数理解析研究所講究録
1160 巻 2000 年 119-125

イデヤル類群の指標をもつ L 関数の UNIVERSALITY

見正 秀彦 (MISHOU HIDEHIKO)
名古屋大学多元数理科学研究科

1. INTRODUCTION

$s=\sigma+it\in\mathbb{C}$ とする。半平面$\Re s>1$ で Riemann ゼータ関数$\zeta(s)$ が

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$$

で定義される。１９７５年、S.M.Voronin は次の結果を証明した。

Theorem (Voronin). $0<r<\frac{1}{4}$ とし、$f(s)$ を $|s|\leq r$上連続かつ零点を持たず、$|s|<r$内で正則な関数とする。

この時、$^{\forall}\varepsilon>0$ に対し、実数の集合 $A=A(r,f,\varepsilon)$ で正の下極限密度を持つ、即ち、

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{m\left(A\cap[0,T]\right)}{T}>0\quad (m{:}\mathbb{R}\text{ 上の } \textit{Lebesgue} \text{ 測度})$$

を満たすものが存在し、$^{\forall}\tau\in A$ に対し

$$\max_{|s|\leq r}\left|\zeta(s+\frac{3}{4}+i\tau)-f(s)\right|<\varepsilon$$

が成り立つ。

この定理を Riemann ゼータ関数の Universality theorem と呼ぶ。

この定理の主張は、大雑把に言うと、任意の正則関数は Riemann ゼータ関数の垂直方向への並行移動によってコンパクト一様近似でき、しかもそのような近似を与える実数全体の集合の密度は正である、ということである。

この後、どのようなゼータ関数、L 関数が Universality theorem を持つのか調べられてきた。

まず１９７７年、S.M.Gonek が Hurwitz zeta 関数$\zeta(s,\alpha)$ についてαが有理数もしくは超越数である場合、Universality theorem が成り立つことを証明した。1979 年、A.Reich は代数体の Dedekind zeta 関数について Universality theorem を証明した。1980 年、B.Bagchi は Riemann zeta 関数の Universality theorem の別証明を与えるとともに、1982 年、Dirichlet L 関数の joint Universality theorem を証明した。その後、具体的な結果はしばらく得られていなかったが、90 年代に入り、A.Laurincikas,K.Matsumoto らを中心に Universality theorem の研究が進められ、Hecke eigenform に付随する L 関数、Rankin-Selberg L 関数についてそれぞれ Universality theorem が得られている。

今回、次のように定義されるL関数について結果が得られた。
Kを有理数体$\mathbb{Q}$上の有限次代数拡大、Kの整イデヤル$\mathfrak{f}$に対し、

$$A(\mathfrak{f}) = \{\mathfrak{a}{:}K\text{のイデヤル} \mid (\mathfrak{a},\mathfrak{f}) = 1\}, \quad B(\tilde{\mathfrak{f}}) = \{(\alpha) \mid \alpha \equiv 1 (mod\ \tilde{\mathfrak{f}})\}$$

ととる。これらはイデヤルの乗法についてアーベル群をなし、$B(\tilde{\mathfrak{f}})$ は $A(\mathfrak{f})$ の部分群である。そこでその商群を $Cl(K,\tilde{\mathfrak{f}})$ で表す。これは有限アーベル群になることが知られており、その指標をχととる。この指標χに対し、$\Re s > 1$ 上で

$$L(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}$$

と定義する。ここで右辺の和は0でないK上の整イデヤルについてとり、$N(\mathfrak{a})$ はイデヤル$\mathfrak{a}$のノルムである。
今回得た結果は次の通りである。

Theorem. K,χは上の通りとする。$n = [K,\mathbb{Q}]$ とし、

$$\sigma_K = \begin{cases} \frac{1}{2}, & K = \mathbb{Q} \\ 1 - \frac{1}{n}, & otherwise \end{cases}$$

と置く。$D = D_r(s_0) = \{s \in \mathbb{C} \mid |s - s_0| \le r\}$ は帯領域 $\sigma_K < \Re s < 1$ に含まれるものとし、$f(s)$ は D上の零点を持たない連続関数で、その内部で正則なものとする。
このとき、$^\forall\epsilon > 0$ に対し、正の下極限密度を持つ実数の集合 $A = A(\chi, D, f, \epsilon)$ が存在し、$^\forall\tau \in A$ について次の不等式が成り立つ。

$$\max_{s\in D}\left|f(s) - L(s + i\tau, \chi)\right| < \epsilon$$

2. 証明の概略

これから **Theorem** の証明の概略について述べる。Voronin の原証明と limit theorem を用いる証明の2通りの証明があるが、ここでは Voronin の原証明に基づいた証明について述べる。limit theorem を用いた証明も可能であることを注意しておく。
まずいくつか記号を定義する。

Definition.

(1) Ωを素数を添字とする実数列全体の集合

$$\Omega = \prod_p \mathbb{R}_p \quad \mathbb{R}_p = \mathbb{R}$$

と定める。

(2) $L(s,\chi)$ は$\Re s>1$ で次の *Euler* 積表示を持つ。

$$L(s,\chi)=\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}$$

ここで $\mathfrak{p}$ は Kの素イデヤル全体を動く。
素数 p の Kにおける素イデヤル分解を次のように表す。

$$p=\prod_{i=1}^{z_p}\mathfrak{p}_i^{x_i}\quad N(\mathfrak{p}_i)=p^{y_i}$$

この表示を用いて $\{f_p(z)\}$ を次のように定める。

$$L(s,\chi)=\prod_{p}\left\{\prod_{i=1}^{z_p}\left(1-\frac{\chi(\mathfrak{p}_i)}{p^{y_i s}}\right)^{-1}\right\}=\prod_{p}f_p(\frac{1}{p^s})$$

Mを素数の有限集合、$\bar{\theta}=\{\theta_p\}_p\in\Omega$とする。このとき、

$$L_M(s,\chi,\bar{\theta})=\prod_{p\in M}f_p\left(\frac{e(-\theta_p)}{p^s}\right)$$

と定める。

(3) L を $Cl(K,\tilde{\mathfrak{f}})$ 上の類体とする。L で完全分解する素数全体の集合を $\mathbb{P}_L$と定める。後に見るように $\mathbb{P}_L$は可算無限集合である。そこで $\mathbb{P}_L$内の素数に大きさ順に番号を降っておく。$\bar{\theta}_0=\{\theta_p^{(0)}\}\in\Omega$を次のように定める。$p\in\mathbb{P}_L$に対し、

$$\theta_p=\frac{l_p}{4}$$

と定める。ここで l_pは p の $\mathbb{P}_L$内での番号である。それ以外の p に対しては、

$$\theta_p=0$$

ととる。これらを用いて、

$$\theta_p^{(0)}=\theta_p-\frac{t_0\log p}{2\pi}$$

と定義する。ここで $s_0=\sigma_0+it_0$である。

以上の記号の下で、次の lemma を証明しよう。

Lemma 1. $g(s)$ を D上の連続関数で、Dの内部で正則なものとする。
このとき、$^\forall\epsilon>0,^\forall y>0$ に対し、次の性質をもつ素数の有限集合 Mが存在する。

(1) Mは y以下の素数を全て含む。
(2) 次の不等式が成り立つ。

$$\max_{s\in D}\left|\log L_M(s,\chi,\bar{\theta}_0)-g(s)\right|<\epsilon$$

このlemmaから **Theorem** は次のようにして証明できる。

$\tau \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\theta_p(\tau) = \frac{\tau \log p}{2\pi} \quad ,\bar{\theta}(\tau) = \{\theta_p(\tau)\}_p \in \Omega$$

と定める。このとき次の不等式を考える。

$$\begin{aligned}
&\max_{s\in D}\left|\log L(s+i\tau,\chi) - g(s)\right| \\
&\le \max_{s\in D}\left|\log L_M(s,\chi,\bar{\theta}_0) - g(s)\right| + \max_{s\in D}\left|\log L_M(s,\chi,\bar{\theta}_0) - \log L_M(s,\chi,\bar{\theta}(\tau))\right| \\
&+ \max_{s\in D}\left|\log L(s+i\tau,\chi) - \log L_M(s,\chi,\bar{\theta}(\tau))\right|
\end{aligned}$$

Lemma 1. の(2)から、この右辺の第一項はϵで抑えられる。一方、集合 $\{\log p\}$ の任意有限個の元は $\mathbb{Q}$ 上一次独立になることから、Kroneckerの近似定理を用いることにより、第二項がϵで抑えられるような実数τ全体の集合が正の下極限密度を持ち、さらにyを十分大きくとれば、$L(s,\chi)$ の解析的な性質から、第三項もϵで抑えられるようなτ全体の集合が正の下極限密度をもつことが証明できる。

以上のようにして、**Lemma 1.** から **Theorem** の証明が得られる。

3. Lemma 1. の証明

$H^2(D)$ を D上の L^2−関数で、Dの内部で正則なもの全体のなす空間、いわゆる、D上のHardy空間とする。$H^2(D)$ は内積を

$$(f,g) = \Re\left(\iint_D f(s)\overline{g(s)}d\sigma dt\right) \quad (f,g\in H^2(D))$$

と定義すると、この内積に関し実Hilbert空間になることに注意する。

$H_2(D)$ の位相がコンパクト一様収束であることに注意すると、**Lemma.1** は次のlemmaから従うことは明らかである。

Lemma 2. 級数

$$\sum_p \log f_p\left(\frac{e(-\theta_p^{(0)})}{p^s}\right)$$

の並び変えで、$H^2(D)$ 内で収束するもの全体の集合は $H^2(D)$ 自身と一致する。

ここで、

$$\alpha_p = \sum_{\substack{i=1\\ v_i=1}}^{z_p} \chi(\mathfrak{p}_i) \quad ,h_p(s) = \frac{\alpha_p e(-\theta_p^{(0)})}{p^s}$$

とおく。すると次の不等式が成り立つ。

$$\sum_p \left\|\log f_p\left(\frac{e(-\theta_p^{(0)})}{p^s}\right) - h_p(s)\right\| < \infty$$

この不等式から、**Lemma 2.** は級数$\sum_p h_p(s)$ について証明すれば十分であることが分かる。
Lemma 2. を証明するため、実 Hilbert 空間に関する次の lemma を用いる。

Lemma 3 (Pecherskii). *H:*実 *Hilbert* 空間とする。$\{u_n\}_{n\in\mathrm{N}} \subset H$は以下の性質を満たす。

(1) 次の不等式が成り立つ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty$$

(2) $^\forall e \in H s.t. \|e\| = 1$ に対し、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n, e)$$

は条件収束ではあるが、絶対収束ではない。

このとき、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

の並び変えで H内で収束するもの全体の集合は Hと一致する。

この lemma を $H_2(D), \{h_p(s)\}$ に当てはめると、**Lemma 2.** を証明するには、次の 2 つの条件が成り立つことを証明すればよい。

(1) 次の不等式が成り立つ。

$$\sum_p \|h_p(s)\|^2 < \infty$$

(2) $^\forall \phi(s) \in H_2(D)\mathrm{s.t.}\|\phi\| = 1$ に対し、級数

$$\sum_p (h_p, \phi)$$

は条件収束するが、絶対収束しない。

まず (1) について、Dについての仮定から、$\sigma_0 - r > \frac{1}{2}$より、

$$\sum_p \|h_p\|^2 \ll \sum_p \frac{1}{p^{2(\sigma_0 - r)}} < \infty$$

次に (2) について、仮定を満たすϕを一つとり固定する。$\sum_p (h_p, \phi)$ が条件収束するが絶対収束しないということは次の 2 つの条件と同値である。

- $(h_p, \phi) \to 0 \quad (p \to \infty)$
- $\sum_p (h_p, \phi)$ の部分級数で $\infty, -\infty$ に発散するものがそれぞれ存在。

Cauchy の不等式より、

$$|(h_p, \phi)| \le \|h_p\|^{\frac{1}{2}} \|\phi\|^{\frac{1}{2}} \ll \frac{1}{p^{2(\sigma_0 - r)}} \to 0 \quad (p \to \infty)$$

そこで $\infty, -\infty$ に発散する部分級数の存在を示そう。

$\phi(s)$ の Taylar 展開を

$$\phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n \quad (a_n \in \mathbb{C})$$

とおく。この表示を用いて (h_p, ϕ) を計算してみると、

$$\begin{aligned}
(h_p, \phi) &= \Re\left(\alpha_p e(-\theta_p^{(0)}) \iint_D \frac{1}{p^s}\overline{\phi(s)} d\sigma dt\right) \\
&= \Re\left(\frac{\alpha_p e(-\theta_p^{(0)})}{p^{s_0}} \iint_D \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{-(s-s_0)\log p\}^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m (s-s_0)^m} d\sigma dt\right) \\
&= \Re\left(\frac{\alpha_p e(-\theta_p^{(0)})}{p^{s_0}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \pi \bar{a}_m r^{m+2}}{(m+1)!} (r \log p)^m\right) \\
&= \Re\left(\frac{\alpha_p e(-\theta_p^{(0)})}{p^{s_0}} G(r \log p)\right)
\end{aligned}$$

と表せる。ここで

$$b_m = \frac{(-1)^m \pi \overline{a_m} r^{m+2}}{m+1} \quad , G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} z^m$$

とおいた。

さて $\|\phi\| = 1$ から、

$$|b_m| = 1 \quad ({}^\forall m \geq 0)$$

であることが分かる。このとき $G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} z^m$ について整関数の理論から、発散する正の単調増加列 $\{R_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, 正定数 C_1, C_2 が存在して、$l_m = \frac{C_1}{R_m + 2} \quad , I_m = [R_m, R_m + l_m]$ ととると、不等式

$$|\Re G(x)| > \frac{C_2}{e^x} \quad (x \in I_m)$$

が成り立つことが分かる。

この区間 $I_m (m \in \mathbb{N})$ を用いて素数の有限集合 $K_m (m \in \mathbb{N})$ を次のように定める。

- $|\Re G(x)| > \frac{C_2}{e^x} \quad (x \in I_m)$ のとき

$$K_m = \left\{ p | p \in \mathbb{P}_L \quad r \log p \in I_m \quad l_p \equiv 0 (mod. 4) \right\}$$

- $|\Re G(x)| < -\frac{C_2}{e^x} \quad (x \in I_m)$ のとき

$$K_m = \left\{ p | p \in \mathbb{P}_L \quad r \log p \in I_m \quad l_p \equiv 2 (mod. 4) \right\}$$

さて、${}^\forall p \in \mathbb{P}_L$ に対し、類体の分解定理から、

$$\begin{aligned}
& p \in \mathbb{P}_L \\
& \Rightarrow p = \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_n \quad (K\text{で完全分解}) \quad , \text{各 } \mathfrak{p}_i \text{は } L \text{ で完全分解} \\
& \Rightarrow p = \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_n \quad , \chi(\mathfrak{p}_i) = 1 \quad (i = 1, \ldots, n) \\
& \Rightarrow \alpha_p = n
\end{aligned}$$

であることが分かる。よってこの関係式と上記 $I_m(m \in \mathbb{N})$ の性質から、$^\forall p \in K_m$に対し、

$$
\begin{aligned}
(h_p, \phi) &= \Re\left(\frac{\alpha_p e(-\theta_p^{(0)})}{p^{s_0}} G(r \log p)\right) \\
&\geq \frac{n}{p^{\sigma_0}} |\Re G(r \log p)| \\
&\gg \exp\left(-(\frac{\sigma_0}{r}+1)(R_m + l_m)\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

一方、K_mの元の個数は、

$$
\sharp K_m = \frac{1}{4}\left\{\pi(e^{\frac{R_m+l_m}{r}}, L) - \pi(e^{\frac{R_m}{r}}, L)\right\} + o(1)
$$

ここで、

$$
\pi(x, L) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathbb{P}_L}} 1
$$

とした。$\pi(x, L)$ については、Chebotarev の密度定理より、

$$
\pi(x, L) = \frac{1}{N_L}\int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right)
$$

である。ここで $N_L = [\bar{L} : \mathbb{Q}], \bar{L} : L$ の Galosi 閉体とした。

この公式から$\sharp K_m$を計算すると、

$$
\begin{aligned}
\sharp K_m &= \frac{1}{4N_L}\int_{e^{\frac{R_m}{r}}}^{e^{\frac{R_m+l_m}{r}}} \frac{dt}{\log t} + O\left(e^{\frac{R_m+l_m}{r}} e^{-c\sqrt{\frac{R_m+l_m}{r}}}\right) \\
&\gg \frac{e^{\frac{R_m}{r}}}{R_m^3} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(1),(2) より、

$$
\sum_{p \in K_m} (h_p, \phi) \gg \frac{1}{R_m^3} \exp\left((\frac{1-\sigma_0}{r} - 1)R_m\right) \exp\left(-(\frac{\sigma_0}{r}+1)l_m\right)
$$

$m \to \infty$ としたとき、$R_m \to \infty$ だから、この右辺は ∞ に発散する。従って ∞ に発散する部分級数の存在が示せた。$-\infty$ に発散するものについては K_mの定義において、l_pについての条件を入れ換えてやれば良い。

References

1. Karatsuba-Voronin. *The Riemann Zeta-Function* Walterde Gruyter.,1992
2. A.Laurincikas. *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function* Kluwer Acad.Publ.,Dordrecht/Boston/London.,1996
3. S.M.Gonek. *Analytic properties of zeta and L-functions* Ph.D.Thesis.University of Michigan.,1979
4. A.Reich. *Werteverteilung von Zetafunktionen* Arch.Math.34.,1980