いに横断的か, あるいは 1 次の接触をする場合である.

1 主定理

\mathbb{C}^{n+1} の座標系を $x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ とする. 原点の開近傍で正則な係数を持つ次の形の 2 階線型偏微分作用素を考える:

$$a(x, D) = x_0(D_0 + qx_0^{q-1}D_1)D_0 + \sum_{j=1}^n a_j(x)D_j + b(x).$$

*e-mail: yamane@pf.it-chiba.ac.jp 文部省科学研究費の補助を受けました.

ここで q は 2 以上の整数であり, D_j は x_j ($0 \leq j \leq n$) に関する微分を表す. $a(x, D)$ は $S : x_0 = 0$ に沿ってウェイト 1 のフックス型作用素であり, 特性指数は 0 と 1 である. よって [1] より, 同型 $a(x, D) : x_0^2 \mathbf{C}\{x\} \xrightarrow{\sim} x_0 \mathbf{C}\{x\}$ を誘導する. ここで $\mathbf{C}\{x\}$ は正則関数の層の原点における茎である.

[8] に従って $T : x_0 = x_1 = 0$, $K_0 : x_1 = 0$, $K_1 : x_1 - x_0^q = 0$ と置く. 明らかに K_0 と K_1 は $a(x, D)$ の特性曲面であり, $K_0 \cap K_1 = T$ である.

$x \notin T$ に対して $h(x) = -x_0^q/x_1$ と置く. $x_1 = 0$ のときは $h(x) = \infty$ と約束する. 容易に分かるように $S = \{x; h(x) = 0\} \cup T$, $K_0 = \{x; h(x) = \infty\} \cup T$, $K_1 = \{x; h(x) = -1\} \cup T$ である.

\mathbf{C}^{n+1} の 2 つの閉集合 A_0 と A_1 を次のように定義する :

$$A_0 = \{x; -1 \leq h(x) \leq 0 \text{ or } h(x) = \infty\} \cup T \supset S \cup K_0 \cup K_1,$$

$$A_1 = \{x; h(x) \geq 0 \text{ or } h(x) = \infty \text{ or } h(x) = -1\} \cup T \supset S \cup K_0 \cup K_1.$$

次のコーシー問題を考えよう :

$$(1) \quad a(x, D)u(x) = x_0 v(x), \quad D_0^j u|_{x_0=0} \equiv 0 \quad (j = 0, 1).$$

ここで, 原点の連結な開近傍 Ω が存在して $v(x)$ は $\Omega \setminus (K_0 \cup K_1)$ の普遍被覆空間で正則とする. $y \in \Omega \cap (S \setminus T)$ の近傍でコーシー問題 (1) は一意な正則解を持つ.

主結果を次に挙げる:

定理 1 \mathbf{C}_x^{n+1} の原点の連結な開近傍 \mathcal{O} が存在して $j = 0, 1$ に対して (1) の解 $u(x)$ は $\mathcal{O} \setminus A_j$ の普遍被覆空間に解析接続される.

解の一意性より, y は原点にいくらでも近いとしてよい.

注 上の定理は, $\gamma(0) = y$ と $\gamma(t) \notin A_j$ ($t > 0$) を満たす任意の曲線 $\gamma : I \rightarrow \mathcal{O}$ に沿って $u(x)$ が解析接続できることを意味する. ここで I は閉区間 $[0, 1]$ である.

例えば $\gamma_0(0) = y$, $h \circ \gamma_0(t) = 4t$ ($0 \leq t \leq 1/2$) を満たし, t が $1/2$ から 1 まで増えるときに $h \circ \gamma_0(t) \in \mathbf{C}$ が円 $|z| = 2$ に沿って回るような曲線 γ_0 を考えよう. $\gamma_0(t)$ は $K_0 \setminus T$ の周りを動く. よって定理 ($j = 0$) は $u(x)$ が $K_0 \setminus T$ の周りに分岐することを表す.

$u(x)$ が $K_1 \setminus T$ の周りに分岐することは, 曲線を適当に取り替えて定理 ($j = 1$) を用いれば分かる.

2 積分表示

[8] に従って解 $u(x)$ の積分表示を与える. 正確には解は級数で表され, その第 m 項が特異 m -単体の上の m -形式の積分となっている.

Δ_m ($m \geq 1$) を標準 m 次元単体とする:

$$\Delta_m = \{t \in \mathbf{R}^m; 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m \leq 1\}, \quad t = (t_1, \dots, t_m).$$

\mathbf{C}^m の座標系を $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ とし, パラメータ $x_0 \in \mathbf{C}$ に依存する特異 m -単体 $S_m = S_m(x_0)$ を次のように定義する:

$$S_m(x_0) : t \in \Delta_m \mapsto x_0 t \in \mathbf{C}_\sigma^m.$$

$d\sigma_{(m)} = d\sigma_1 \wedge \cdots \wedge d\sigma_m$ と置く. $(0, 0) \in \mathbf{C}_\sigma^m \times \mathbf{C}_x^{n+1}$ の近傍の正則関数 $f = f(\sigma, x)$ に対して, m -形式 $f d\sigma_{(m)}$ の S_m 上での積分を

$$\begin{aligned} (2) \quad I(x) &= \int_{S_m} f d\sigma_{(m)} = \int_{S_m} f(\sigma, x) d\sigma_1 \wedge \cdots \wedge d\sigma_m \\ &= \int_{\Delta_m} f(x_0 t, x) x_0^m dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_m \\ &= \int_0^{x_0} d\sigma_m \int_0^{\sigma_m} d\sigma_{m-1} \cdots \int_0^{\sigma_2} f(\sigma, x) d\sigma_1, \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

で定義する. 後でこの定義をある種の有理型関数に拡張する.

$$\begin{aligned} D_0 I(x) &= \int_{S_m} D_0 f d\sigma_{(m)} + \int_{S_{m-1}} f|_{\sigma_m=x_0} d\sigma_{(m-1)}, \\ D_j I(x) &= \int_{S_m} D_j f d\sigma_{(m)}, \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned}$$

が成り立ち,

$$\int_{S_m} f(x) d\sigma_{(m)} = \begin{cases} f(x) & (m = 0), \\ 0 & (m < 0) \end{cases}$$

と置けば, 任意の $m \in \mathbf{Z}$ に対して上の 2 式が成り立つ.

[8] に従って多重相関数を導入する. $k_0(x) = \varphi_0(x) = x_1$, $k_1(x) = x_1 - x_0^q$ と定め, $m \geq 1$ に対しては

$$\varphi_m(\sigma, x) = k_m(x) + \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \sigma_j^q$$

と置く. ここで $k_m = k_0$ (m は偶数), $k_m = k_1$ (m は奇数) である. これらは $a(x, D)$ のアイコナル方程式を満たし,

$$\varphi_{m+2}|_{\sigma_{m+2}=\sigma_{m+1}=x_0} = \varphi_{m+1}|_{\sigma_{m+1}=x_0} = \varphi_m \quad (m \geq 0)$$

が成り立つ.

$\psi_{k,l}(\sigma_k, \dots, \sigma_l) = \sum_{j=k}^l (-1)^{j+1} \sigma_j^q$, $1 \leq k \leq l$, と置く.

$\mathbf{C}_{x''}^{n-1}$, $x'' = (x_2, \dots, x_n)$, にノルム $\|x''\| = \max_{2 \leq j \leq n} |x_j|$ を与える. その部分集合 $D_a^{n-1} = \{x'' \in \mathbf{C}^{n-1}; \|x''\| < a\}$, $a > 0$, は多重円盤である. $\mathbf{C}_{\sigma'}^{m-2}$, $\sigma' = (\sigma_2, \dots, \sigma_{m-1})$, において原点の開近傍 Ω_a^{m-2} ($a > 0$) を

$$\Omega_a^{m-2} = \{\sigma' \in \mathbf{C}^{m-2}; \max_{2 \leq j \leq m-1} |\sigma_j| < a, \max_{2 \leq l \leq m-1} |\psi_{2,l}(\sigma')| < a\}$$

で定める.

さらに \mathbf{C}_ζ^2 , $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1)$, を導入する. $\|\zeta\| = \max(|\zeta_0|, |\zeta_1|)$ と置き, $D_a^2 = \{\zeta \in \mathbf{C}^2; \|\zeta\| < a\}$, $a > 0$, とする. 超曲面 $\mathcal{K}_0: \zeta_1 = 0$, $\mathcal{K}_1: \zeta_1 = \zeta_0^q$ を考え, $\mathcal{X} = \mathbf{C}^2 \setminus (\mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1)$, $\mathcal{X}_a = \mathcal{X} \cap D_a^2$ と置く. それらの普遍被覆空間をそれぞれ $\hat{\mathcal{X}}$, $\hat{\mathcal{X}}_a$ と表す.

(1) の点 y の近傍における解 $u(x)$ を

$$(3) \quad u(x) = \sum_{m=2}^{\infty} I_m(x)$$

の形の級数で表そう. ここで

$$\begin{aligned} I_m(x) &= \int_{S_m} u_m(\sigma_1, \varphi_m(\sigma, x), \sigma', x'') d\sigma_{(m)} \\ &= \int_{\Delta_m} u_m(x_0 t_1, \varphi_m(x_0 t, x), x_0 t_2, \dots, x_0 t_{m-1}, x'') x_0^m dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m \end{aligned}$$

であり, $u_m = u_m(\zeta, \sigma', x'')$ は後で構成される有理型関数である. 実際は m が奇数のときは $u_m \equiv 0$, $I_m(x) \equiv 0$ であって, 級数は m が偶数の項だけからなる.

次のセクションで下記の定理を示す.

定理 2 $a > 0$, $r > 0$ と正則関数

$$\begin{aligned} u_m : \hat{\mathcal{X}}_a \times \{\sigma' \in \Omega_r^{m-2}; \sigma_3 \sigma_5 \sigma_7 \cdots \sigma_{m-3} \sigma_{m-1} \neq 0\} \times D_r^{n-1} &\rightarrow \mathbf{C} \\ (m = 2, 4, 6, \dots) \end{aligned}$$

が存在して, 級数 (3) が y の近傍で収束して (1) の解となる. ただし m が奇数のとき $u_m \equiv 0$ としている.

さらに $\sigma_3 \sigma_5 \sigma_7 \cdots \sigma_{m-3} \sigma_{m-1} u_m(\zeta, \sigma', x'')$ は $\hat{\mathcal{X}}_a \times \Omega_r^{m-2} \times D_r^{n-1}$ で正則であり, 任意のコンパクト集合 $\mathcal{K} \subset \hat{\mathcal{X}}_a$ に対して定数 $c_{\mathcal{K}} > 0$ が存在して, 任意の $(\zeta, \sigma', x'') \in \mathcal{K} \times \Omega_r^{m-2} \times D_r^{n-1}$, $m = 4, 6, 8, \dots$ に対して

$$|\sigma_3 \sigma_5 \sigma_7 \cdots \sigma_{m-3} \sigma_{m-1} u_m| \leq c_{\mathcal{K}}^{m+1} \cdot \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{m}{2}\right)!$$

が成り立つ。

(3) の級数が y の近傍で一様に絶対収束することを示そう。[8] で示されているように、 y の近傍 V とコンパクト集合 $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}_a$ が存在して、任意の $x \in V$, $m, t \in \Delta_m$ に対して

$$(x_0 t_1, \varphi_m(x_0 t, x)) \in \mathcal{K}, (x_0 t_2, \dots, x_0 t_{m-1}) \in \Omega_r^{m-2}, x'' \in D_r^{n-1}$$

が成り立つ。ここで \mathcal{K} はいくらでも小さく出来て、 $\hat{\mathcal{X}}_a$ のコンパクト集合と見なせる。したがって

$$|\sigma_3 \sigma_5 \cdots \sigma_{m-1} u_m(\sigma_1, \varphi_m(\sigma, x), \sigma', x'')| \leq c_{\mathcal{K}}^{m+1} \cdot \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{m}{2}\right)!$$

が $x \in V$, $\sigma = S_m(x_0)(t)$ に対して成り立つ。よって次の評価を得る:

$$(4) \quad \begin{aligned} & |u_m(x_0 t_1, \varphi_m(x_0 t, x), x_0 t_2, \dots, x_0 t_{m-1}, x'') x_0^m| \\ & \leq \frac{|x_0|^{1+\frac{m}{2}}}{t_3 t_5 t_7 \cdots t_{m-3} t_{m-1}} c_{\mathcal{K}}^{m+1} \cdot \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{m}{2}\right)!. \end{aligned}$$

補題 1 $m = 4, 6, 8, \dots$ に対して

$$(5) \quad j_m = \int_{\Delta_m} \frac{dt_1 dt_2 \cdots dt_{m-1} dt_m}{t_3 t_5 t_7 \cdots t_{m-3} t_{m-1}} = \left\{ \left(\frac{m}{2}\right)! \right\}^{-2} \left(\frac{m}{2} + 1\right)^{-1}.$$

(4) と (5) を用いて、 $I_m(x)$ が V で正則であることと

$$|I_m(x)| \leq |x_0|^{1+\frac{m}{2}} c_{\mathcal{K}}^{m+1} \left\{ \left(\frac{m}{2}\right)! \right\}^{-1}$$

が分かる。よって (3) の級数は収束し、 V の正則関数を定める。

3 定理 2 の証明

(3) の級数が (1) の解 $u(x)$ を定めるために関数 u_m が満たすべき十分条件を与えよう。

補題 2 (2) で定義される関数 $I(x)$ に関して

$$\begin{aligned} a(x, D)I(x) &= \int_{S_m} a(x, D) f d\sigma_{(m)} + \int_{S_{m-1}} A_1^m f|_{\sigma_m=x_0} d\sigma_{(m-1)} \\ &\quad + \int_{S_{m-2}} x_0 f|_{\sigma_{m-1}=\sigma_m=x_0} d\sigma_{(m-2)} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $A_1^m = A_1^m(x, D_{\sigma_m}, D_0, D_1) = x_0(D_{\sigma_m} + 2D_0 + qx_0^{q-1}D_1)$ である。

$(\zeta, \sigma', x'') = ((0, y_1), 0, 0)$ の近傍の有理型関数 $u_*(\zeta, \sigma', x'')$ と $u_* \circ \varphi_m = u_*(\sigma_1, \varphi_m(\sigma, x), \sigma', x'')$ を考えよう. ζ_1 に関する微分を ∂_1 と表す. このとき次の2つの補題が成り立つ.

補題 3

$$a(x, D)(u_* \circ \varphi_m) = \{P_1(x, D'')u_*\} \circ \varphi_m + \{P_0^m(x)\partial_1 u_*\} \circ \varphi_m$$

が成り立つ. ここで

$$P_1(x, D'') = \sum_{j=2}^n a_j(x) D_j + b(x),$$

$$P_0^m(x) = \{x_0 D_0^2 + a_1(x) D_1\} k_m(x)$$

である. 関数 P_0^m は m の偶奇だけで決まる.

補題 4 $\sigma_m = x_0$ のとき

$$A_1^m(x, D_{\sigma_m}, D_0, D_1)(u_* \circ \varphi_m) = 0.$$

もし $m \geq 0, \sigma_{m+1} = x_0, \zeta_0 = \sigma_1, \zeta_1 = \varphi_m(\sigma, x)$ に対して

$$(6) \quad \{P_1(x, D'') + P_0^m(x)\partial_1\}u_m + x_0 u_{m+2} = \delta_m^0 x_0 v(x)$$

が成り立つならば, (3) で定義される関数 $u(x)$ は (1) の解である. ただし $\delta_0^0 = 1, \delta_m^0 = 0 (m > 0)$ であり, $m \leq 0$ または m が奇数のときは $u_m \equiv 0$ としている.

以下 m が偶数の場合のみを考える. そうすれば $P_0^m = a_1(x)$ は m によらない.

$m = 0$ については

$$(7) \quad u_2(\zeta, x'') = v(\zeta, x'')$$

である. よって, ある $b > 0$ に対して u_2 は $\hat{\mathcal{X}}_b \times D_b^{n-1}$ で正則となる.

$m = 4, 6, 8, \dots$ については漸化式 (6) は, $\sigma_{m-1} = x_0, \zeta_0 = \sigma_1, \zeta_1 = \varphi_{m-2}(\sigma_1, \dots, \sigma_{m-2}, x)$ に対して

$$(8) \quad x_0 u_m = Q(x, \partial_1, D'')u_{m-2}$$

と書ける. ここで Q は m によらない1階偏微分作用素である.

次の2条件 (a) と (b) は同値である:

- (a) $\sigma_{m-1} = x_0, \zeta_1 = \varphi_{m-2}(\sigma_1, \dots, \sigma_{m-2})|_{\sigma_1=\zeta_0},$
 (b) $x_0 = \sigma_{m-1}, x_1 = \zeta_1 - \zeta_0^q - \psi_{2,m-2}(\sigma_2, \dots, \sigma_{m-2}).$
 よって $u_m (m = 4, 6, 8, \dots)$ は

$$(9) \quad \sigma_{m-1} u_m(\zeta, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-1}, x'') = R(\alpha, \beta, \zeta, x'', \partial_1, D'') u_{m-2}$$

で与えられる. ここで $\alpha = \sigma_{m-1}, \beta = \psi_{2,m-2}(\sigma_2, \dots, \sigma_{m-2})$ と置いている. また, $R(\alpha, \beta, \zeta, x'', \partial_1, D'')$ は1階偏微分作用素で, その係数は $C_{\alpha, \beta}^2 \times C_\zeta^2 \times C_{x''}^{n-1}, x'' = (x_2, \dots, x_n),$ の原点の近傍で正則である.

定数 R' と $R'' (0 < R' < R'')$ を十分小さく選ぶと $R(\alpha, \beta, \zeta, x'', \partial_1, D'')$ の全ての係数は $\Delta_{R'}^2 \times D_{R''}^2 \times D_{R'}^{n-1}$ で正則かつ有界となる. ここで $\Delta_{R'}^2$ は $\Delta_{R'}^2 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2; \max(|\alpha|, |\beta|) < R'\}$ で定義される多重円盤である.

定数 $c_0 > 0$ を十分大きく取れば, $r(\alpha, \beta, \zeta, x'')$ が作用素 R の任意の係数とするとき

$$\partial_1^q r(\alpha, \beta, \zeta, x'') \ll c_0^{q+1} q! \frac{1}{R' - \xi}, \quad \xi = \sum_{j=2}^n x_j,$$

が任意の $q \geq 0$ と任意の $(\alpha, \beta, \zeta) \in \Delta_{R'}^2 \times D_{R'}^2$ に対して成り立つ. この評価の意味は, 右辺が $x'' = (x_2, \dots, x_n)$ に関する優級数だということである. すなわち変数 α, β, ζ はパラメータである.

$R' > 0$ を十分小さく取って $0 < R' \leq b$ とし, $a = R'$ と置く. このとき

補題 5 $m = 4, 6, 8, \dots$ について関数 $\sigma_3 \sigma_5 \sigma_7 \cdots \sigma_{m-3} \sigma_{m-1} u_m(\zeta, \sigma', x'')$ は $\hat{\mathcal{X}}_a \times \Omega_{R'}^{m-2} \times D_{R'}^{n-1}$ で正則である.

$0 < R < R'$ となる定数 R を選び, $\Phi(\xi) = 1/(R - \xi)$ と置く.

次の補題が成り立つ:

補題 6 任意のコンパクト集合 $\mathcal{K} \subset \hat{\mathcal{X}}_a$ に対し, 定数 $c > 0$ が存在して任意の $p \in \mathbb{N}, \zeta \in \mathcal{K}, m = 4, 6, 8, \dots, \sigma' \in \Omega_{R'}^{m-2}$ に対して,

$$(10) \quad \partial_1^p \{ \sigma_3 \sigma_5 \cdots \sigma_{m-1} u_m(\zeta, \sigma', x'') \} \\ \ll \sum_{i+j \leq (m-2)/2} c^{m+p} (p+i)! D^j \Phi(\xi), \quad \xi = \sum_{j=2}^n x_j.$$

$0 < r_0 < R$ を満たす定数 r_0 を選ぶ. このとき任意の $(\zeta, \sigma') \in \mathcal{K} \times \Omega_{R'}^{m-2}, x'' \in \{x''; \sum_{j=2}^n |x_j| < r_0\}$ に対し,

$$|\sigma_3 \sigma_5 \cdots \sigma_{m-1} u_m| \leq \sum_{i+j \leq (m-2)/2} c^m i! \frac{j!}{(R - r_0)^{j+1}}$$

が成り立つ. $i!j! \leq (m/2)!$ だから, $r = r_0/(n-1)$ と置けば定理 2 の証明が終わる.

4 幾何学的準備

関数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $f(z) = z^q + 1$ とする. $K = f^{-1}(2S^1) = \{z; |z^q + 1| = 2\} \subset \mathbb{C}^*$ と置く. f は $\mathbb{C}^* \supset K$ において局所的には微分同相なので, K は滑らかな単純閉曲線である.

滑らかな曲線 $\alpha_p: I \rightarrow K$ ($0 \leq p \leq q-1$) を

$$\begin{aligned} f \circ \alpha_p(t) &= 2\beta(t), \\ \alpha_p(0) &= \beta(p/q), \quad \alpha_p(1) = \beta((p+1)/q), \\ 2\pi ip/q &\leq \arg \alpha_p(t) \leq 2\pi i(p+1)/q \end{aligned}$$

で定義する. ここで $\beta(t) = \exp(2\pi it)$ と置いている. $K = \bigcup_{p=0}^{q-1} \alpha_p$ である. さらに $\alpha_{p \pm nq} = \alpha_p$ ($n \in \mathbb{Z}$) と置く. α_p は任意の整数 p に対して定義されたことになる. $\alpha_p^{-1}(t) = \alpha_p(1-t)$ と置く.

$\omega_0, \dots, \omega_{q-1}$ を $\omega_p = \beta((2p+1)/2q)$, $0 \leq p \leq q-1$, で定義された -1 の q 乗根とし, L_p を 0 と ω_p をつなぐ線分とする. すなわち

$$L_p = \{z = t\omega_p \in \mathbb{C}; t \in I\}, \quad I = [0, 1],$$

である. ここで $L = \bigcup_{p=0}^{q-1} L_p$ と定めると, 明らかに $L = \{z; -1 \leq z^q \leq 0\}$, $f: \mathbb{C} \setminus L \rightarrow \mathbb{C} \setminus I$ である.

$\mathbb{C} \setminus I$ の $2S^1$ への変位レトラクション $R: (\mathbb{C} \setminus I) \times I \rightarrow \mathbb{C} \setminus I$ を

$$R(z, s) = (1-s)z + 2s \frac{z}{|z|}, \quad (z, s) \in (\mathbb{C} \setminus I) \times I,$$

で定義する. 極座標で書けば

$$R(r \exp(i\theta), s) = ((2-s)r + s) \exp(i\theta), \quad (r \exp(i\theta), s) \in (\mathbb{C} \setminus I) \times I,$$

であり, $|R(z, \cdot)|$ は単調である.

$R'(z, 0) = z$ となる連続写像 $R': (\mathbb{C} \setminus L) \times I \rightarrow \mathbb{C} \setminus L$ であつて $(z, s) \in (\mathbb{C} \setminus L) \times I$ に対して

$$(11) \quad (f \circ R')(z, s) = R(f(z), s) = (1-s)f(z) + 2s \frac{f(z)}{|f(z)|}$$

を満たすものが一意に存在する. $z \in \mathbf{C} \setminus L$ が

$$S(p) = \{z; 2\pi p/q \leq \arg z < 2\pi(p+1)/q\} \subset \mathbf{C}^*, \quad 0 \leq p \leq q-1,$$

に属するならば, $R'(z, s)$ もやはり $S(p)$ に属する. 写像 R' は $\mathbf{C} \setminus L$ から K への変位レトラクションである. より詳しく言えば $0 \leq p \leq q-1$ について, R' は $(\mathbf{C} \setminus L) \cap S[p] = S[p] \setminus L_p$ から α_p への変位レトラクションを誘導する. ここで $S[p] = \{z; 2\pi p/q \leq \arg z \leq 2\pi(p+1)/q\} \subset \mathbf{C}^*$ と置いた.

局所的には, f は微分同相だから

$$R'(z, s) = f^{-1} \circ R(f(z), s)$$

と書ける. すなわち R' は R から座標変換で得られる. このことから R' が滑らかであることが分かる. 明らかに $|f(R'(z, \cdot))| = |R(f(z), \cdot)|$ は単調である.

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \gamma(0) = 0, t \neq 0 \text{ のとき } \gamma(t) \notin L \text{ であり,} \\ \text{ある } \varepsilon > 0 \text{ と } \arg \text{ のある分枝に関して,} \\ 0 < t < \varepsilon \text{ のとき } -\pi/q < \arg \gamma(t) < \pi/q \end{array} \right.$$

を満たす曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbf{C}$ を考えよう. 後者の条件は $\gamma(]0, \varepsilon[)$ が L_{-1} と L_0 の間の角領域に入ることを意味する. ($L_{-1} = L_{q-1}$ と置いた.)

(*) と $\gamma(1) = \gamma'(1)$ を満たす 2 本の曲線 γ と γ' が (*)-ホモトピックであるとは, $t \neq 0$ のとき $H(s, t) \notin L$ であり, 任意の $t \in I$ に対して $H(0, t) = \gamma(t), H(1, t) = \gamma'(t)$ を満たす連続写像 $H(s, t): I \times I \rightarrow \mathbf{C}$ が存在することをいう. γ と γ' が (*)-ホモトピックのとき, $\gamma \sim \gamma'$ と書く. 明らかに \sim は同値関係である.

(*) を満たす曲線 γ は曲線 $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ に (*)-ホモトピックである. ここで

$$\gamma_1(t) = t,$$

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \lambda_j(Jt - j + 1), & (j-1)/J \leq t \leq j/J, 1 \leq j \leq [J], \\ \lambda_{[J]+1}(Jt - [J]), & [J]/J \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\gamma_3(t) = R'(\gamma(1), 1-t),$$

$$(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)(t) = \begin{cases} \gamma_1(4t), & 0 \leq t \leq 1/4, \\ \gamma_2(4t-1), & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_3(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

と置いた. ただし $\lambda_k = \alpha_{k-1} (1 \leq k \leq [J] + 1)$ または $\lambda_k = \alpha_{-k}^{-1} (1 \leq k \leq [J] + 1)$ である.

明らかに $|f \circ \gamma_1(t)|$ は 1 から 2 まで増加し, $|f \circ \gamma_2(t)| \equiv 2$ である. さらに $|f \circ \gamma_3(t)|$ は単調であって, その値は 2 から $|f(\gamma(1))|$ まで変化する.

(*) を満たす曲線たちの集合を考え, 同値関係 \sim による商空間を $\mathcal{R}(\mathbb{C} \setminus L)$ とする. $\pi_L : \mathcal{R}(\mathbb{C} \setminus L) \rightarrow \mathbb{C} \setminus L, \hat{z} = [\gamma] \mapsto z = \gamma(1)$ を標準射影とする.

$\mathcal{R}(\mathbb{C} \setminus L)$ は, $\mathbb{C} \setminus L$ の普遍被覆空間と同一視される. 普遍被覆空間の構成法の一つは, 点 1 から出る全ての曲線 $\subset \mathbb{C} \setminus L$ のホモトピーによる商を取ることである. こうして構成されたものを $(\mathbb{C} \setminus L)^\sim$ とすると, $\mathcal{R}(\mathbb{C} \setminus L)$ は $(\mathbb{C} \setminus L)^\sim$ と次の対応によって同一視される: $l(t) = 1 - t, t \in I$, と置き, γ が (*) を満たすならば, それに $l\gamma$ を適当に変形したものを対応させる. ここで

$$\begin{cases} (l\gamma)(t) = l(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ (l\gamma)(t) = \gamma(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

である.

$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ は γ の(*)-ホモトピー・クラスだけに依存するから, 連続写像

$$\begin{aligned} F : \mathcal{R}(\mathbb{C} \setminus L) \times I &\rightarrow Z, \\ Z &= \{z \in \mathbb{C}; f(z) = z^q + 1 \neq 0\} \subset \mathbb{C}, \end{aligned}$$

を上記の要領で定義できる. 明らかに

$$F : \mathcal{R}(\mathbb{C} \setminus L) \times (I \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus L$$

である. $\hat{z} \in \mathcal{R}(\mathbb{C} \setminus L)$ に対して

$$F(\hat{z}, 0) = 0, \quad F(\hat{z}, 1) = \pi_L(\hat{z}) = z \in \mathbb{C} \setminus L$$

が成り立つ. 連続写像 $G : \mathcal{R}(\mathbb{C} \setminus L) \times I \rightarrow \mathbb{C}^*$ を

$$G^q = f \circ F = F^q + 1, \quad G(\hat{z}, 0) = 1$$

で定めると, $G(\hat{z}, 1)^q = f(z), z = \pi_L(\hat{z})$ が成り立つ.

後で連続写像

$$H = F/G : \mathcal{R}(\mathbb{C} \setminus L) \times I \rightarrow \mathbb{C}$$

が必要になる.

5 単体 $S_m(\hat{z}, \cdot)$

m を正の偶数とする. $1 \leq j \leq m$ のとき, 写像 $S_m = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) : \mathcal{R}(\mathbf{C} \setminus L) \times \Delta_m \rightarrow \mathbf{C}_\sigma^m$ を

$$\begin{aligned} \xi_j &= F(\hat{z}, t_j), \eta_j = G(\hat{z}, t_j) && (j \text{ が偶数のとき}), \\ \xi_j &= H(\hat{z}, t_j), \eta_j = G(\hat{z}, t_j)^{-1} && (j \text{ が奇数のとき}), \\ \sigma_j &= \sigma_j(\hat{z}, t) = \xi_j \prod_{i=j+1}^m \eta_i \end{aligned}$$

で定義する. ここで $\prod_{i=m+1}^m \eta_i = 1$ と置いている. これらの関数は連続であり, 区分的に滑らかである.

Δ_m の面を $\Delta_m^j = \{t \in \Delta_m; t_j = t_{j+1}\} (0 \leq j \leq m)$, $t_0 \equiv 0$, $t_{m+1} \equiv 1$, で表し, $H^j(z) = \{\sigma \in \mathbf{C}_\sigma^m; \sigma_j = \sigma_{j+1}\} (0 \leq j \leq m)$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_{m+1} = z$, で定義される \mathbf{C}_σ^m の超平面の族を導入する.

補題 7 $m = 2, 4, 6, \dots$ に対し, 次が成り立つ.

$$(12) \quad \psi_{k,l} \circ S_m = - \left(\prod_{i=k}^m \eta_i^q - \prod_{i=l+1}^m \eta_i^q \right), \quad 1 \leq k \leq l \leq m,$$

$$(13) \quad 1 - \psi_{k,m}(S_m(\hat{z}, t)) = \prod_{i=k}^m \eta_i^q \neq 0, \quad 1 \leq k \leq m,$$

$$(14) \quad S_m(\hat{z}, \Delta_m^j) \subset H^j(z), \quad 0 \leq j \leq m, \quad z = \pi_L(\hat{z}).$$

$1 \leq j \leq m$ のとき $s_j = |\eta_j|$ と置く.

補題 8 k が $1 \leq k \leq m$ を満たす整数のとき,

$$\min \left(1, \frac{|f(z)|}{2} \right) \leq \left(\prod_{j=k}^m s_j \right)^q \leq \max(4, |f(z)|).$$

補題 9 c が非負定数のとき,

$$\left(\prod_{j=1}^m s_j^{j+c} \right)^q \leq \max(|f(z)|^{m+c}, 2^{4m+3c-1}, 2^{3m+2c-1} |f(z)|^{-(m+c)}).$$

補題 10

$$(15) \quad |\sigma_j(\hat{z}, t)|^q \leq 2 \max(4, |f(z)|).$$

証明 $\xi_j^q = (-1)^{m-j}(\eta_j^q - 1)$ なので,

$$\begin{aligned} |\sigma_j^q| &= |\xi_j^q \prod_{i=j+1}^m \eta_i^q| = |\eta_j^q - 1| \prod_{i=j+1}^m |\eta_i^q| \\ &\leq \prod_{i=j}^m |\eta_i|^q + \prod_{i=j+1}^m |\eta_i|^q = \prod_{i=j}^m s_i^q + \prod_{i=j+1}^m s_i^q \end{aligned}$$

である。後は補題 8 を適用すればよい。

証了

補題 11 $\mathcal{R}(C \setminus L)$ の任意のコンパクト集合 \mathcal{L} に対して, 正定数 $C = C_{\mathcal{L}}$ が存在して, 任意の $\hat{z} \in \mathcal{L}$, $m = 2, 4, 6, \dots$, $t \in \Delta_m$, j について

$$|\sigma_j(\hat{z}, t)| \geq Ct_j$$

が成り立つ。

証明 補題 8 より,

$$(16) \quad \left| \prod_{i=j+1}^m \eta_i \right| \geq (\min(1, |f(z)|/2))^{1/q}$$

が成り立つ。よって

$$(17) \quad |\sigma_j| \geq |\xi_j| (\min(1, |f(z)|/2))^{1/q}$$

となる。一方 $\xi_j(\hat{z}, t)$ は $F(\hat{z}, t_j)$ または $(F/G)(\hat{z}, t_j)$ に等しく, $|G(\hat{z}, t_j)| \leq \max(2^{1/q}, |f(z)|^{1/q})$ だから,

$$(18) \quad |\xi_j(t)| \geq |F(\hat{z}, t_j)| \min(2^{-1/q}, |f(z)|^{-1/q})$$

を得る。(17) と (18) を用いて,

$$|\sigma_j| \geq |F(\hat{z}, t_j)| \min(2^{-1/q}, |f(z)|^{-1/q}) (\min(1, |f(z)|/2))^{1/q}$$

となる。正定数 $C' = C'_{\mathcal{L}}$ が存在して, $|F(\hat{z}, t)| \geq C't$ が任意の $(\hat{z}, t) \in \mathcal{L} \times I$ に対して成り立つことから補題が導かれる。

証了

S_m に関するいくつかの評価を導こう。

ヤコビ行列 $\partial S_m / \partial t = (\partial \sigma_i / \partial t_j)_{1 \leq i, j \leq m}$ は上三角で, その行列式は

$$\det \frac{\partial S_m}{\partial t} = \prod_{j=1}^m \frac{d\xi_j(t_j)}{dt_j} \cdot \prod_{j=2}^m \eta_j(t_j)^{j-1}$$

である. 明らかに

$$\begin{aligned} d\sigma_{(m)} &= d\sigma_1 \wedge \cdots \wedge d\sigma_m \\ &= \prod_{j=1}^m \frac{d\xi_j(t_j)}{dt_j} \cdot \prod_{j=2}^m \eta_j(t_j)^{j-1} \cdot dt_1 \wedge dt_2 \cdots \wedge dt_m. \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで

$$\begin{aligned} \text{Mes } S_m(\hat{z}, \cdot) &= \int_{\Delta_m} \frac{|d\sigma_{(m)}|}{|\sigma_3 \sigma_5 \cdots \sigma_{m-1}|} \\ &= \int_{\Delta_m} \frac{1}{|\sigma_3 \sigma_5 \cdots \sigma_{m-1}|} \left| \det \frac{\partial S_m(\hat{z}, t)}{\partial t} \right| dt_1 dt_2 \cdots dt_m \end{aligned}$$

と置く.

命題 1 $\mathcal{R}(\mathbf{C} \setminus L)$ の任意のコンパクト集合 \mathcal{L} に対して正定数 $C_2 = C_{2, \mathcal{L}}$ が存在して, 任意の $m = 2, 4, 6, \dots$ と $\hat{z} \in \mathcal{L}$ について

$$\text{Mes } S_m(\hat{z}, \cdot) \leq C_2^{m+1} \left\{ \left(\frac{m}{2} \right)! \right\}^{-2} \left(\frac{m}{2} + 1 \right)^{-1}.$$

証明 [8] と同様の計算により,

$$d\sigma_{(m)} = \bigwedge_{j=1}^m \eta_j^{j+(q-1)/2} G(\hat{z}, t_j)^{-(q+1)/2} dF(\hat{z}, t_j).$$

である. 補題 9 から, 正定数 $C_3 = C_{3, \mathcal{L}}$ が存在して, 任意の $(\hat{z}, t) \in \mathcal{L} \times \Delta_m$ について

$$\prod_{j=1}^m |\eta_j^{j+(q-1)/2}| \leq C_3^{m+1}, \quad |G(\hat{z}, t_j)|^{-1} \leq C_3, \quad |dF(\hat{z}, t_j)/dt_j| \leq C_3$$

である. よって命題は補題 11, 補題 1 および (5) から従う.

証了

6 単体 $T_m(\hat{x}, \cdot)$

\mathcal{O} は次の式で定義された \mathbf{C}^{n+1} の原点の開近傍とする:

$$\mathcal{O} = \{x \in \mathbf{C}^{n+1}; \max_{0 \leq j \leq n} |x_j| < \delta\}, \quad \delta > 0.$$

$X = \mathcal{O} \setminus (K_0 \cup K_1)$ と置き, $\tilde{X} \rightarrow X, \tilde{x} \mapsto x = \pi_X(\tilde{x})$ をその普遍被覆空間とする. それは, $\gamma(0) = y$ を満たす全ての曲線 $\gamma: I \rightarrow X$ の集合のホモトピーによる商である. $\tilde{y} \in \tilde{X}$ を $\gamma_y(t) \equiv y(t \in I)$ のクラスとすると, $\pi_X(\tilde{y}) = y$ である.

\tilde{X} 上で $(-k_0(x))^{-1/q}$ の分枝を選ぼう. 選び方は後で特定する. その $\tilde{x} \in \tilde{X}$ における値を $(-k_0(\tilde{x}))^{-1/q}$ と表す. $Z = \{z \in \mathbf{C}; z^q + 1 \neq 0\}$ を思い出そう. $\hat{Z} \rightarrow Z, \hat{z} \mapsto z = \pi_Z(\hat{z})$ をその普遍被覆空間とする. 空間 \hat{Z} は, $\gamma(0) = 0 \in Z$ を満たす全ての曲線 $\gamma: I \rightarrow Z$ の集合の, ホモトピーによる商である. 単射 $\mathcal{R}(\mathbf{C} \setminus L) \rightarrow \hat{Z}$ が well-defined である. $\gamma_0(t) \equiv 0, t \in I$, で定義される曲線 γ_0 のクラスを $\hat{0} \in \hat{Z}$ とする.

正則関数

$$g: \tilde{X} \rightarrow Z, \quad \tilde{x} \mapsto x_0(-k_0(\tilde{x}))^{-1/q}$$

を導入する. 明らかに $h(x) = g(\tilde{x})^q$ である.

$\hat{g}: \tilde{X} \rightarrow \hat{Z}$ を

$$\pi_Z \circ \hat{g} = g, \quad \hat{g}(\tilde{y}) = \hat{0}$$

を満たす(ただ一つの)正則関数とする.

$$(**) \quad \gamma(0) = y \in A_0, \quad t \neq 0 \text{ のとき } \gamma(t) \notin A_0$$

を満たす曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathcal{O}$ を考えよう. $(**)$ と $\gamma(1) = \gamma'(1)$ を満たす2つの曲線 γ と γ' が $(**)$ -ホモトピックであるとは, $t \neq 0$ のとき $H(s, t) \notin A_0$ であり, 任意の $t \in I$ に対して $H(0, t) = \gamma(t), H(1, t) = \gamma'(t)$ を満たす連続写像 $H(s, t): I \times I \rightarrow \mathcal{O}$ が存在することをいう. γ と γ' が $(**)$ -ホモトピックのとき $\gamma \simeq \gamma'$ と書く.

$(**)$ を満たす全ての曲線の集合を考える. \simeq による商を \mathcal{U} とし, $\hat{x} = [\gamma] \mapsto x = \pi_{\mathcal{U}}(\hat{x}) = \gamma(1)$ を標準射影とする. 写像 $\mathcal{U} \rightarrow \tilde{X}, \hat{x} \mapsto \tilde{x}$ が well-defined であり, $(-k_0)^{-1/q}$ の分枝をうまく選ぶと, 正則写像

$$\hat{g}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{C} \setminus L) \subset \hat{Z}, \quad \hat{x} \mapsto \hat{g}(\hat{x}) = \hat{g}(\tilde{x})$$

が誘導される.

2つの正則関数 $g(\hat{x}) = g(\tilde{x}): \mathcal{U} \rightarrow Z$ と $(-k_0(\hat{x}))^{1/q} = (-k_0(\tilde{x}))^{1/q}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{C}^*$ が同様に誘導され,

$$\pi_L(\hat{g}(\hat{x})) = \pi_Z(\hat{g}(\hat{x})) = g(\tilde{x}) = g(\hat{x})$$

が成り立つ.

\mathcal{U} は $\mathcal{O} \setminus A_0$ の (一つの) 普遍被覆空間であることを示そう。

$\bar{x} = ((-y_1)^{1/q}, y_1, 0) \in \mathcal{O} \setminus A_0$ を基点として通常の方法で作った普遍被覆空間を $(\mathcal{O} \setminus A_0)^\sim$ とする. $h(\bar{x}) = 1$ に注意しよう. $\bar{\gamma}(t) = (1-t)\bar{x} + ty$, $t \in I$, で $\bar{\gamma}$ を定義する. (**) を満たす γ に対し $\bar{\gamma}\gamma$ を適当に変形したものを対応させる. このようにして位相同型 $\mathcal{U} \rightarrow (\mathcal{O} \setminus A_0)^\sim$ が定義され, \mathcal{U} に複素多様体の構造が入る.

連続写像 $T_m : \mathcal{U} \times \Delta_m \rightarrow \mathbf{C}_\sigma^m$ ($m = 2, 4, 6, \dots$) を

$$T_m(\hat{x}, t) = (-k_0(\hat{x}))^{1/q} S_m(\hat{g}(\hat{x}), t)$$

で定義する. その成分を $\sigma_j(\hat{x}, t)$ ($1 \leq j \leq m$) と表す. ($\sigma_j(\hat{z}, t)$ とは $(-k_0)^{1/q}$ 倍だけ違う.) $C_m^1 : \mathcal{U} \times \Delta_m \rightarrow \mathbf{C}^2$ を

$$C_m^1(\hat{x}, t) = (\sigma_1(\hat{x}, t), \varphi_m(T_m(\hat{x}, t), x))$$

で定義する.

$$(19) \quad \varphi_m(T_m(\hat{x}, t), x) = k_0(x) \prod_{i=1}^m \eta_i^q$$

であることに注意しよう.

命題 2 任意の $(\hat{x}, t) \in \mathcal{U} \times \Delta_m$ に対して,

$$(20) \quad C_m^1(\hat{x}, t) \in \mathcal{X} = \{(\zeta_0, \zeta_1); \zeta_1(\zeta_1 - \zeta_0^q) \neq 0\},$$

$$(21) \quad T_m(\hat{x}, \Delta_m^j) \subset H^j(x_0), \quad 0 \leq j \leq m.$$

他方, (19), (15), (12) と補題 8 より,

$$(22) \quad |\varphi_m(T_m(\hat{x}, t), x)| \leq \max(4|k_0(x)|, |k_1(x)|),$$

$$(23) \quad |\sigma_j(\hat{x}, t)|^q \leq 2 \max(4|k_0(x)|, |k_1(x)|),$$

$$(24) \quad |(\psi_{2,l} \circ T_m)(\hat{x}, t)| \leq 2 \max(4|k_0(x)|, |k_1(x)|)$$

である.

$\delta > 0$ が十分小さければ, 任意の $(\hat{x}, t) \in \mathcal{U} \times \Delta_m$ に対して,

$$(25) \quad C_m^1(\hat{x}, t) \in \mathcal{X}_b \subset \mathcal{X}_a$$

である. ここで $0 < b < a$ であり,

$$(26) \quad \sigma'(\hat{x}, t) \in \Omega_r^{m-2},$$

$$(27) \quad x \in \mathcal{O} \Rightarrow x'' \in D_r^{n-1}$$

である. よって定理 2 を使うことができる. 次に \mathcal{X} の普遍被覆空間への C_m^1 の持ち上げを定義しよう. 明らかに $\bar{\gamma}^{-1}(t) = t\bar{x} + (1-t)y$ は (***) と $\bar{\gamma}^{-1}(0) = y, \bar{\gamma}^{-1}(1) = \bar{x}$ を満たす曲線である. $\hat{x} \in \mathcal{U}$ をその (***)-ホモトピー・クラスとしよう. このとき $C_m^1(\hat{x}, 0) = (0, y_1) \in \mathcal{X}$ である. $(0, y_1)$ を基点とする \mathcal{X} の普遍被覆空間 $\pi_{\mathcal{X}}: \hat{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ を構成しよう. 曲線 $\gamma_{y_1}(t) \equiv (0, y_1)$ を考え, \hat{y}_1 を $\hat{\mathcal{X}}$ におけるそのホモトピー・クラスとする. 明らかに $\pi_{\mathcal{X}}(\hat{y}_1) = (0, y_1)$ である.

$\mathcal{U} \times \Delta_m$ は単連結だから, 連続写像

$$\hat{C}_m^1: \mathcal{U} \times \Delta_m \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$$

であって, $C_m^1 = \pi_{\mathcal{X}} \circ \hat{C}_m^1, \hat{C}_m^1(\hat{x}, 0) = \hat{y}_1$ を満たすものが一意に存在する.

補題 12 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathcal{U}$ に対し, コンパクト集合 $\mathcal{K} \subset \hat{\mathcal{X}}$ が存在して,

$$\hat{C}_m^1(K \times \Delta_m) \subset \mathcal{K}$$

が任意の $m = 2, 4, 6, \dots$ に対して成り立つ.

$$\begin{aligned} \text{Mes } T_m(\hat{x}, \cdot) &= \int_{\Delta_m} \frac{|d\sigma_{(m)}|}{|\sigma_3\sigma_5 \cdots \sigma_{m-1}|} \\ &= \int_{\Delta_m} \frac{1}{|\sigma_3(\hat{x}, t) \cdots \sigma_{m-1}(\hat{x}, t)|} \left| \det \frac{\partial T_m(\hat{x}, \cdot)}{\partial t} \right| dt_1 dt_2 \cdots dt_m \end{aligned}$$

と置く. 次の命題は補題 11 と命題 1 から従う.

命題 3 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathcal{U}$ に対し, 正定数 $c(K)$ と $C(K)$ が存在して, 任意の $m = 2, 4, 6, \dots, \hat{x} \in K$ に対して

$$(28) \quad |\sigma_j(\hat{x}, t)| \geq c(K) t_j,$$

$$(29) \quad \text{Mes } T_m(\hat{x}, \cdot) \leq C(K)^{m+1} \left\{ \left(\frac{m}{2} \right)! \right\}^{-2} \left(\frac{m}{2} + 1 \right)^{-1}$$

が成り立つ.

7 解析接続

$m = 2, 4, 6, \dots$ を固定したとき,

$$\begin{aligned} F(\sigma, x) &= u_m(\sigma_1, \varphi_m(\sigma, x), \sigma', x''), \\ \omega(\sigma, x) &= F(\sigma, x) d\sigma_{(m)} \end{aligned}$$

と置く.

$I_m(x) = \int_{S_m(x_0)} \omega(\sigma, x)$ が存在して x について正則であることを思い出そう. $\int_{T(\hat{x}, \cdot)} \omega(\sigma, x)$ が存在することが, (28), 補題 5, (5) より分かる.

もし $\hat{x} \in \mathcal{U}$ が y の十分近くにある曲線で代表されるならば, \hat{x} は y の近くの点 $x = \pi_{\mathcal{U}}(\hat{x}) \in \mathcal{O} \setminus A_0$ と同一視される.

補題 13 関数 $I_m(x)$ は \mathcal{U} まで解析接続され,

$$\begin{aligned} I_m(\hat{x}) &= \int_{T_m(\hat{x}, \cdot)} \omega(\sigma, x) \\ &= \int_{\Delta_m} u_m(\hat{C}_m^1(\hat{x}, t), \sigma'(\hat{x}, t), x'') \det \frac{\partial T_m}{\partial t} dt \end{aligned}$$

と表される.

証明 おおむね Stokes の定理によるが, 有理型関数を扱っているから切り落としの関数を使わねばならない. 詳細は省略する. 証了

8 定理 1 の証明

まず $j = 0$ の場合を示す. 補題 12 と (25) より, 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathcal{U}$ に対し, $\hat{C}_m^1(K \times \Delta_m)$ は全ての $m = 2, 4, 6, \dots$ について共通のコンパクト集合 $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}_a$ に含まれる. 定理 2, (26), (27), (29) より, 任意の $\hat{x} \in K$ に関して,

$$\begin{aligned} |I_m(\hat{x})| &\leq c_{\mathcal{K}}^{m+1} \cdot \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{m}{2}\right)! \cdot C(K)^{m+1} \left\{ \left(\frac{m}{2}\right)! \right\}^{-2} \left(\frac{m}{2} + 1\right)^{-1} \\ &\leq \{c_{\mathcal{K}} C(K)\}^{m+1} \left\{ \left(\frac{m}{2}\right)! \right\}^{-1} \end{aligned}$$

と評価できる. よって $\sum_{m=2,4,\dots} I_m(\hat{x})$ は \mathcal{U} で収束する. これで $j = 0$ の場合が示された.

次に $j = 1$ の場合を示す. 実は $j = 0$ の場合の系となっている.

$$\begin{cases} y_0 = x_0, \\ y_1 = -x_1 + x_0^q, \\ y_j = x_j \end{cases} \quad (j = 2, 3, \dots, n)$$

で定義される座標変換 $y = \varphi(x)$ によって, 超曲面 K_0 と K_1 は入れ替わり, T は不変である. $\varphi^2 = \text{id}$ であり,

$$\begin{cases} D_{x_0} = D_{y_0} + qy_0^{q-1}D_{y_1}, \\ D_{x_1} = -D_{y_1}, \\ D_{x_j} = D_{y_j} \end{cases} \quad (j = 2, 3, \dots, n)$$

である. よって, ある \tilde{a}_j と \tilde{b} に関して

$$a(x, D) = y_0(D_{y_0} + qy_0^{q-1}D_{y_1})D_{y_0} + \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j(y)D_{y_j} + \tilde{b}(y)$$

が成り立ち, $j = 0$ の場合を y 変数について適用できる.

$$\tilde{h}(y) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{y_0^q}{y_1} = \frac{x_0^q}{x_1 - x_0^q} = \frac{-h(x)}{1 + h(x)}$$

となって,

$$\begin{aligned} -1 \leq \tilde{h}(y) \leq 0 \quad \text{または} \quad \tilde{h}(y) = \infty \\ \Leftrightarrow h(x) \geq 0 \quad \text{または} \quad h(x) = \infty \quad \text{または} \quad h(x) = -1 \end{aligned}$$

を得る. すなわち変換 φ は A_0 と A_1 を入れ替える. これで定理 1 の証明が終わった.

参考文献

- [1] Baouendi M. S. and Goulaouic G., Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, *Comm. Pure Appl. Math.*, **26**(1973), 455-475.
- [2] Bott R. and Tu L. W., "Differential Forms in Algebraic Topology", Springer-Verlag, New York, 1982.

- [3] Fujiié S., Singular Cauchy problems of higher order with characteristic surface, *J. Math. Kyoto Univ.*, **33**(1993), 1-27.
- [4] Kobayashi T., On the singularities of the solution to the Cauchy problem with singular data in the complex domain, *Math. Ann.*, **269**(1984), 217-234.
- [5] Ouchi S., Singularities of solutions of equations with noninvolutive characteristics-I; the case of second order Fuchsian equations, *J. Math. Soc. Japan*, **45**(2)(1993), 215-251.
- [6] Tahara H., Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, *Japan. J. Math.*, **5**(1979), 245-347.
- [7] Urabe J., Meromorphic representations of the solutions of the singular Cauchy problems II, *J. Math. Kyoto Univ.*, **28-2**(1988), 335-342.
- [8] Wagschal C., Problème de Cauchy ramifié pour une class d'opérateurs à caractéristiques tangentes (I), *J. Math. pures et appl.*, **67**(1988), 1-21.
- [9] Yamane H., Singularities in Fuchsian Cauchy problems with holomorphic data, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **34**(2)(1998), 179-190.
- [10] Yamane H., Ramified Cauchy problem for a class of Fuchsian operators with tangent characteristics, to appear in *J. Math. pures et appl.*