数理解析研究所講究録
1160巻 2000年 110-118

The evaluation of the sum over arithmetic progressions for the coefficients of the Rankin-Selberg series

名古屋大学・多元数理科学研究科
市原 由美子 (Yumiko Ichihara)

§1 Introduction

$SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の正規化された Hecke eigen cusp form $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ $(a_n \in \mathbb{R})$ に対して、Rankin [6] は

$$\sum_{n \leq x} a_n^2 = \alpha x^k + O(x^{k-\frac{2}{5}}) \qquad (1)$$

を与えた。ここで α は Petersson 内積 (f, f) の定数倍である。
また、$SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ l の正規化された Hecke eigen cusp form $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi i n z}$ $(b_n \in \mathbb{R})$ と、primitive な mod d の Dirichlet 指標 χ について

$$\sum_{n \leq x} a_n b_n \chi(n) \ll x^{\frac{3}{5}} d^{\frac{4}{5}+\varepsilon} \qquad (2)$$

も分かる。(著者 [3] 参照)

これらの結果は Rankin-Selberg L-関数と呼ばれる L-関数を調べることによって得られたものである。ここでは、Rankin-Selberg L-関数を次のように定義する。

$$L_{f\otimes g}(s, \chi) = L(2s, \chi^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n \chi(n)}{n^{s+\frac{k+l}{2}-1}}, \quad Re(s) > 1$$

ここで χ は mod d の Dirichlet 指標、L は Dirichlet L-関数とする。

Rankin-Selberg L-関数はs-平面全体に解析接続され、$f=g$ かつ $d=1$ の時に $s=1$ で1位の極をもつ他は正則となっている。また、$Re(s)>1$ において Euler 積表示も持っている。

さて、$L_{f\otimes g}(s,\chi)$ は次のようにも書ける。

$$L_{f\otimes g}(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n\chi(n)}{n^s}$$

$$C_n = n^{1-\frac{k+l}{2}} \sum_{m^2|n} a_{\frac{n}{m^2}} b_{\frac{n}{m^2}} m^{k+l-2}$$

よって、C_n についての情報から cusp form の Fourier 係数の情報を導ける。例えば、C_n の Riesz mean (χ は primitive とする)

$$D_\rho(x) = \Gamma(\rho+1)^{-1} \sum_{n\le x} C_n\chi(n)(x-n)^\rho \quad , (\rho\in\mathbb{R})$$

を考えると、Hafner [2] の理論より $D_\rho(x)$ に Voronoi-formula が与えられ、それを調べることによって、$f=g$, $d=1$ の時

$$\sum_{n\le x} C_n = \frac{\pi^2}{6}k_d x + O(x^{\frac{3}{5}}) \tag{3}$$

や、$f\ne g$ 又は $d\ne 1$ の時

$$\sum_{n\le x} C_n\chi(n) \ll x^{\frac{3}{5}} d^{\frac{4}{5}+\varepsilon} \tag{4}$$

が分かる。これらが(1),(2)の本質となっている。(k_d は $L_{f\otimes f}(s)$ の $s=1$ における留数である)

$L_{f\otimes g}(s,\chi)$ は χ が primitive の時は関数等式を持ち解析的に扱いやすく、今後、様々なことが調べられる期待ができる。

今回は、次の和について調べた結果を紹介する。

$$\sum_{\substack{n\le x \\ n\equiv a\,(p^r)}} C_n$$

ここで、p は素数で $(a,p)=1$ とする。$r\ge 1$ は自然数。

この和を調べる前に、まず c_n について分かっていることを述べておく。まず Deligne による a_n, b_n の評価からすぐに $c_n \ll n^{\varepsilon}$ が分かる。また更に、$\sum_{x-y\leq n\leq x} |c_n| \ll y$, $(x^{\varepsilon} < y \leq x)$ も Ivić-Matsumoto-Tanigawa [4] や著者 [3] により得られている。

実は $p \geq x^{\frac{1}{4}}$ という条件のもとでは $\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv a(p)}} c_n \ll x^{\frac{3}{5}+\varepsilon}p^{\frac{3}{5}}$ はすぐに分かり、($\sum_{0\leq n\leq x}|c_n| \ll x$ を利用)、$p \leq x^{\frac{1}{4}}$ に関しては次の積分表示

$$\sum_{n\leq x} c_n \chi(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{1+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT} \frac{x^s}{s} L_{f\otimes g}(s,\chi)\, ds + O(x^{1+\varepsilon}T^{-1} + x^{\varepsilon})$$

をもとに、φ を Euler 関数、χ_0 を mod p の principal character として、

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv a(p)}} c_n &= \frac{1}{\varphi(p)}\sum_{n\leq x} c_n\chi_0(n) \\ &\quad + \frac{1}{\varphi(p)}\sum_{\substack{\chi \bmod p\\ \chi\neq\chi_0}} \frac{1}{2\pi i}\int_{1+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT} \frac{x^s}{s} L_{f\otimes g}(s,\chi)\, ds \\ &\quad + O(x^{1+\varepsilon}T^{-1} + x^{\varepsilon}) \qquad (5)\end{aligned}$$

を調べることで

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv a(p)}} c_n &= \delta_{f,g}\frac{1}{\varphi(p)}\frac{\pi^2}{6}k\alpha(1-\alpha_p^2p^{-k})(1-\overline{\alpha_p}^2p^{-k})(1-p^{-1})^2 x \\ &\quad + O(x^{\frac{3}{5}+\varepsilon}p^{\frac{3}{5}}) \qquad (6)\end{aligned}$$

を得ることができる。ここで $\delta_{f,g} = \begin{cases}1 & f=g\\ 0 & f\neq g\end{cases}$ であり、α_p は $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ の Euler 積表示に現れる f と p に依る数で、$\alpha_p + \overline{\alpha_p} = a_p$, $|\alpha_p| = p^{\frac{k-1}{2}}$ を満たす複素数である。

(5) から (6) を得る方法は、ここでは詳しく述べないが、

reflection principle と呼ばれる方法で、

$$L_{f\otimes g}(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{n}{Y}\right)^2\right) \frac{c_n\chi(n)}{n^s}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{u=-\sigma-\varepsilon \\ |v|\le \frac{T_0}{2}}} F(s,w)\, L_{f\otimes g}(1-s-w,\bar{\chi})\,\frac{dw}{w}$$
$$+O(\exp(-CT_0))$$

$$F(s,w) = C_\chi Y^w \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{-2+4(s+w)} \frac{\Gamma(1+\frac{w}{2})\Gamma(1+\frac{k-l}{2}-s-w)\Gamma(\frac{k+l}{2}-s-w)}{\Gamma(s+w+\frac{k-l}{2})\Gamma(s+w+\frac{k+l}{2}-1)}$$

($s=\sigma+it$, $w=u+iv$, C:定数>0, C_χ: (7)参照)

を用いて

$$\frac{1}{\varphi(p)}\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi\neq\chi_0}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}+iT_0}^{\frac{1}{2}+2iT_0} \frac{x^s}{s} L_{f\otimes g}(s,\chi)\,ds$$

を評価し、一部で指標の和について Cauchy-Schwarz の不等式を用いて mean value の理論を用いることで得られる。

(詳しくは著者 [3] 参照)

さて、(6) は $p\le x^{\frac{1}{4}}$ という強い条件と mean value が効いて導ける結果である。しかし、$D_p(x)$ の Voronoï-formula と $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ の関数等式 (ここで $k>l$ とする)

$$\Phi_{f\otimes g}(s,\chi) := \left(\frac{2\pi}{d}\right)^{-2s}\Gamma\left(s-\frac{k-l}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{k+l}{2}-1\right)L_{f\otimes g}(s,\chi)$$
$$\Phi_{f\otimes g}(s,\chi) = C_\chi\,\Phi_{f\otimes g}(1-s,\bar{\chi}) \qquad (7)$$

に現れる C_χ の具体的な形を利用することで、より弱い条件、$p^2\le x^3$ のもとでより詳しい結果を導くことができた。

Theorem

pは奇素数とする。$(a, p)=1$に対して次が成り立つ。$(r \in \mathbb{N})$

(i) $p^{3r} \geqq x^2$の時 $\displaystyle\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv a (p^r)}} C_n = O(x^{\frac{3}{5}} p^{\frac{3}{5}r})$

(ii) $p^{3r} \leqq x^2$の時

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv a (p^r)}} C_n = \frac{\delta_{f,g}}{\varphi(p^r)} \frac{\pi^2}{6} k\alpha \, (1-\alpha_p^2 p^{-k})(1-\bar{\alpha}_p^2 p^{-k})(1-p^{-1})^2 x$$
$$+ \frac{1}{\varphi(p^r)} \sum_{\substack{\chi \bmod p^r \\ \chi \neq \chi_0}} \chi(a^{-1}) L_{f\otimes g}(0, \tilde{\chi})$$
$$+ O(x^{\frac{3}{5}} p^{\frac{3}{5}r} + x^{-\varepsilon} p^{\frac{3}{2}r + 4\varepsilon})$$

$\tilde{\chi}$はχを導くprimitive character。また、$k=l$、$\tilde{\chi} \neq \chi_0$のとき、$L_{f\otimes g}(0, \tilde{\chi})=0$に注意。

このTheoremはpが奇素数の時C_αがガウス和の4乗で書くことができるところに注目した結果である。よって$p=2$の時は(6)より詳しい結果は得られていない。

§2 Proof of Theorem

証明のポイントは§1の最後に書いたようにC_αの具体的な形である。Li [5]によって次が分かっている。

<u>Fact</u>. $p \geqq 2$は素数とする。$r \geqq 1$を自然数として、mod p^rのprimitive characterをχとする。

この時、χがnon-real characterならば、

$C_\chi = W(\chi)^4/p^{2r}$ であり、real character であればば $C_\chi = 1$ である。ここで $W(\chi)$ はガウス和。

この事実から、次の Lemma が導ける。

> Lemma
>
> p は奇素数とする。b は $(b, p) = 1$ なる整数とする。
>
> この時 $\displaystyle\sum_{\chi \bmod p^r}{}' C_\chi \chi(b^{-1}) \ll \varphi(p)\, p^{-\frac{r}{2}}$ が成り立つ.

これは C_χ がガウス和の4乗で書ける時、指標で和をとることにより hyper Kloosterman 和が現れ、Deligne や Weinstein の non-trivial な hyper kloosterman 和の評価（Deligne [1], Weinstein [7]）を用いることで Lemma の証明ができる。

この Lemma が Theorem の証明の key となっている。

次に $D_\rho(x)$ の Voronoï-formula を考える。Voronoï-formula の収束性を加味し、$\rho=2$ の時を扱う。（次の Voronoï-formula は $\rho > \frac{3}{2}$ において絶対収束している）

$$\frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum_{n \leq x} C_n \chi(n) (x-n)^\rho = Q_\rho(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_\chi C_n \bar{\chi}(n) \left(\frac{2\pi}{d}\right)}{\left(n \frac{16\pi^4}{d^4}\right)^{\rho+1}} f_\rho\left(\frac{16\pi^4 x n}{d^4}\right)$$

ここで $Q_\rho(x)$, $f_\rho(x)$ の定義を述べるスペースはないので、省略するが、どちらも良い性質を持つ具体的な関数である。

この両辺に $\chi(a^{-1})$ をかけ、$\displaystyle\sum_{\chi \bmod p,\, \chi \neq \chi_0}$ をとると Lemma の評価が効いて、差分作用素を用いて $D_2(x)$ から $D_0(x)$ の情報

をとり出すと $p^3 \leqq x^2$ において

$$\sum_{\substack{n\leqq x \\ n\equiv a(p)}} C_n = \frac{1}{\varphi(p)}\sum_{n\leqq x} C_n \chi_0(n) + \frac{1}{\varphi(p)}\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi\neq\chi_0}} \chi(a^{-1}) L_{f\otimes g}(0.\chi) + O\left(x^{\frac{3}{5}}p^{\frac{3}{5}} + x^{-\varepsilon}p^{\frac{3}{2}+4\varepsilon}\right) \tag{8}$$

が得られる。同様の方法で

$$\sum_{\substack{n\leqq x \\ n\equiv a(p^r)}} C_n - \frac{1}{p}\sum_{\substack{n\leqq x \\ n\equiv a(p^{r-1})}} C_n = \frac{1}{\varphi(p^r)}\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi\neq\chi_0}} \chi(a^{-1}) L_{f\otimes g}(0.\tilde{\chi}) + O\left(x^{\frac{3}{5}}p^{\frac{3}{5}r} + x^{-\varepsilon}p^{\frac{3}{2}r+4\varepsilon}\right) \tag{9}$$

が得られる。

(8). (9) より帰納法で次が分かる。

Proposition 1

p は奇素数として、$p^{3r} \leqq x^2$, $r\in\mathbb{N}$ の時

$$\sum_{\substack{n\leqq x \\ n\equiv a(p^r)}} C_n = \frac{1}{\varphi(p^r)}\sum_{n\leqq x} C_n \chi_0(n) + \frac{1}{\varphi(p^r)}\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi\neq\chi_0}} \chi(a^{-1}) L_{f\otimes g}(0.\tilde{\chi}) + O\left(x^{\frac{3}{5}}p^{\frac{3}{5}r} + x^{-\varepsilon}p^{\frac{3}{2}r+4\varepsilon}\right)$$

が成り立つ。

更に同様の方法で次も分かる。

Proposition 2

$$\sum_{n\leqq x} C_n \chi_0(n) = \delta_{f.g}\frac{\pi^2}{6}k\alpha\,(1-\alpha_p^2 p^{-k})(1-\bar{\alpha}_p^2 p^{-k})(1-p^{-1})^2 x + O\left(x^{\frac{3}{5}}p^{\frac{4}{5}}\right)$$

が成り立つ。ここで χ_0 は mod p ($\geqq 2$ なる素数) の principal character.

この2つの Proposition から Theorem が証明される。

§3 Remark

さて、Theorem と (6) のように C_n の和について調べる方法を2つ紹介した。1つは Voronoi-formula を利用する方法であり、1つは reflection principle と呼ばれる方法である。実は reflection principle を用いると次が示せる．

$$\sum_{n\leqq x} C_n \chi_0(n) = \delta_{f,g}\frac{\pi^2}{6}k\alpha\,(1-\alpha_p^2 p^{-k})(1-\bar{\alpha}_p^{-2}p^{-k})(1-p^{-1})\,x^2 + O(x^{\frac{3}{5}+\varepsilon}p^{\varepsilon}) \qquad (10)$$

これは error にある p の巾は Proposition よりも良いものである．しかし，x の巾の ε がとれないことと，実際 Theorem を導く上では $\varphi(p)^{-1}\sum_{n\leqq x} C_n\chi_0(n)$ を調べるので Proposition 2 の $p^{\frac{4}{5}}$ という評価でも問題がないことから (10) ではなく Proposition 2 を採用した。

また reflection principle で (4) を考えると

$$\sum_{n\leqq x} C_n \chi(n) \ll x^{\frac{3}{5}+\varepsilon}p^{\frac{4}{5}}$$

(ここで χ は mod d の primitive character)

が導ける。

References

[1] P. Deligne, Cohomologie Etale (SGA $4\frac{1}{2}$), Springer Lecture Notes 569 (1977).

[2] J. L. Hafner, On the representation of the summatory functions of a class of a arithmetical functions, Lec. Notes in Math. 899 (1981) 148-165.

[3] Y. Ichihara, The evaluation of the sum over arithmetic progressions for the coefficients of the Rankin-Selberg series, and II, preprints.

[4] A. Ivić, K. Matsumoto and Y. Tanigawa, On Riesz mean for the coefficients of Rankin-Selberg series, Math. Proc. Cam. Phil. Soc. 127 (1999) 117-131.

[5] W. Li, L-Series of Rankin-type and their functional equations, Math Ann. 244 (1979) 135-166.

[6] R. A. Rankin, Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetic functions I and II, Proc. Cam. Phil. Soc. 35 (1939) 351-356.

[7] L. Weinstein, The hyper-Kloosterman sum, Enseignement Math. (2) 27 (1981) 29-40.