数理解析研究所講究録
1160 巻 2000 年 80-85

On a family of cubic Thue inequalities

成蹊大学工　若林　功 (Isao Wakabayashi)

序

目標. a, b, k を自然数とするとき，３次の不定方程式

$$|x^3 + axy^2 - by^3| \leqq k \tag{1}$$

を解くこと．解は整数の範囲で求める．

Thue[T1] は 1909 年に，３次以上の２変数斉次多項式＝定数，という不定方程式の解の個数は自然な仮定の下で有限個であることを示した．彼にちなんでこのような方程式は一般に Thue 方程式と呼ばれていて，上は Thue 不等式と言ってよいものである．この方程式の形は，パラメータ a の符号についての制限を別にすれば，３次 Thue 方程式として最も一般の形のものである．

方程式 (1) のパラメータについての仮定の内，$b > 0$ という仮定は制限にはならない．実際，y を $-y$ に変えると b は $-b$ に変わるので．しかし，$a > 0$ という仮定は強い仮定である．実際このときは，$f(x) = x^3 + ax - b = 0$ は実根をただ一つのみもち，このことから方程式 (1) は易しくなっている．$a < 0$ のときは，３根共実数になる可能性があり，新たに現れる２実根については，我々の方法ではその性質を知ることができず，(1) は取り扱えなくなる．

パラメータ a, b, k を固定すると，Baker の方法 [Ba]，すなわち，代数的数の対数の１次結合に関する結果を用いる方法を用いれば，(1) の解の絶対値の上界を得ることができる．そしてパラメータが小さいときには計算機により解を求めることができる．しかし，一般にこの上界は非常に大きくなるので，パラメータを含む方程式 (1) を扱うためには，我々はより良い評価を与える別の方法，すなわち Padé 近似の方法を用いる．Padé 近似の方法は，全ての Thue 方程式に適用できるわけではなく，適用範囲は非常に限られてはいる

が，それが適用できる場合には一般に非常に良い評価を得ることができ，我々の方程式(1)についても，新しいアイデアを用いることによって，Padé 近似の方法を適用することが可能なのである．なお，Padé 近似の方法を用いて不定方程式を扱ったものに，Thue[T2], Siegel[S2]，Wakabayashi[W1,W2] などがある．

これまで Thue 方程式 (1) に関して次のことが知られている．

$b=1,\ k=1$ のとき．

定理 (Delaunay[D1,D2]，Nagell[N])．$a \geqq 2$ とする．このとき，

$$x^3+axy^2-y^3=\pm 1$$

の解は自明な解 $(\pm 1,0)$, $(0,\mp 1)$, $(\pm 1,\pm a)$ のみである．

これは，彼らのより強い定理の系である．すなわち彼らは，３次 Thue 方程式の解の個数は，右辺が１で，対応する非斉次方程式が実根を一つだけもつ場合には，一般に高々３個であることを示した．例外もきちんと列挙されている．その証明は代数的で，解と単数との関係を詳しく調べてなされている．上の定理の方程式は既に３個の自明な解をもち，また列挙されている例外の方程式とも異なるので，解がこれしか無いことが彼らの強い定理の系として直ちに出てくる．

一般の場合の (1) について，Bombieri–van der Poorten–Vaaler[Bo-al] の結果がある（後述）．また，$b=1$ の場合に Chudnovsky[C] の結果がある．

結果

以下，a,b,k を自然数とする．$f(x)=x^3+ax-b=0$ の唯一つの実解をθとおき，$D=4a^3+27b^2=f$ の判別式 $\times(-1)$ とおく．我々の結果は次の通りである．

定理１．$a>2^{2/3}3^4b^{8/3}\left(1+\dfrac{1}{390b^3}\right)^{2/3}$ とする．

$\Rightarrow$　任意の整数 $p,q\ \ (q>0)$ に対して，

$$\left|\theta-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{1.73\cdot 10^6 a^4b^4q^{\lambda(a,b)}}.$$

ここで,

$$\lambda(a,b) = 1 + \frac{\log(4\sqrt{D} + 12\sqrt{6}b)}{\log(\sqrt{D}(1/27b^2 - 1/D))} < 3,$$

かつ，$\lambda(a,b)$ は b を固定すると a の関数として単調減少で，$\lim_{a\to\infty}\lambda(a,b) = 2$.

これが基本となる結果である．方程式 (1) が３次の方程式であることより，応用上 $\lambda(a,b) < 3$ となることが重要である．b を固定し a を大きくすると D が大きくなり，λ の式より $\lambda(a,b) \sim 1 + (\log\sqrt{D})/(\log\sqrt{D}) = 2$ となる．したがって，a が定理の仮定を満たしていると $\lambda(a,b) < 3$ となるのである．

特に，$b = 1$, $a \geqq 129$ あるいは $b = 2$, $a \geqq 817$ のときには $\lambda < 3$ となる．すなわち，b が小さいとき，かなり小さい a に対して既に $\lambda < 3$ となる．

定理１の証明．Padé 近似の方法による．関数 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ の Padé 近似を考え，Padé 近似としては Rickert の積分 [R] を用いる．必要な評価は，留数計算および積分の評価をすることによって得ることができる．この方法に持ち込むためには，３次式の立方完成，すなわち３次式は,

$$x^3 + ax - b = \frac{1}{2}(\alpha(x+\beta)^3 + (\overline{\alpha}(x+\overline{\beta})^3)$$

$$\alpha, \overline{\alpha} = 1 \pm \frac{3\sqrt{3}b}{\sqrt{D}}, \quad \beta, \overline{\beta} = -\frac{3b}{2a} \pm \frac{\sqrt{3D}}{6a}$$

と書けることを用いる．この事実は Siegel も既に [S1] で用いている．

従来の結果との比較. Bombieri は [Bo] において，すべての代数的数に適用できる有理近似の一般的結果を示している．それは，Baker の方法に代わるまったく新しい方法であり，非常に重要な結果である．その応用例として，Bombieri–van der Poorten–Vaaler[Bo-al] は定理１と類似の結果を得ている．彼らの結果は (1) における係数 a, b が一般の代数的数である場合に対する結果であり，我々のものよりより一般的な結果である．しかし，有理整数の場合に限れば，彼らの結果では $\lambda(a,b) < 3$ となるためには，$a > e^{1000}$, $a > b^2$ が必要であり，例えば $b = 1, 2$ のとき，我々の仮定と比べると a はあまりにも大きな数である．しかも，定理１にある q^λ の係数については，彼らは計算可能な定数というだけで

実際には求めていない．また，彼らのλの値は

$$\lambda(a,b)=\frac{6\log a}{3\log a-2\log b}+\frac{14}{(3\log a-2\log b)^{1/3}}$$

で，a が b に比して大きいときは

$$\lambda(a,b)\sim 2+\frac{14}{\sqrt[3]{3}(\log a)^{1/3}}$$

であるが，我々の値は

$$\lambda(a,b)\sim 2+\frac{4\log b+2\log 108}{3\log a}$$

であり，より小さくて良い結果になっている．

定理２．定理１と同じ仮定の下で，(x,y) を (1) の解とする．

$\Rightarrow$

$$|y|<(1.73\cdot 10^6a^3b^4k)^{\frac{1}{3-\lambda(a,b)}}.$$

証明．これは定理１の簡単な帰結である．

このように (1) の解の上界を与えることができたので，(1) はこれで一応解けたと考えてよいであろう．解がこれこれしかない，というように完全に方程式 (1) を解ききるためには，k を具体的に与える必要がある．例として，$k=a+b+1$ とおき，Thue 不等式

$$|x^3+axy^2-by^3|\leqq a+b+1 \tag{2}$$

を考えよう．

定理３．$a\geq 3000b^4$ とする．

$\Rightarrow$ (2) の $y\geqq 0$ かつ $\gcd(x,y)=1$ なる解は自明な解

$$(0,0),\ (\pm1,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (-1,1),\ (b/d,a/d)\ \text{ただし}\ d=\gcd(a,b)$$

のみである．

注．(2) の左辺に $(-1,1)$ を代入すると $a+b+1$ となる．これを考慮して $k=a+b+1$ とおいたのである．

証明．A. M. Legendreによる古典的な連分数の定理によれば，実数ξに対し，$|\xi - p/q| < 1/(2q^2)$ であれば，p/q はξの連分数のどれかになっている．そこで，θの連分数を始めの方からいくつか求め，それらが自明な解を除いて (2) の解になっていないことを確認すれば，(2) の非自明解はそれらより大きいことが分かり，非自明解の下界を得ることができる．この下界は，a が b に比して十分大きいときには，定理２で与えられる解の上界より大きくなることが確認でき，非自明解が存在しないことになる．実際にはより大きな下界を得るために，Legendre の定理を，有理数を分母分子に含む連分数展開について拡張したものを用いる．

さらに $b = 1, 2$ の場合は $a \geqq 1$ に対して (2) を完全に解くことができる．

定理４．$b = 1$ または $b = 2$ とし，$a \geqq 1$ とする．

$\Rightarrow$ (2) の $y \geqq 0$ かつ $\gcd(x, y) = 1$ なる解は，$b = 1$, $1 \leqq a \leqq 3$ および $b = 2$, $2 \leqq a \leqq 7$ の場合を除き，自明な解のみである．また，例外の場合の解は列挙できる．

証明．$b = 1$ の場合は次のようである．

$a \geqq 3000$ のとき．定理３による．

$129 \leqq a < 3000$ のとき．定理２により (2) の解の上界は分かる．そこで各 a についてθの連分数をその分母が解の上界を越える手前まで計算機を用いて計算し，それらが (2) の解になっていないことを確認する．Legendre の定理から，これによって非自明解はないことが分かる．

$1 \leqq a \leqq 128$ のとき．このときは我々の方法では，θについて何の情報も得ることができない．そこでBaker の方法に頼ることになる．実際には，KANT と呼ばれる計算機のソフトウェアを用いる．このソフトウェアは，具体的なThue 方程式の係数を計算機に入力すれば，解を出力してくれる便利なものである．残っていて解かなければならない方程式の個数が多くないので，これが可能なのである．

文　献

[Ba] A. Baker, Contributions to the theory of Diophantine equations: I. On the representation of integers by binary forms, *Phil. Trans. Royal Soc.*, A **263**(1968), 173–191.

[Bo] E. Bombieri, Effective Diophantine approximation on G_m, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, (4) **20**(1993), 61–89.

[Bo-al] E. Bombieri, A. J. van der Poorten and J. D. Vaaler, Effective measures of irrationality for cubic extensions of number fields, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, **23**(1996), 211–248.

[C] G. V. Chudnovsky, On the method of Thue-Siegel, *Ann. of Math.*, **117**(1983), 325–382.

[D-al] M. Daberkow, C. Fieker, J. Klüners, M. Pohst, K. Roegner and K. Wildanger, KANT V4, *J. Symbolic Comp.*, **24**(1997), 267–283.

[D1] B. N. Delone, On the number of representations of a number by a cubic binary form with negative determinant, (in Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR*, (6) **16**(1922), 253–272.

[D2] B. Delaunay, Über die Darstellung der Zahlen durch die binären kubische Formen von negativer Diskriminante, *Math. Z.*, **31**(1930), 1–26.

[N] T. Nagell, Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante, *Math. Z.*, **28**(1928), 10–29.

[R] J. H. Rickert, Simultaneous rational approximations and related diophantine equations, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **113**(1993), 461–472.

[S1] C. L. Siegel, Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, *Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. No.*1, (1929) ; Gesam. Abh. I, 209–266.

[S2] C. L. Siegel, Die Gleichung $ax^n - by^n = c$, *Math. Ann.*, **114**(1937), 57–68 ; Gesam. Abh. II, 8–19.

[T1] A. Thue, Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *J. Reine Angew. Math.*, **135**(1909), 284–305.

[T2] A. Thue, Berechnung aller Lösungen Gewisser Gleichungen von der Form $ax^r - by^r = f$, Kristiania Vidensk. Selsk. Skrifter., I, Mat. Nat. Kl., 1918, No.4,

[W1] I. Wakabayashi, On a family of quartic Thue inequalities I, *J. Number Theory*, **66**(1997), 70–84.

[W2] I. Wakabayashi, On a family of quartic Thue inequalities II, *J. Number Theory*, **80**(2000), 60–88.