数理解析研究所講究録
1160巻 2000年 220-228

Topics in Waring's problem for fourth powers, II.

岩手大学 教育学部 川田 浩一
(Koichi KAWADA)

1. 序 —— $g(4)$をめぐって。

今回報告させていただく結果は，J.-M. Deshouillers, T. D. Wooley両氏との共同研究で得られたものである。標題に"II"と付けたのは，前回(1998年10月)の京大数理研での研究集会でさせていただいた話の続編という意味である([6]参照)。尚，以下で文献を明記していない論文等については，例えば，Vaughan[9]やNathanson[8]のBibliographyをご参照いただきたいと思う。

Waring問題に関して広く通用している記号であるが，2以上の整数kに対して，「すべての自然数は高々s個のk乗数の和で表せる」ような最小のsを$g(k)$で，「十分大きいすべての自然数は高々s個のk乗数の和で表せる」ような最小のsを$G(k)$で，それぞれ表す。多くの人達の貢献により，現在ではすべての$k\geq 2$に対して$g(k)$の値は決定されている，といえる。つまりkの値が与えられれば，簡単なアルゴリズムで$g(k)$の値を決定できる(Vaughan[9], p.2参照)。この$g(k)$を決定する研究の中で，最後まで残っていたのが$g(4)$，即ち4乗数の場合であった。

実際，$g(2)=4$は有名なLagrangeの定理(1770年)である。それを受けて同年，Waringが$g(3)=9$，$g(4)=19$などの結果を記しているが，証明は書かれていないので，これらはWaringが「予想した」と言うのが適当であろう。それがWaring問題の研究の出発点となったわけである。

その後，$g(3)=9$は1909年にWieferichが証明を発表し，1912年にKempnerがその証明の一部に誤りがあることを指摘し，修正している。いずれにしても$k=2$および3の場合は，代数的な，それも初等的な方法で$g(k)$は決定された。しかし，そのような方向で4以上のkに対して$g(k)$の値を決定することは，どうも無理なようで，1920年頃から猛威をふるうHardy-LittlewoodのCircle methodに頼らなくてはならないようである。逆にCircle methodを用いれば，ある意味で，kが大きくなる程，楽に$g(k)$の値を決定できる，という状況になる。実際，Hardy-LittlewoodやVinogradovらの1930年代中頃までの大きな仕事達に基づいたDickson, Pillai, Nivenらの貢献により，6以上のkに対する$g(k)$の決定は，第二次世界大戦よりも先に終焉をみた。5乗数については，それから約20年たった1964年に，Chenが$g(5)=37$を証明した。

筆者は1965年の生まれであるから，したがって，筆者が生まれたときに$g(k)$の値が未決定であったのは，4乗数の場合の$g(4)$のみ，ということになる。このことを

知ったときには,「俺は$g(4)$の値を決めるために生まれて来たのではないか。」と思ったものだが,実はそのときにはすでにDeshouillers－Dressにより$g(4)=19$が証明されていたのである。

以下簡略化のためDeshouillers－Dressに倣い,

「高々s個の4乗数の和として表される自然数」をB_sと呼ぶことにする。

さらに,

「B_sでない自然数全体の集合」を$\mathcal{E}_s$と書く。

定義から明らかなように,すべての自然数sに対して$\mathcal{E}_s \supset \mathcal{E}_{s+1}$であり,

$\mathcal{E}_s$が空集合となる最小のsが$g(4)$,

$\mathcal{E}_s$が有限集合となる最小のsが$G(4)$,

ということになる。79以下の4乗数は1^4と2^4しかなく,$79=4\times2^4+15\times1^4$だから$79\in\mathcal{E}_{18}$であることがわかる。同様に$31\in\mathcal{E}_{15}$であり,16を法とする合同式に関する簡単な考察により,$\{31\times16^m;\ m\geq0,\ m\in\mathbb{Z}\}\subset\mathcal{E}_{15}$,とくに$\mathcal{E}_{15}$は無限集合となることがわかる。即ち,$g(4)\geq19$および$G(4)\geq16$であることは平易にわかるわけである。

このうちの前者に注意すると,$g(4)$の決定は本質的には,$G(4)\leq19$を1925年に証明したHardy－Littlewoodによる,といえる。実際彼らは,

「Cより大きい自然数は全てB_{19}」

となる定数Cが計算可能であることを示したから,そのCの値を実際に求め,C以下の自然数をしらみつぶしにチェックすれば,有限な時間内で$g(4)$の値が決まる(それが19であるかどうかは別として)。Auluckは1941年に$C=e^{e^{204}}$を得ているが,これは「天文学的数字」などとは当到呼べないような大きな数であり,つまり$g(4)$の値は1925年に「原理的には」決定できたといえるものの,現実問題としてはまだまだ不可能という状況であった。現実に$g(4)$の値を決めるにはCの値を大幅に小さくしなくてはならないが,このCの巨大さは,Weylの不等式やHuaの不等式などのCircle methodにまつわる基本的な道具の証明に頻繁に現れる約数関数の評価の部分に根本的な原因があり,その問題を取り除くことはそう単純なことではない。このCを小さくすることは,単なる作業,といったものではなく,多くの実質的・数学的なアイディアを要求する仕事であった。結局,Thomas, Dress, Balasubramanian, Deshouillersといった人達の数々のアイディアと努力により,$C=10^{367}$とできることが[3]で最終的に証明された(この結果のアナウンスは,Balasubramanian－Deshouillers－Dressによって1986年になされている)。一方,大きなコンピューターを長時間用いた数値の検査と少々の数学的考察(greedy algorithm)を合わせて,Deshouillers－Dress[4]は10^{448}以下の自然数は全てB_{19}であることを示し,とうとう$g(4)=19$の証明は1993年に完全に発表されたことになった([1]－[4])。

2. 主結果 —— $\mathcal{E}_{16}$, $\mathcal{E}_{17}$, $\mathcal{E}_{18}$ の決定

ところでWooleyと筆者は最近の共同研究[7]の中で，ある4次恒等式に気付くことにより，4乗数に関わるいろいろな加法的問題についての成果を得た。その方法はたいへん単純で，かつある種の限られた場面では現在知られている最も強力な手段でもある。[7]のIntroductionの中にも記した通り，その方法が前節で紹介した$g(4)$にまつわる話題にも大変有効であることは明らかであり，それを実行した結果を報告することが今回の目的である。

実際，当初からの期待通り，[7]にある恒等式（下の(1)の式）は，$g(4)=19$の証明を大いに簡略化することができる。とはいっても，それ以前の多くの仕事に依存する部分も少なくないし，またVinogradovの記号≪などを用いずに全ての計算をexplicitに実行するわけだから，証明全体がけっこう長いのはいたしかたないところである。

我々はさらに，その証明の簡略化に留まらず，これまで知られていなかった結果も得ることができた。その新しい結果を述べる前に，$G(4)$の方に目を移すと，$G(4)\geq 16$が平易にわかることは先に記したが，実は$g(4)$が決定されるよりずっと以前の1939年に，Davenportは既に$G(4)=16$を証明していた。つまり$\mathcal{E}_{15}$は無限集合で，$\mathcal{E}_{16}$は（したがって16以上のsに対して$\mathcal{E}_s$は）有限集合であることは60年前から知られていた。$g(4)=19$が証明されたということは$\mathcal{E}_{19}$は空集合であると決定された，ということであるが，これまでは$\mathcal{E}_{18}$, $\mathcal{E}_{17}$, $\mathcal{E}_{16}$については空でない有限集合ということがわかっているに過ぎなかった。我々の新しい結果とは，これらの3つの集合を決定することである。即ち，高々16個（17, 18個でも同様）の4乗数の和で表せない自然数を全て決定することができた。この仕事のうち，筆者が中心的に関わったのは次の結果の証明である。

定理1 (Deshouillers－Kawada－Wooley)

10^{216}より大きい，16の倍数でない自然数は，16個の4乗数の和として表せる。

この定理1の証明を記述したプレプリント[5]は現在作成中で，2000年の6月頃までには完成すると思われる。

一方，筆者は全く寄与していないが，大きなコンピューターによる検査を基に，Deshouillers－Hennecart－Landreauは次の結論を得た。

定理2 (Deshouillers-Hennecart-Landreau)

次頁の表に現れる96個の自然数は高々16個の4乗数の和として表せない。
それら96個の数を除いた10^{245}以下の自然数は，高々16個の4乗数の和として表せる。

この定理2について記載した論文は，前記の3氏によって現在作成中である。定理2にあるB_{16}でない96個の自然数を全て書き下す前に，それら96個のうちの最大数は，

13792であることを述べておく。したがって定理1および2により B_{16} でない自然数はその96個が全てであることがわかる。それを確認するためには，定理1で除かれている，10^{216} より大きい16の倍数 N も B_{16} であることをみるだけでよいが，そのような N を
$N=16^m\cdot n$ の形で表す，ただしここで m は正の整数，n は

「$n>10^{216}$ かつ $16\nmid n$」であるか，または「$10^{216}/16<n\leq 10^{216}$」

のいずれかをみたすようにできる。前者の場合は定理1により，後者の場合は定理2により，いずれにしても n は B_{16} であることがわかるから，$N=(2^m)^4\cdot n$ も B_{16} であることがわかる。つまり次の系を得る。

系 (Deshouillers – Hennecart – Kawada – Landreau – Wooley)
集合 $\mathcal{E}_{16}$ は，下の表にある96個の自然数から成る。とくに，13792より大きい自然数は全て B_{16} である。

$\mathcal{E}_{16}\supset\mathcal{E}_{17}\supset\mathcal{E}_{18}$ だから，$\mathcal{E}_{16}$ が決定されれば $\mathcal{E}_{17}$，$\mathcal{E}_{18}$ などを決定するのは容易で，実際それらが見易いように次の表を書きたい。それを書くにあたり，見ていただければわかる通り，連続する自然数が現れる場合は，直前の自然数の下に次の自然数を書くことにする。

47,	62,	77,	127,	142,	157,	207,	222,	237,	287,	302,	317,	367,	382,	397,	447,	462,	477,
	63,	78,		143,	158,		223,	238,		303,	318,		383,	398,		463,	478,
		79,			159,			239,			319,			399,			479,

527,	542,	557,	607,	622,	687,	702,	752,	767,	782,	847,	862,	927,	942,	992,	1007,	1022,	1087,	1102,
	543,	558,		623,		703,			783,		863,		943,		1008,	1023,		1103,
		559,																

1167,	1182,	1232,	1247,	1327,	1407,	1487,	1567,	1647,	1727,	1807,	2032,	2272,	2544,	3552,	3568,	3727
	1183,		1248,													

3792,	3808,	4592,	4832,	6128,	6352,	6368,	7152,	8672,	10992,	13792.

以上96個の自然数が $\mathcal{E}_{16}$ を成すわけだが，ここに現れている自然数 m のうち直前の自然数 $m-1$ が表中に現れていないものは，B_{16} ではないが B_{17} ではあることがわかる。なぜなら $m-1\notin\mathcal{E}_{16}$ ということは $m-1$ は B_{16} であり，よって $m=(m-1)+1^4$ は B_{17} となるからである。つまり上表の一番上の段に並んでいる数 $(47, 62, 77, \cdots\cdots, 477, 527, 542, \cdots\cdots, 1167, 1182, \cdots\cdots, 13792)$ は B_{17} である。そして実際，確認にはいささかの検査を要することであるが，その逆も真となっている。即ち上表の二，三段目に現れている数は B_{17} でない。そのような

数は31個あり, それらが$\mathcal{E}_{17}$を成す。

同様に $m, m-1$ がともに前頁の表に現れていて $m-2$ が現れていなければ, $m=(m-2)+1^4+1^4$ はB_{18}である。言い換えると, 表の二段目に現れている数$(63, 78, \cdots, 1248)$はB_{18}である。さらに少々のチェックでわかる通り, 三段目に並んでいる7個の数はB_{18}ではなく, それらが$\mathcal{E}_{18}$を成す。また,前頁の表には四段目はない。このことは全ての自然数がB_{19}であること, つまり$g(4)=19$であることを示している。

ところで, $\mathcal{E}_{18}$を成す7個の数は, 80を法とする等差数列を成していて, 次のように表示できることを記しておきたい。

$$\mathcal{E}_{18}=\{80k-1\ ;\ k=1,2,3,4,5,6,7\}$$

これは高々18個の4乗数の和として表せない7個の自然数を記憶するのに, 大変役に立つであろう。この80という数は3^4-1^4で, 2^4の倍数でもあり, そういったことが関係している, といえると思う。もう一言加えると, $m\equiv n \pmod{2}$でかつ$5\nmid mn$なら$m^4\equiv n^4 \pmod{80}$である。ここではこれ以上深入りはしないが, $\mathcal{E}_{16}$の元を示した前頁の表に現れる数達には, 他にも法80に関するある程度の規則性がみられる。筆者には, 16の倍数がやや不規則に現れているように感じられるが, それらを除いて前出の表を眺めれば, その規則性がよりはっきり観察されることと思う。その点に気付けば, B_{16}でない96個の自然数を全て暗記することは, 意味のないことだが, 難しいことではない。

——ところで, $\mathcal{E}_{16}$が有限集合であることを初めて示したDavenportの方法は, $\mathcal{E}_{16}$に対する計算可能な上界を与える。つまり1939年のその彼の仕事以来, $\mathcal{E}_{16}$を決定することは,「原理的には」可能であったことになる。もちろん彼の方法に限らず, [7]より前の全ての研究を合わせても, その$\mathcal{E}_{16}$に対する上界として実際に得られる数は巨大すぎて, したがってこれまでは$\mathcal{E}_{16}$などを決定することは「現実には」不可能であったともいえる。とはいえ, 我々の定理1に関わる今回の仕事は, 否定的に言えば「原理的にやればできるとわかっていたことを, 実際にやっただけ」とも言えるわけで, つまり数学的な仕事としてどれほど評価してもらえるものであるのか, 人によって意見の分かれるところなのだろう, と筆者は想像している。個人的には今回の結果をとても気に入っているので, 仮りにあまり評価されることがなくても, それはそれでよいと思っているのだが, いずれにしても, これは非常に多くの時間と深刻な労力を費やした, 渾身の力を込めた仕事であったことを, ここに記させていただきたいと思う。

3. 定理1の証明の方針と, その経過

筆者は定理2の証明に関しては全く関与していないので, 以下は定理1の証明に関して述べることにしたい。我々の最も基本的な方針は, Kawada-Wooley [7]で用いられた恒等式

$$(1)\qquad x^4+y^4+(x+y)^4=2(x^2+xy+y^2)^2$$

を再び利用することである。いま集合$\mathcal{M}$を，

$$\mathcal{M}=\{m\in\mathbb{N}\ ;\ \exists x,y\in\mathbb{Z},\ \ m=x^2+xy+y^2,\ \ xy(x+y)\neq 0\}$$

で定義すれば，(1)より明らかなように，$m\in\mathcal{M}$ ならば $2m^2$ は3個の4乗数の和で表せる。一方，

$$(2)\qquad 2m_1^2+x_1^4+x_2^4=2m_2^2+x_3^4+x_4^4,\quad 1\le m_i\le P^2\ (i=1,2),\ 1\le x_j\le P\ (j=1,2,3,4)$$

という形の不定方程式の解の個数について，比較的楽に良い評価が得られることに注目して，適当な自然数sに対して「大きい自然数Nは，

$$(3)\qquad N=2m_1^2+2m_2^2+x_1^4+\cdots\cdots+x_s^4\qquad (m_1,m_2\in\mathcal{M},\quad x_j\in\mathbb{N}\ \ (1\le j\le s))$$

という形に表せる」ということを Circle method で証明してみよう，というのが最初に思い当たる方針になる。Nがそのような形で表されれば，上の注意から，Nは$(6+s)$個の4乗数の和で表せることになる。この方針で例えば$g(4)=19$の証明に寄与しようとすれば，$s=13$とすればよいわけである。実際，前節で触れた通り，その方向で$g(4)=19$の証明を大きく簡略化することができる。

実は今回の仕事は，1998年3月に，Deshouillers, Wooley，筆者の3人が Oberwolfach で会ったときに話をして具体的に始まったものである。話は逸れるが，筆者はこのとき初めて Deshouillers 氏と会ったのだが，それまで彼の名前をどのように発音するのが正しいのか知らなかった。このときに本人に直接尋ねる機会を得て，日本語のカタカナ表記の「デズイエ」というのはかなり真実に近いらしいことがわかった。実はそれ以前にも，あれはどうもデズイエと発音するらしいという説も耳にしたことはあったのだが，あれだけ文字を綴っておいてまさか「デズイエ」ってことはあんめえ，と筆者は疑っていたのである。

それはともかく，初めて相談したときから，上述のような方針で$g(4)=19$の証明の簡略化や集合$\mathcal{E}_{18}$の決定ができることはまず間違いないだろう，というのが3人の一致した感想であった。逆に，非常に楽観したとしても，あとで述べるような法16の合同式条件の問題から，今回の我々の方法で到達できる最も深い結果は，$\mathcal{E}_{16}$の決定であろうというのも疑いのないところであった。$\mathcal{E}_{15}$は無限集合だが，そこから16の倍数を全て取り去って得られる集合を$\mathcal{E}_{15}^*$とするとそれは有限集合であることが知られていて（これも Davenport (1939) による），$\mathcal{E}_{15}=\{16^m\cdot n\ ;\ n\in\mathcal{E}_{15}^*,\ m\ge 0,\ m\in\mathbb{Z}\}$となる。したがって有限集合$\mathcal{E}_{15}^*$を決定すれば，$\mathcal{E}_{15}$をきっちり決定できることになる。上述のような意味で，「原理的には」$\mathcal{E}_{15}^*$を決定することは可能だが，「現実に」それを可能にする手がかりは，今のところ全くないといってよい。

ということで，とにかく初めは$\mathcal{E}_{17}$を決定できるか計算してみて，うまくいったら$\mathcal{E}_{16}$にも挑戦し，もし$\mathcal{E}_{16}$まで決定できればそれ以上は望めない，という感じであった。16というのは，$G(4)=16$でもあるし，ある意味でキリの良いところではある。

一方で，コンピューターを用いて小さい方の自然数についてもチェックしなくてはならない。例えばB_{16}については，「ある自然数A以下で，前々頁の表にある96個以外の自然数は全てB_{16}である」

といった形の結果が必要である。これに関しDeshouillers氏は，Oberwolfachで会った当初，そのAの値を10^{200}程度まで大きくできることは確実と言っていて，その後$A=2\times10^{216}$までとどくことを報告してくれた。もちろん最終的には定理2で述べた通り$A=10^{245}$までできたとのことである。加えて，必要ならばAの値を10^{250}程度まで大きくすることは可能である，が，10^{260}までとどくのは無理そうだ，との報告もあった。

いずれにしても，こういった情報を頭に入れてCircle methodに関わる計算をしていたのである。まず$\mathcal{E}_{17}$の決定ができそうかどうか，(3)の形で$s=11$としてやってみると，かなり余裕で大丈夫そうなことがわかった。次に$\mathcal{E}_{16}$への挑戦として，(3)において$s=10$としてやってみると，大雑把にいって，Nが10^{210}程度以上ならその形で表現できることが証明できた(その後の改良によれば，その限界は10^{160}程度まで小さくできる)。ただし，$\mathcal{E}_{17}$の決定の方はそれで全く問題がないのだが，後者の方には法16に関する合同式条件の問題が発生するので，すぐに$\mathcal{E}_{16}$が決定できる，とはならないのである。

容易にわかることだが，4乗数はそれの偶奇に従って法16で0か1と合同である。整数x, yについて，$x, y, x+y$の3つのうち奇数となるのは0個か2個だから，$\mathcal{M}$の定義と(1)をみれば，$m\in\mathcal{M}$ならば$2m^2\equiv0$または$2 \pmod{16}$であることがわかる。ここで，本当の3個の4乗数の和は法16で3と合同となり得るのに対し，$2m^2$は，3個の4乗数の和で表せるが，法16で3と合同になり得ないのが，とくに問題なのである。それは$x, y, x+y$の3数が同時には奇数になれないことを反映しているわけだが，この単純な事実が我々の方法の避け難い欠陥を引き起こす場合があるのは，すでに[7](あるいは[6])で指摘されている通りである。実際(3)で$s=10$とすれば，(3)の右辺は法16で15と合同になることができないことがわかる。$N\equiv15 \pmod{16}$なら，それがB_{16}であったとしても，$s=10$とした(3)の形でNを表すことはできないのである。逆に，(3)で$s\geq11$ならそのような問題は現れないので，$\mathcal{E}_{17}$までの決定は問題がなかったのである。また，B_{16}に関しても，$N\equiv r \pmod{16}$，$1\leq r\leq14$の場合には，前に述べた通りの満足のいく結果は得られる。$r=0$の場合は，前節の系を導く過程で触れた通り，無視してよいが，$\mathcal{E}_{16}$を決定するためには$r=15$の場合は扱わなくてはならない。先の観察からわかるように，$N\equiv15 \pmod{16}$なるNを扱う際には，恒等式(1)を1回しか使うことが許されない。「$2m^2$ $(m\in\mathcal{M})$」が1回現れるたび法16の剰余類を1つ失うからである。とすると，次に思いつく方法は，

(4) $$N=2m^2+x_1^4+\cdots\cdots+x_{13}^4 \quad (m\in\mathcal{M},\ x_j\in\mathbb{N}\ (1\leq j\leq13))$$

という表現を扱うことであろう。Deshouillers-Dress[3]によるHuaの不等式のexplicit versionも用いればそういった形を扱うことは可能である。しかし，非常に楽観的に，雑に，計算を実行してみても，Nが10^{290}から10^{300}くらい大きくならないと(4)の形でNが表される，という結論が得られない。コンピューターの側からの結果と照らし合わせてみれば，10^{290}というのはまだまだ大きすぎる。よって，この方針でも$\mathcal{E}_{16}$を完全に決定するのは，少なくとも現在では，無理なのである。

というあたりが1998年の9月頃までの状況であった。我々は$\mathcal{E}_{16}$に未練を残しながらも，$\mathcal{E}_{17}$までは決定できたし，$\mathcal{E}_{16}$についても不完全ながら何がしかのことは言えるのだから，ということで，ここまでの結果を論文として発表しようということになり，その原稿もほぼ完成に近いところまで仕上げた。その原稿を書きながらも，あともう一つ新しいアイディアがあれば$\mathcal{E}_{16}$を決定できるだろうに，と思い，たまにあれこれ考えていた。「もう一つの恒等式」に気付いたのは，そういうころであった。

恒等式(1)と似た形の2次恒等式

$$x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 2(x^2 + xy + y^2)$$

を憶い出し（Wooley氏はこれと(1)を並べて fortunate coincidence といっている），さらに

$$(z+x)^4 + (z-x)^4 = 2x^4 + 12x^2z^2 + 2z^4$$

に注意すれば，次の恒等式に行き着く。

$$(5)\qquad \begin{aligned}(z+x)^4 + (z-x)^4 + (z+y)^4 + (z-y)^4 + (z+x+y)^4 + (z-x-y)^4 \\ = 4(x^2+xy+y^2)^2 + 24(x^2+xy+y^2)z^2 + 6z^4 \\ = 4(x^2+xy+y^2+3z^2)^2 - 30z^4\end{aligned}$$

これがその「もう一つの恒等式」である。恒等式(1)の効果は，応用上「3つの4乗数を1つの平方数に変換する」と言い表すことができるのだが，この(5)の方は，「6つの4乗数を1つの平方数と1つの4乗数に変換する」ということになっている。後者は形式的にみて，「5つの4乗数」と「1つの平方数」の置き換えになっているから，その意味では(5)は(1)よりも効力が弱い。しかし，(1)と異なり，(5)の左辺にある6つの4乗数は，6つとも同時に奇数となることができる。実際，x, yが偶数でzが奇数であればよいわけである。これが(5)が(1)よりも優る点である。またここでは詳しくは触れないが，(5)がHuaの不等式よりも有効な mean value estimate を導くことも容易に見抜ける。したがって(5)に気付いた瞬間に筆者は$\mathcal{E}_{16}$も決定できることを確信したのである。

恒等式(5)により，我々は次のような表現の考察に導かれる。

$$(6)\qquad N = \underbrace{2m_1^2} + \underbrace{4m_2^2 + 24m_2z^2 + 6z^4} + x_1^4 + \cdots + x_7^4 \qquad (m_1, m_2 \in \mathbb{N},\ z, x_j \in \mathbb{N}).$$

恒等式(1)，(5)により，下線を付けた部分がそれぞれ3個，6個の4乗数の和に分解することがわかるから，Nが(6)の形で表されればNは16個の4乗数の和であることがわかる（大したことではないが，(5)に従って分解したときの6個の4乗数がどれも0でないことを保障するには，(6)でm_2とzについてさらなる条件が必要になるが，そのような細部はここでは省略する）。そして，我々は実際に，$N > 10^{216}$かつ$16 \nmid N$ならば，Nは(6)の形で表されることを示すことができ，それにより定理1を得るのである。

ここでは定理1の証明にこれ以上立ち入るのを止めることにするが，いずれ発表されるであろう論文[5]の§2に，証明の概略についてのより詳しい記述がある。上では基本的な方針についてしか述べなかったが，実際の証明には他にも多くのアイディアや工夫が盛り込まれている。その中から一つだけ，(2)の形の不定方程式の解の個数

に対する有効な評価を得る際などに用いられる次の補題を紹介して，この報告文の結びとしたい。興味をもたれた読者には，是非この補題の証明を考えてみていただきたい。きっと楽しんでいただけるのではないか，と思う。その証明の一例は，[5]の§9にある。

補題 $\tau(n)$を約数関数（nの正の約数の個数）とし，$g(d)$を，素数pのべきp^l $(l\geq 1)$に対して，

$$g(p^l)=\begin{cases}3 & (l=1,2)\\ 27 & (l=7,9,11)\\ 9 & (\text{その他})\end{cases}$$

と定義されている乗法的関数とする。するとすべての自然数nに対して，

$$\tau(n)\leq 8\cdot\sum_{\substack{d\mid n\\ d<n^{1/4}}} g(d).$$

参考文献

[1] Deshouillers, Sur la majoration de sommes de Weyl biquadratiques, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 19 (1992), 291–304.

[2] Deshouillers–Dress, Sommes de diviseurs et structures multiplicatives des entiers, Acta Arith. 49 (1988), 341–375.

[3] Deshouillers–Dress, Sums of 19 biquadrates: On the representation of large integers, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 19 (1992), 113–153.

[4] Deshouillers–Dress, Numerical results for sums of five and seven biquadrates and consequences for sums of 19 biquadrates, Math. Comp. 61 (1993), 195–207.

[5] Deshouillers–Kawada–Wooley, Sums of sixteen biquadrates, (in preparation).

[6] 川田浩一 (K. Kawada), Topics in Waring's problem for fourth powers (Japanese), 数理解析研究所講究録1091「解析数論と数論諸分野の交流」, 1999年4月, 157–171.

[7] Kawada–Wooley, Sums of fourth powers and related topics, J. Reine Angew. Math. 512 (1999), 173–223.

[8] Nathanson, "Additive Number Theory: The Classical Bases", Graduate Text in Math. 164, Springer, 1996.

[9] Vaughan, "The Hardy-Littlewood Method", 2nd ed., Cambridge Tracts in Math. 125, Cambridge Univ. Press, 1997.