数理解析研究所講究録
1160 巻 2000 年 177-185

Iwaniec の g-関数の性質

山形大学教育 鹿野 健 (Takeshi Kano)

微分差分方程式

$$(1) \qquad (ug(u))' = \alpha g(u) + \beta g(u+1)$$

は，Iwaniec [4]によって，いわゆる一般篩(ふるい)法の研究の中で導入された。 ここで，通常 α，β は正の定数で，$g = g(u)$ は $u>0$ で定義されていて，$u \to \infty$ のとき

$$(2) \qquad g(u) \sim u^{\gamma}$$

となるような定数 $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$ が存在するものとする。

ここでは，特に基本的な場合である

$$(3) \qquad \alpha = \beta = k > \frac{1}{2}$$

の場合を考察する。 このとき，(1)の解 $g(u)$ は単一で，

$$\gamma = 2k - 1$$

であることが知られている [1]. このとき，解 $g(u)$ は幾つかの興味ある解析的な性質を有することが，Grupp [3]， Tsang [5], Wheeler [6] 等によって示され，応用も知られている． Diamond と Halberstam [2] は，最近 $g(u)$ の新しい解析的な性質を見出し，最終的に2つの予想に到達した．

本稿では，それらの解決（予想2）と，部分的解決（予想1）とについて報告する．

(1) の連続解 $g(u)$ は，(3) の下で正の実根を有し，その最大のものを $\rho = \rho_k$ とすると，ρ は単根で $k>1$ のとき $\rho > 2k-1$ であることが知られている (cf. [2])．

Diamond と Halberstam が得た主要な結果をまとめると，次の定理になる．

［定理 A］ $k>1$ のとき，$u>\rho$ の範囲で

(i) $f(u) = \dfrac{(u-\rho)\,g'(u)}{g(u)}$ は単調増加関数で，

$f(u) > 1$.

(ii) $\dfrac{g'(u)}{g(u)}$ は単調減少の凸関数.

この定理を含む幾つかの結果を証明するために彼等が用いたのが，いわゆる「連続帰納法」(induction on the continuum) であるが，これは既に Wheeler [6] においても用いられた方法である．

この定理 A に関連して彼等の述べた予想が次の主張である。

予想 1. $f(u)$ は $u>\rho$ で凹関数である。

予想 2. $\dfrac{g'(u)}{g(u)} - \dfrac{1}{u-\rho}$ は $u>\rho$ で単調減少関数である。

後者については，彼等が示したように，予想 1 が正しければ成り立つことが証明できる。ここではまず，予想 2 が正しいことを（何の仮定も設けずに）証明し，それが逆に予想 1 に対する弱い結果を与えることを示そう。

［補題］ $u\to\infty$ のとき，

$$(4)\qquad \frac{g'(u)}{g(u)} = \frac{2k-1}{u-k} + \frac{k(2k-1)(k-1)}{(u-k)^3} + O(|u-k|^{-4}),$$

$$(5)\qquad \frac{g''(u)}{g(u)} = \frac{(2k-1)(2k-2)}{(u-k)^2} + \frac{k(k-1)(2k-1)(4k-5)}{(u-k)^4} + O(|u-k|^{-5}).$$

（証明）(4) は，[2] の (3.1) 式であり，(5) はその (3.1) 式と (3.2) 式から（辺々掛け合わせることにより）得られる。

予想2の証明は，まず十分大きい u の値に対して成り立つことを上の補題によって証明し，次に前述の連続帰納法によって最終的に $u>\rho$ について成り立つことを得る，という方針で行う。

$$F(u)=\frac{g'(u)}{g(u)}-\frac{1}{u-\rho}, \tag{6}$$

とおくと，補題により

$$-F'(u)=\left(\frac{g'}{g}\right)^2-\frac{g''}{g}-\frac{1}{(u-\rho)^2}$$

$$=\left\{\frac{2k-1}{u-k}+\frac{k(2k-1)(k-1)}{(u-k)^3}+O(|u-k|^{-4})\right\}^2$$

$$-\left[\frac{2(2k-1)(k-1)}{(u-k)^2}+\frac{k(k-1)(2k-1)(4k-5)}{(u-k)^4}+O(|u-k|^{-5})\right]$$

$$-\frac{1}{(u-\rho)^2}$$

$$=\left\{\frac{2k-1}{(u-k)^2}-\frac{1}{(u-\rho)^2}\right\}+\frac{3k(k-1)(2k-1)}{(u-k)^4}+O(|u-k|^{-5}).$$

ここで，最初の $\{\ \}$ の中 >0 は不等式

$$u>\rho+\frac{\rho-k}{\sqrt{2k-1}-1},$$

と同値であるから，これは（u が十分大きければ）成り立つ。故に，十分大きな u に対して $F(u)$ が単調減少であることが示された。　次のステップは連続帰納法である。

$u > v > \rho$ であるようなすべての u に対して $F(u)$ が単調減少であると仮定すると，$F'(v) < 0$ となることを示そう。まず (1) と (3) より，

$$F(u) = \frac{1}{u}\left(\frac{ug'}{g}\right) - \frac{1}{u-\rho}$$

$$= \frac{(k-1)g(u) + kg(u+1)}{ug(u)} - \frac{1}{u-\rho}$$

$$= \frac{1}{u}\left\{(k-1) + k\frac{g(u+1)}{g(u)}\right\} - \frac{1}{u-\rho}.$$

故に，

(7) $$F'(u) = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{ug'}{g}\right) + \frac{k}{u}\cdot\frac{g'(u+1)g(u) - g(u+1)g'(u)}{g^2(u)} + \frac{1}{(u-\rho)^2}$$

$$= -\frac{g'(u)}{ug(u)} + \frac{kg(u+1)}{ug(u)}\left\{\frac{g'(u+1)}{g(u+1)} - \frac{g'(u)}{g(u)}\right\} + \frac{1}{(u-\rho)^2}.$$

ここで，$u > \rho$ のとき

(8) $$kg(u+1) > g(u) + g'(u),$$

が成り立つことに注意する。なぜならば，(1) と (3) より (8) は結局不等式

(8′) $$\frac{g'(u)}{g(u)} > \frac{k}{u-1}$$

と同値であるが（$u > \rho > 2k-1 > 1$ に注意），[2] の (1.4) 式により，$u > \rho$，$k > 1$ のときは

$$(9) \qquad \frac{g'(u)}{g(u)} > \frac{2k-1}{u-k}$$

が成り立つので，(8′) が従って(8)の成り立つことが分る．

一方，$g'(u)\,/\,g(u)$ は単調減少関数（定理Aの(ii)）なので，

$$(10) \qquad \frac{g'}{g}(u+1) - \frac{g'}{g}(u) < 0 .$$

故に，(8)と(10)を(7)の右辺に適用して，

$$F'(u) < -\frac{g'(u)}{u\,g(u)} + \frac{k}{u}\cdot\frac{g(u)+g'(u)}{g(u)}\left\{\frac{g'}{g}(u+1) - \frac{g'}{g}(u)\right\} + \frac{1}{(u-\rho)^2}$$

$$= -\frac{g'(u)}{u\,g(u)} + \frac{k}{u}\left(1+\frac{g'}{g}(u)\right)\left\{\left(\frac{g'}{g}(u+1) - \frac{1}{u+1-\rho}\right) - \left(\frac{g'}{g}(u) - \frac{1}{u-\rho}\right) - \frac{1}{(u+1-\rho)(u-\rho)}\right\} + \frac{1}{(u-\rho)^2} .$$

ここで，(帰納法の）仮定より

$$\frac{g'}{g}(u+1) - \frac{1}{u+1-\rho} < \frac{g'}{g}(u) - \frac{1}{u-\rho}$$

であるから，$u \geq v > \rho$ に対して

$$F'(u) < -\frac{g'(u)}{u\,g(u)} - \frac{k}{u}\left(1+\frac{g'(u)}{g(u)}\right)\frac{1}{(u+1-\rho)(u-\rho)} + \frac{1}{(u-\rho)^2} ,$$

が成り立つ。

従って，

$$F'(v) < -\frac{g'(v)}{v\,g(v)} - \frac{k}{v}\left(1+\frac{g'(v)}{g(v)}\right)\frac{1}{(v+1-\rho)(v-\rho)} + \frac{1}{(v-\rho)^2}$$

$$= \frac{-g'}{v\,g} - \frac{1}{v-\rho}\left\{k\left(1+\frac{g'}{g}\right)\frac{1}{v+1-\rho} - \frac{1}{v-\rho}\right\}$$

$$= \frac{-1}{v-\rho}\left\{\frac{(v-\rho)g'}{v\,g} + \left(1+\frac{g'}{g}\right)\frac{k}{v+1-\rho} - \frac{1}{v-\rho}\right\}.$$

$$= \frac{-1}{v-\rho}\left\{\frac{g'}{g}\left(\frac{v-\rho}{v} + \frac{k}{v+1-\rho}\right) + \left(\frac{k}{v+1-\rho} - \frac{1}{v-\rho}\right)\right\}.$$

ところが，定理Aの(i)より $g'/g > 1/(v-\rho)$ なので，上式の最後の{ }の中は次式よりも大きい：

$$\frac{1}{v-\rho}\left(\frac{v-\rho}{v} + \frac{k}{v+1-\rho}\right) + \left(\frac{k}{v+1-\rho} - \frac{1}{v-\rho}\right)$$

$$= \frac{1}{v} + \frac{k}{(v-\rho)(v+1-\rho)} + \frac{k(v-\rho)-(v+1-\rho)}{(v+1-\rho)(v-\rho)}$$

$$= \frac{1}{v} + \frac{k-1}{v-\rho} > 0.$$

故に $F'(v) < 0$ が示され，結局 $F(u)$ が $u > \rho$ で単調減少であることが証明された。

予想1に関する結果を述べる前に，次のような事実に注意する。

一般に，関数 $f(x)$ が２つの凹関数 $g(x)$ と $h(x)$ とによって，

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

と表わされるとき，$f(x)$ は準凹（quasi-concave）とよばれる。 また，$\log|f(x)|$ が(準)凹 であるとき，$f(x)$ は(準)対数的凹（(quasi) log-concave）という。
このとき，次のような包含関係が成り立つ。

凹 ⊂ 対数的凹 ⊂ 準対数的凹．

さて，上に証明したように（予想２），$u > \rho$ のとき

$$\left(\log\frac{g(u)}{u-\rho}\right)'' = \left(\frac{g'(u)}{g(u)} - \frac{1}{u-\rho}\right)' < 0$$

であるから，$\dfrac{g(u)}{u-\rho}$ は対数的凹である。 また，[2] の Proposition 4.1 によれば，$u > \rho$ のとき

$$(\log g')'' = \left(\frac{g''}{g'}\right)' < 0.$$

従って，

$$\log f(u) = \log g'(u) - \log\frac{g(u)}{u-\rho},$$

は２つの凹関数の差であるから，$\log f(x)$ は準凹，従って $f(x)$ は準対数的凹である．

[文　献]

[1] Diamond, H. G., Halberstam, H., Richert, H.-E., Sieve auxiliary functions II, Contemporary Math. 143, p. 247 – 253 (AMS, 1993).

[2] Diamond, H. G. and Halberstam, H., Differential inequalities for Iwaniec's q functions, In Number Theory in Progress vol. II, p. 721 – 735. Walter de Gruyter, 1999.

[3] Grupp, F., On zeros of functions satisfying certain difference - differential equations, Acta Arith. 51 (1988), 247 – 268.

[4] Iwaniec, H., Rosser's sieve, Acta Arith. 36 (1980) 171 — 202.

[5] Tsang, K.-M., Remarks on the sieving limit of the Buchstab - Rosser sieve, In Number theory, trace formulas and discrete groups, p. 485 – 502. Academic Press, 1989.

[6] Wheeler, F. S., Two differential - difference equations arising in Number Theory, Trans. AMS, 318 (1990) 491 — 523.