

多重ゼータ関数の解析接続と漸近展開

松本耕二 (Kohji Matsumoto)

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

1 起の段

今回の研究集会で筆者が報告した結果 [18] についての研究は 1999 年内に行われたものだったが、基本的な着想に至る経緯を説明するためには、少し時間を遡って話を始めるのがよいのではないかと思う。

Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s, \alpha)$ は、 $\Re s > 1$ で絶対収束する級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+n)^{-s}$ を複素全平面へ解析接続したものであるが、この関数から初項を取り除いたものを $\zeta_1(s, \alpha) = \zeta(s, \alpha) - \alpha^{-s}$ と書くことにする。但し α は正実数である。この関数の α に関する二乗平均

$$\int_0^1 |\zeta_1(s, \alpha)|^2 d\alpha \tag{1}$$

の漸近的挙動について、筆者は桂田昌紀氏といくつかの共著論文を書いたが、このテーマに関する氏との共同研究の最も本質的な部分が進められたのは、1992 年の秋から 1994 年の春にかけてであった。その経緯はかなり詳しく [16] に述べたのでここでは繰り返さないが、その共同研究は 1994 年春には一段落し、その年の夏には、共同研究の内容と関係はあるもののそれぞれ異なる独自のテーマへと、筆者も桂田氏も向かいつつあった。この二つの異なる流れが後に融合して今回の結果が得られたわけだから、この時期が話の出発点としては適当であろう。

筆者が Barnes の二重ゼータ関数についての最初の着想を得たのは、もう少し遡って、1994 年 2 月のことだった。この頃は桂田氏との共同研究が急を告げている時期だったわけだが、その共同研究における (1) の扱いの基礎は、

$$\begin{aligned} \zeta(u, \alpha)\zeta(v, \alpha) &= \left(\sum_{m=n} + \sum_{m<n} + \sum_{m>n} \right) (\alpha+m)^{-u}(\alpha+n)^{-v} \\ &= \zeta(u+v, \alpha) + f(u, v; \alpha) + f(v, u; \alpha) \end{aligned} \tag{2}$$

なる分解 (Atkinson の分割) にある。ここに

$$f(u, v; \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha+m)^{-u} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha+m+n)^{-v} \tag{3}$$

であり、この関数 $f(u, v; \alpha)$ の扱いが研究の実質的な中心部分であった。さて 1994 年 2 月のある日、筆者は大学の研究室で荒川恒男氏の論文 [4] をなんとなく眺めていて、その論文

の第一ページに出ている Barnes 二重ゼータ関数の定義式

$$\zeta_2(v; \alpha, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + m + nw)^{-v} \quad (4)$$

($\alpha > 0, w > 0$; 但し上の表記は荒川氏の notation とは少し違う) が, どころなく (3) の $f(u, v; \alpha)$ の定義式と似ていることに気がついた。そうするとすぐに,

$$\tilde{\zeta}_2(u, v; \alpha, w) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha + m)^{-u} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + m + nw)^{-v} \quad (5)$$

とおけば, これが (3) と (4) を共に含む一般化になっていることに思い至った。そうなれば, 桂田氏との共同研究で開発した $f(u, v; \alpha)$ の扱いを, そのままこの $\tilde{\zeta}_2(u, v; \alpha, w)$ の場合に一般化してやれば, 最後に $u = 0$ と特殊化することで Barnes 二重ゼータについての情報が得られるのではないかと考えるのは自然な発想であろう。

しかしその時点では, 桂田氏との共同研究も完成していなかったし, またそもそも, Barnes 二重ゼータについては殆んどなにも知らなかった。Barnes の原論文に目を通したりしているうちに夏になり, 上述の着想をとにかく実行してみたところ, $\zeta_2(v; \alpha, w)$ の w に関する ($w \rightarrow \infty$ の時の) 漸近展開と, またその Corollary として二重ガンマ関数の漸近展開などが得られた。7 月には村田玲音氏にお願いして, 明学での私的なセミナーの場を用意してもらい, 得られた結果について check も兼ねて江上繁樹氏と桂田氏に聞いてもらった。この時に江上氏は既に, 次の二つの重要なコメントを述べられた:

(E1) 二変数にしなければならない本質的な理由がわからない。最終的な対象の $\zeta_2(v; \alpha, w)$ は一変数なのだから, 一変数のままでできる証明があるのではないかと?

(E2) 一方, $\tilde{\zeta}_2(u, v; \alpha, w)$ を更に一般にして

$$\sum_m \sum_n (\alpha + m + nw_1)^{-u} (\beta + m + nw_2)^{-v} \quad (6)$$

とおき, とくに $u = v$ とすると新谷卓郎氏の導入した二重ゼータになる。この観点からは, (5) は Shintani ゼータが degenerate したものと見なすことができ, それ自身面白い対象なのかもしれない。本来の Shintani ゼータ (6) に対して漸近展開を出すことはできないか?

しかしこの段階では, これらのコメントに肯定的に答えることはできなかった。この時の漸近展開の証明の基礎にあるのは, $\tilde{\zeta}_2(u, v; \alpha, w)$ の contour integral による積分表示であったのだが, 議論の途中で, $u = 0$ を含まない領域への解析接続が必要となる。従ってこの方法では, u を導入せざるを得ないのである。また (6) の contour integral による表示もできそうにもなかった。そういうわけで江上氏のコメントはしばしば放置されてしまうことになる。

この段階では解決できなかった問題をもう一つ述べておこう。それは Eisenstein 級数

$$G_v(w) = \sum_m \sum_n (m + nw)^{-v} \quad (7)$$

の漸近展開である。但しここに w は複素上半平面 \mathbf{H} の元であり, 和は $m = n = 0$ を除くすべての整数にわたる。この定義式 (7) と Barnes 二重ゼータ (4) との類似性は明白なので, (7) についてもその w に関する漸近展開を出せないかと問うのは全く自然である。実際筆者も研究の初期にその可能性を検討したし, 後日 (1996 年 12 月) アメリカでこのテーマで講演した時にも聴衆の一人からそうした質問が出た。筆者の論文 [17] では簡単のために w は正の実数としているが, 実は $\Re w > 0$ なる任意の複素数 w について全く同じ論法が通用することがすぐわかるので, $G_v(w)$ についても, $\Re w > 0$ であれば結果が出せないかと考えたい。しかし, 問題点は (7) の和が正負の整数にわたる点にある。この和のうち, m と n のどちらか一方が 0 であるような項は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ に帰するのでそれらは除外すると, 残りは

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (m+nw)^{-v} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (m-nw)^{-v} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-(m-nw))^{-v} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-(m+nw))^{-v} \end{aligned} \quad (8)$$

と分けられるが, このうち第一と第四の和は $\Re w > 0$ であれば [17] の方法で漸近展開が出せるが, 第二と第三の和については, $\Re(-w) < 0$ となるため, 扱えなくなってしまう。この障壁を, contour integral の方法では越えられそうもなく, 筆者はこの時はこの問題をこれ以上は追求しなかった。

さて, 筆者がこのように Barnes 二重ゼータの研究に没頭していた 1994 年の夏に, 桂田氏の方では, 後に彼の多くの研究を産み出す原点となった, Mellin-Barnes 積分をゼータ関数の理論に応用する最初の着想を展開しつつあった。もともと, (1) についての研究の前に, Dirichlet の L 関数の二乗平均値 $\sum_{\chi} |L(s, \chi)|^2$ についての, 同様の contour integral を用いた, 桂田氏と筆者による共同研究があったわけだが, 桂田氏はその研究に立ち返って再考したのである。そして, 積分表示として contour integral ではなく Mellin-Barnes 積分を用いることで, より明快で簡単な別証明が得られることを発見した。

桂田氏の仕事と筆者の仕事は, どちらも 1994 年秋の数理解研での研究集会で公表された。論文としての出版はどちらも 1998 年まで待たされることになる ([12], [17])。なお筆者の [17] には少々, 不正確な記述がある。これについては [19] を参照していただきたい。

桂田氏はその後, Hurwitz ゼータの二乗平均 (1) についての結果も Mellin-Barnes 積分を用いて簡明な別証明ができることを示した。彼はこの結果についてバルセロナで開かれた Journées Arithmétiques で報告し, その報告集に詳細を公表している ([11])。続いて桂田氏は, 筆者の [17] に示唆されて, Barnes 二重ゼータの別の一般化として

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+m)^{-u} (\alpha+\beta+m+n)^{-v} \quad (9)$$

の形の級数を (実際には更に一般に指数因子つきのものを) 導入した。1996 年春の数理解研での国際研究集会における桂田氏の講演の主定理は Lerch ゼータ関数のある種の漸近展開公式であったが, 氏はその応用の一つとして, 絶対収束領域 $\Re u > 1, \Re v > 1$ における (9) の挙動を考察した。そして α もしくは β に関するある種の漸近展開を示した。その証明

はやはり Mellin-Barnes 積分に基づくものであり、二重ゼータ関数に Mellin-Barnes 積分の手法を適用したおそらく最初の研究であるが、論文としては現在のところ速報 [13] しか公表されていない。

筆者は、論文 [17] の原稿を 1995 年の春には完成して投稿したのだが、その後はしばらく別の研究テーマ (Universality とか, Rankin-Selberg series とか) を追った。Hurwitz ゼータの二乗平均について Mellin-Barnes の手法が有効であることが上述のように桂田氏によって示された以上、その単純な一般化である [17] の議論も Mellin-Barnes の方法で書き直せることは容易に想像できた。しかしそれは桂田氏の論文 [11] の殆んど自明な一般化でしかないだろうし、得られる結果も単に [17] の結果の別証明だけだろうなあ、と思うとその計算を実行する気にはなかなか出来なかった。そうこうするうちに 1998 年を迎え、状況が変化するきっかけとなる二つの出来事があった。一つは [17] がようやく出版されたことであるが、もう一つは江上氏による、多重ゼータ関数についての集中講義が新潟大学で行われたことであった。

2 承の段

江上氏のこの集中講義は、秋山茂樹氏の招きで 1998 年 11 月に行われたものである。筆者は谷川好男氏と共にこの講義に出席した。また秋山氏の学生の石川秀明氏も参加していて、今から思えば 1999 年以降の多重ゼータ関数の理論の新展開に関与する殆んどすべての日本人が一堂に会していたことになる。初冬の日本海は果てることなく暗い波を浜にたたきつけていた。荒れる海を見つめながら石川氏は筆者の傍らで、「これが、新潟です。」と半ば独り言のようにつぶやいた。

江上氏の講義は、Barnes, Shintani, Zagier らの導入した種々の多重ゼータ関数について、包括的な観点から論じ、更に Dedekind 和やゼータ関数の二乗平均への応用にまで及ぶものであった。この集中講義の講義ノート [7] は、解析数論 HP で見ることができる。

Barnes が彼の二重ゼータ関数 (4) を導入したのは 20 世紀初頭であるが、彼の本来の目的は二重ガンマ関数の理論を整備することにあつた。続いて Barnes は多重ガンマ関数の理論へ進み、そのために必要な道具として、(4) の一般化である彼の多重ゼータ関数

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} (\alpha + m_1 w_1 + m_2 w_2 + \cdots + m_r w_r)^{-v} \quad (10)$$

を (任意の自然数 r に対して) 定義した。但し $\alpha > 0$ であり、また w_j たちはある種の条件を満たす複素数であるが、例えば $w_j > 0$ ($1 \leq j \leq r$) ならばよい。そして Barnes はこの関数の全 v 平面への解析接続を含めて、多くの基本的性質を証明したのである。

Barnes 自身は解析学者であつて、数論への応用という観点はおそらくあまり意識していなかったと思われる。Hardy と Littlewood がある種の Dirichlet 級数の研究に二重ゼータを利用したこともあるが、数論における多重ゼータ関数の理論の重要性を明らかにしたのは、70 年代の新谷氏の一連の仕事である。総実代数体の Hecke の L 関数を、彼自身が定義した新しい多重ゼータ関数 (Shintani の多重ゼータ) の一次結合で表示し、これをもとに L 関数の特殊値を Barnes の多重ガンマ関数で書き表し、実二次体上の類体が二重ガンマ関数の特殊値の積で生成されるであろうという予想を提出した新谷氏のこの業績はあまりにも

有名であるが、これが一つのきっかけとなって、多重ゼータや多重ガンマはそれ以来、数論の論文にしばしば登場するようになった。特に日本では、黒川信重氏、藤井昭雄氏、荒川恒男氏、片山孝次氏、大槻真氏、石橋陸氏、そして江上氏など多くの人々の寄与がある。最近では金光滋氏らの級数論的な方向からの研究もある。

他方 1994 年, Zagier [22] は多変数の級数

$$\tilde{\zeta}_r(v_1, \dots, v_r) = \sum_{1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_r} m_1^{-v_1} m_2^{-v_2} \dots m_r^{-v_r} \quad (11)$$

について論じた。この和は二変数の場合、既に Euler 以来考察されていることから、Euler-Zagier sum などと呼ばれる。Zagier はこの級数の解析接続などにはあまり関心がなく、もっぱら v_j たちが自然数 (≥ 2) の時の特殊値の性質に考察を絞っている。それはこの特殊値 (多重ゼータ値) が、数学の多くの分野と結びつく興味深い対象だと考えられるからである。(例えば金子昌信氏の論説 [10] が良いガイドになる。)

しかし江上氏の集中講義の中では、Euler-Zagier sum (11) の解析接続が問題とされた。この講義が行われた時点では、荒川氏と金子氏による、変数 v_r のみの一変数関数とみなした時の接続 [5] が唯一の既知の結果であり、一般の解析接続は未解決だったのである。但し $r = 2$ の場合だけは、1949 年の Atkinson の論文 [6] の中で既に接続が示されている。この時、(11) は (3) の $\alpha = 1$ の場合に帰するが、Atkinson は Riemann ゼータ関数の二乗平均値の研究の中でこの和に遭遇し、Poisson の和公式を用いて解析接続を証明している。

江上氏の講義が直接の刺激となって、その直後に江上氏と秋山氏、谷川氏による共同研究が行われ、 $\tilde{\zeta}_r(v_1, \dots, v_r)$ の r 変数関数としての解析接続が、Euler-Maclaurin の公式を使って証明された ([1])。実は同じ頃、Zhao [23] も全く異なる方法で解析接続の証明を得ていた。また荒川氏によれば、荒川・金子の方法 [5] を深めることによっても、 r 変数の解析接続が示せるとのことである。こうして突然、種々のルートで解析接続が示され、多変数有理型関数としての $\tilde{\zeta}_r(v_1, \dots, v_r)$ を研究する基礎が確立されたのである。事実、引き続いて秋山氏と谷川氏は、 $\tilde{\zeta}_r(v_1, \dots, v_r)$ の負の整数点についての詳細な研究 [3] を行った。また秋山氏は石川氏と共に、(11) に r 個の Dirichlet 指標を付けた多重 L 関数を考え、その解析接続を示した ([2])。そのために彼らは、まず多重 L 関数を多重 Hurwitz ゼータ関数

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_r=1}^{\infty} (\alpha_1 + m_1)^{-v_1} (\alpha_2 + m_1 + m_2)^{-v_2} \times \dots \times (\alpha_r + m_1 + m_2 + \dots + m_r)^{-v_r} \quad (12)$$

(但し $1 \leq j \leq r$ に対し $0 \leq \alpha_j < 1$) の一次結合で書き表し、次いで [1] の方法を拡張して (12) の解析接続を証明した。石川氏は更にこの結果を、ある種の多重指標和の評価に應用している。これについては本講究録中の氏の論説 [9] に解説されている。なお (12) で $r = 2$ の時だけは、既に桂田氏と筆者による Hurwitz ゼータについての共著論文 [15] の中で、contour integral の手法によって解析接続が示されていることを付記しておこう。

筆者は 1999 年 5 月に、[17] の結果の Mellin-Barnes 積分による別証明という、放置していたテーマを実行し始めた。なかなか実行する気になれなかった、と前節には書いたが、しかしまあ、時間がとれたらいつかやってみよう、とも思っていたのである。それは一つには、

Mellin-Barnes の方法を自分で使ってみたことはそれまでなかったので、最低限その手法を身につける演習問題としての意味はあるだろうと思ったからであるが、実はもう一つ、単なる別証明以上に得るものがあるかもしれないという期待もあったのである。その事情を説明しよう。

Mellin-Barnes 積分の方法の出発点となるのは、

$$\Gamma(z)(1+\eta)^{-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \Gamma(z+s)\Gamma(-s)\eta^s ds \quad (13)$$

なる古典的な積分公式である。ここに z と η は複素数で、 $\Re z > 0$, $|\arg \eta| < \pi$, $\eta \neq 0$, そして積分路は $c - i\infty$ から $c + i\infty$ への垂直な直線を表すとする。この (13) において $z = v$, $\eta = nw/(\alpha + m)$ とおき、両辺を $\Gamma(v)(\alpha + m)^{-u-v}$ で割ると、

$$(\alpha + m)^{-u}(\alpha + m + nw)^{-v} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{\Gamma(v+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(v)} (\alpha + m)^{-u-v-s} (nw)^s ds \quad (14)$$

を得る。今 $\Re u > 1$, $\Re v > 1$, そして $-\Re v < c < -1$ と仮定すれば、上式の m, n についての和をとることができて、

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_2(u, v; \alpha, w) &= \zeta(u+v, \alpha) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{\Gamma(v+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(v)} \zeta(u+v+s, \alpha) \zeta(-s) w^s ds \end{aligned} \quad (15)$$

となる。この右辺の被積分関数の、積分路より左側にある極は $s = 1 - u - v$ と $s = -v - n$ (但し $n = 0, 1, 2, \dots$) である。そこで積分路を左に shift すると、これらの極からの留数が w について降べきにならび、shift された積分項の収束する領域が広がって、漸近展開と解析接続が同時に得られることになる。これが Mellin-Barnes の方法による [17] の主結果の別証明のアウトラインである。

おおよそこういう筋で別証明が得られるであろうことは、計算を始める前から予想がついていたことである。ところが、(15) の右辺の被積分関数は、当初の積分路の右側にも、 $s = -1, 0, 1, 2, \dots$ の位置に極を持つ。それでは積分路を右に shift して、これらの留数をカウントすると何を得ることになるのか?

このような状況は、一般にゼータ関数の Mellin-Barnes 型の積分表示をすると必ず出てくる。右側への shift が何をもたらすか、ということは桂田氏が早くから問題にしていたことであり、筆者も彼からこの観点を初めて示唆された。上の (15) の場合には、右 shift が $w \rightarrow 0$ の時の漸近展開を与える可能性を容易に感じとれる。もしそうなら、それは contour integral の方法では捉えられなかった新しいものである。計算を始めるときに筆者が期待したのはこういうことだったのである。

期待どおりに右 shift によって $w \rightarrow 0$ の時の漸近展開が得られることはすぐにわかった。このあたりで結果を state しておこう。 N を任意の正整数とするとき、 $w \rightarrow \infty$ の場合には

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_2(u, v; \alpha, w) &= \zeta(u+v, \alpha) + \frac{\Gamma(1-u)\Gamma(u+v-1)}{\Gamma(v)} \zeta(u+v-1) w^{1-u-v} \\ &+ \sum_{n=0}^{N-1} \binom{-v}{n} \zeta(u-n, \alpha) \zeta(v+n) w^{-v-n} + O(|w|^{-\Re v - N}) \end{aligned} \quad (16)$$

が $\Re u < N + 1$, $\Re v > -N + 1$ で (u が正整数でなければ) 成り立つ。また $w \rightarrow 0$ の場合には

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_2(u, v; \alpha, w) &= \zeta(u + v, \alpha) - \frac{1}{1 - v} \zeta(u + v - 1, \alpha) w^{-1} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1} \binom{-v}{n} \zeta(u + v + n, \alpha) \zeta(-n) w^n + O(|w|^N) \end{aligned} \quad (17)$$

が $\Re v > -N$, $\Re(u + v) > 1 - N$ で成り立つ。特に $u = 0$ とおくと Barnes 二重ゼータ関数の漸近展開を得る。上記のうち (16) は [17] で示されていた式であり, (17) は今回新しく得られたものである。

しかし, $w \rightarrow 0$ の時の展開も得られるということ以上に, 注目すべき事実には筆者はすぐに思い至った。式 (13) において, η の偏角には $|\arg \eta| < \pi$ という制限しかない。従って (15) は $|\arg w| < \pi$, $w \neq 0$ なる任意の複素数について成り立つ。よって漸近展開 (16), (17) もそのような任意の複素数に対して成立し, 誤差評価は勝手な θ_0 ($0 < \theta_0 < \pi$) に対して $|\arg w| \leq \theta_0$ において一様である。前節で述べた Eisenstein 級数についてのコメントを想起すれば, このことの重要性は直ちに理解されるであろう。筆者は (16) と (17) から, Eisenstein 級数 (7) の, w に関する漸近展開を導出できたのである。更にまた, (16) や (17) から二重ガンマ関数の漸近展開もすぐ出せるので, 新谷氏が [21] で見出した二重ガンマと Dedekind エータとの関係式により, Dedekind エータの漸近展開も得られる。こうしたことに筆者は 5 月の末に気づいたのだが, その時は興奮して桂田氏に電話して色々 discussion したものである。Mellin-Barnes の手法が, contour integral の限界を確かに越えるものであることに, 筆者は気づき始めていた。この手法でどこまで進むことができるか, 本格的に検討すべきであることはもはや明らかだった。

7 月になって筆者は, 江上氏の当初のコメントのうちの (E2) に対する一つの解答が, Mellin-Barnes の方法によって得られることに気づいた。Shintani の二重ゼータ関数として, (6) よりも,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a + m + (b + n)w_1)^{-u} (a + m + (b + n)w_2)^{-v} \quad (18)$$

の形の方が Mellin-Barnes の枠組みにのせやすいし, もともとの新谷氏の定義 ([20]) にも合致するのでこちらを考えることにする。但し $a > 0$, $b > 0$, また w_1, w_2 もここでは正の実数とする。(新谷氏が考えたのは $u = v$ の場合であるが, その後上のような多変数型の Shintani ゼータも考えられるようになった。cf. Hida [8].) 対称性から $w_1 \leq w_2$ としてかまわないが, 更に $w_1 = w_2$ の時は (18) は Barnes 二重ゼータに帰するので, 以下では $w_1 < w_2$ と仮定する。すると, (13) から (15) を導いたのと類似の議論を今度は

$$\eta = \frac{(b + n)(w_2 - w_1)}{a + m + (b + n)w_1}$$

ととって行うことで, (18) の, 関数 $\tilde{\zeta}_2(-s, u + v + s; b, b + aw_1^{-1}, w_1^{-1})$ を被積分関数に含む, Mellin-Barnes 型の積分表示を得ることができる。但しここに

$$\tilde{\zeta}_2(u, v; \alpha, \beta, w) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha + m)^{-u} \sum_{n=0}^{\infty} (\beta + m + nw)^{-v} \quad (19)$$

とする。この (19) は (5) を少々一般化したものであるが、(5) と全く同様に扱えて、解析接続や漸近展開を示すことができる。つまり解析的な情報が十分にわかるのである。そこで、積分路の shift により、(19) の形の量を展開係数に含むような、Shintani ゼータ関数 (18) の漸近展開が得られることになる。そしてその展開係数に、(16), (17) を少々一般化した (19) の漸近展開式を代入することもできる。こうして江上氏の (E2) は肯定的に解けたわけである。

実は Mellin-Barnes の方法によれば、江上氏の問題の (E1) の方も自然に解けてしまう。この方法では途中で $u = 0$ を含まない領域を考える必要はなく、単に (14), (15) のあたりの議論を $u = 0$ として行えばいいのであって、本来の Barnes 二重ゼータの漸近展開を出すだけなら (5) のような一般化を導入しなくてもよくなった。こうして、前節に述べた三つの未解決問題は、Mellin-Barnes 積分の手法によって、すべて肯定的解決をみたわけである。

しかしながら、もし筆者が初めから上記の事実に気づいていたとしたら、(5) の形の一般化を考えることもなかっただろうから、それを更に一般化した (19) を用いた Shintani 二重ゼータの積分表示には至らなかったかもしれないし、また次節で述べる方向へと着想が進むこともなかったような気もする。そうだとすれば、最初の段階で筆者が contour integral の方法しか知らなかったことは、むしろ幸運だったのかもしれない。

Shintani 二重ゼータの漸近展開の具体的な計算はかなり複雑で、筆者はこの夏、計算を全く間違えたり、無用の回り道をしたりの悪戦苦闘を続けた。秋の声を聞く頃になると、ようやく状況が整理されてきた。Shintani ゼータの場合、 $w \rightarrow \infty$ の時と $w \rightarrow 0$ の時とでは、ある意味で状況がかなり異なっていることが判明した。まだ計算の細部は完全とはいえなかったが、(16), (17) など出来上がっている部分については 10 月に入ってから論文の TeX file の作成も始めた。今回の数理研の研究集会 (1999.11.29 - 12.3) では研究代表者だったので、そのプログラム作成などの作業も進める必要があった。やがて秋も深まり、11 月を迎えて、TeX file もかなり仕上がってきた。研究集会の日が近づきつつあった。

3 転の段

前節で述べたように、1999 年に入ってから、Euler-Zagier sum の解析関数としての性質の研究は大きく進展しつつあった。その立役者の一人である石川氏が、7 月 19 日に名大を訪問し、多重 L 関数と多重指標和についての彼の最新結果についてセミナーで喋ってくれた。この時には氏は簡単のために主として $r = 2$ の場合について話したので、出てくる二重 Hurwitz ゼータ ((12) の $r = 2$ の場合) は筆者が導入していた (19) の $w = 1$ の場合と本質的に一致しており、筆者は全く驚いたものである。

しかし筆者は当時、一般の r 重ゼータ関数の研究に進んでいくつもりはなかった。もとの contour integral の手法が $r = 2$ の場合にしか使えそうもないものだったし、また江上氏の新潟での集中講義の折りの、「 $r = 2$ の時だけ、色々深い結果が得られている。」という発言にある意味でミスリードされていたということもあって、 $r = 2$ の場合だけに関心が集中していたのである。一般の r 重ゼータについては秋山氏たちに任せて、自分は $r = 2$ の場合に (できれば一般論の及ばない深い) 結果を出すことに専念しようと、むしろはっきりと意識していたことを記憶している。要するに $r \geq 3$ の場合に対しては、完全に傍観者としての立場をとっていたのである。だが意識下では、Barnes 二重ゼータの場合にも

Shintani 二重ゼータの場合にも、一段階簡単なゼータを含む積分表示で書き表せるという Mellin-Barnes 積分の方法の構造が、少しずつ筆者の脳裏の深奥部に浸透しつつあったのかもしれない。

1999年11月13日夕刻、筆者は研究室での仕事を終えて、大学構内を帰宅の途についていた。11月も半ばの日は短く、構内は既にすっかり夜のとばりにつつまれている。東山公園方面へ抜ける門へ続く暗い坂道を上っている時、全く突然、天啓のように、(12) のような形の r 重ゼータが、 $r-1$ 重ゼータを被積分関数に含むような Mellin-Barnes 型積分表示を持つであろう、という着想が閃いた。そうであれば、 $r=1$ の時は Hurwitz ゼータでよくわかっているわけだから、任意の r に対する r 重ゼータの情報が帰納的に得られるであろうことは直ちに予想できる。重大なことに気づいたかもしれないと、直感的に思った。しかし記憶を頼りに頭の中でした計算にまだ確信がなかった。家に帰りついてすぐ、紙の上であわただしく計算をやり直してみた。坂道で思いついた計算が正しかったことを確認した時、ぞくっとする興奮が、確かに身体を走り抜けた。川田体験である！(川田体験については、講究録 Vol.1091 所載の川田浩一氏の感動的な文章を参照されたい。)

一般に $\alpha_j > 0$, v_j, w_j は複素数 ($1 \leq j \leq r$), $\Re v_j > 1$ として

$$\begin{aligned} & \tilde{\zeta}_r(v_1, \dots, v_r; \alpha_1, \dots, \alpha_r; w_1, \dots, w_r) \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} (\alpha_1 + m_1 w_1)^{-v_1} (\alpha_2 + m_1 w_1 + m_2 w_2)^{-v_2} \\ & \quad \times \cdots \times (\alpha_r + m_1 w_1 + m_2 w_2 + \cdots + m_r w_r)^{-v_r} \end{aligned} \quad (20)$$

と定義すれば、これが Barnes 多重ゼータ (10) と Euler-Zagier 型の和 (11)(12) を共に特殊な場合として含む一般化になっており、しかもこの (20) に対して上述の着想が適用できて解析接続と w_j たちに対する漸近展開が得られるであろうことはその日のうちにわかった。

実際には w_j たちの偏角や相互関係には多少の条件がつくが、例えば $w_j > 0$ に限定すれば何の条件もいらなくなる。そして (20) で $v_1 = v_2 = \cdots = v_{r-1} = 0$ とおくと Barnes 多重ゼータ (10) となる。よって (筆者はまだ詳細を実行していないが) Barnes 多重ゼータの漸近展開式も得られるはずである。しかし研究集会の期日は迫っており、(20) についての Mellin-Barnes 積分による理論を、完全に一般的な形でそれまでに展開することは不可能だった。そこで筆者はひとまず、 $w_1 = w_2 = \cdots = w_r = 1$ の場合、即ち

$$\begin{aligned} & \tilde{\zeta}_r(v_1, \dots, v_r; \alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} (\alpha_1 + m_1)^{-v_1} (\alpha_2 + m_1 + m_2)^{-v_2} \\ & \quad \times \cdots \times (\alpha_r + m_1 + m_2 + \cdots + m_r)^{-v_r} \end{aligned} \quad (21)$$

の形の関数に考察を限定することにした。簡明な形で理論を展開するには

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r \quad (22)$$

なる条件が必要だが、これを仮定しても、(21) は秋山・石川の (12) より少しだけ一般である。(21) の和は $m_j = 0$ から始まっていることに注意。) 筆者は (22) の条件の下に、この (21) が v_1, \dots, v_r の関数として全 \mathbb{C}^r 空間に有理型に解析接続できることを証明した。

証明の基本的な仕組みは今までと同様である。今度は (13) において $z = v_r$,

$$\eta = \frac{\alpha_r - \alpha_{r-1} + m_r}{\alpha_{r-1} + m_1 + m_2 + \cdots + m_{r-1}}$$

ととることにより, Mellin-Barnes 型積分表示

$$\begin{aligned} & \tilde{\zeta}_r(v_1, \dots, v_r; \alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{\Gamma(v_r + s)\Gamma(-s)}{\Gamma(v_r)} \zeta(-s, \alpha_r - \alpha_{r-1}) \\ & \quad \times \tilde{\zeta}_{r-1}(v_1, \dots, v_{r-2}, v_{r-1} + v_r + s; \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}) ds \end{aligned} \quad (23)$$

を得る。この式が坂道で得た基本的着想である。あとは積分路を shift してやれば解析接続ができるわけだが, その shift の際に, 被積分関数に含まれている $r-1$ 重ゼータの order や特異点の位置といった情報が必要となる。こういう情報も帰納法によって下から順に手に入れていかねばならないので, 実際の帰納法の手順は少々繁雑になる。しかしとにかく, この証明は研究集会直前に完成し, 筆者は研究集会においてこの解析接続の結果まで報告することができた。

論文 [18] の TeX file は 12 月 10 日に打ち上がった。これは現在投稿中であるが, 展開式 (16), (17) や Eisenstein 級数の漸近展開, Shintani ゼータ関数についての結果, そして上述した r 重ゼータの解析接続の結果などを, すべて詳しい証明つきで述べてある。

筆者が得た Mellin-Barnes 積分の方法による解析接続は, 多変数多重ゼータ関数の解析接続に関する第四の証明法であるが, また同時に, shift した後の表示式が特異点の位置や留数についての情報を explicit に与えていることなど, 更なる研究を進めていく土台としてはなかなか有効な方法なのではないかと思う。実際, 最近江上氏と筆者が進めている Hurwitz ゼータ関数の離散高次べき平均値についての共同研究においても, Mellin-Barnes の方法は効力を発揮している。ここで考えているのは例えば, q, k を自然数として

$$\sum_{a=1}^q \left| \zeta\left(s, \frac{a}{q}\right) \right|^{2k} \quad (24)$$

の形の和であるが, その研究は結局

$$\sum_{a=1}^q \tilde{\zeta}_r\left(v_1, v_2, \dots, v_r; \frac{a}{q}, \frac{a}{q} + 1, \dots, \frac{a}{q} + (r-1)\right) \quad (25)$$

なる形の多重ゼータ関数の和に帰着する。そしてこの (25) の q についての漸近展開式は Mellin-Barnes 積分の方法で既に得られていて, 筆者は先日 (2000 年 3 月) の山梨大学でのミニ研究集会においてこの結果を報告した。従って原理的には, 任意の k に対し, (24) の q についての展開が導出できるはずである。以前に筆者は, 桂田氏と共同で, $k=1$ の場合の展開だけは得ていた ([14]) が, まさか一般の k に対しても同様の展開を出せる可能性があるとは思ってもみなかった。この江上氏との共同研究を通して, 筆者は Mellin-Barnes 積分の手法の強力さを一段と確信しつつあるように思う。

当面思いつく問題は他にもたくさんある。既述したように (20) の w_j に関する漸近展開は出せるはずで, これは既に少しは計算を進めつつある。秋山・石川 [2] の多重 L 関数を

Mellin-Barnes の手法で考察するのも意味のあることだろう。桂田氏の [13] の諸結果の多重化という問題も興味深いと思う。桂田氏と筆者の共同研究による, (1) やその導関数版についての一連の結果もその多くが多重化できるかもしれない。一方で, 多変数 Shintani 多重ゼータの Mellin-Barnes による扱いや, 総実代数体の Hecke の L 関数の特殊値の [19] の意味での漸近展開といった方向も考えられる。

筆者は更に遠大な問題意識もいくつか持っているが, 遠大というのは要するに茫漠とした夢物語ということの言い換えに過ぎないのであって, 現段階ではとてもここに書けるようなものではない。

多変数多重ゼータ関数の解析関数としての理論は, 今まさに始まったばかりであって, どの方向に発展していくのか, 筆者には全く予測がつかない。現在は, 当面できそうなことを片付けながら, 理論の進むべき道を模索するしかすべがない段階なのだと感じている。そういうわけなので, 本稿には「結の段」は存在しない。

参考文献

- [1] S.Akiyama, S.Egami and Y.Tanigawa, An analytic continuation of multiple zeta functions and their values at non-positive integers, preprint.
- [2] S.Akiyama and H.Ishikawa, On analytic continuation of multiple L -functions and related zeta-functions, preprint.
- [3] S.Akiyama and Y.Tanigawa, Multiple zeta values at non-positive integers, preprint.
- [4] T.Arakawa, Dirichlet series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot \pi n \alpha}{n^s}$, Dedekind sums, and Hecke L -functions for real quadratic fields, Comment. Math. Univ. St. Pauli **37** (1988), 209-235.
- [5] T.Arakawa and M.Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, Nagoya Math. J. **153** (1999), 189-209.
- [6] F.V.Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta function, Acta Math. **81** (1949), 353-376.
- [7] 江上繁樹, 多重ゼータ関数の初等理論, 新潟大学集中講義, 1998, レクチャーノート (<http://mathalg.ge.niigata-u.ac.jp/mathlink.htm>).
- [8] H.Hida, Elementary Theory of L -Functions and Eisenstein Series, London Math. Soc. Student Texts **26**, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [9] 石川秀明, On a sum related to a multiple L -function, 本講究録所載。
- [10] 金子昌信, 多重ゼータ値入門, 数理解析研究所講究録 **1097** (1999), 50-68.
- [11] M.Katsurada, An application of Mellin-Barnes' type integrals to the mean square of Lerch zeta-functions, Collect. Math. **48** (1997), 137-153.

- [12] M.Katsurada, An application of Mellin-Barnes type integrals to the mean square of L -functions, *Liet. Mat. Rink.* **38** (1998), 98-112.
- [13] M.Katsurada, Power series and asymptotic series associated with the Lerch zeta-function, *Proc. Japan Acad.* **74A** (1998), 167-170.
- [14] M.Katsurada and K.Matsumoto, Discrete mean values of Hurwitz zeta-functions, *Proc. Japan Acad.* **69A** (1993), 164-169.
- [15] M.Katsurada and K.Matsumoto, Explicit formulas and asymptotic expansions for certain mean square of Hurwitz zeta-functions I, *Math. Scand.* **78** (1996), 161-177.
- [16] 桂田昌紀・松本耕二, Hurwitz ゼータ関数の導関数の二乗平均値に関するある漸近公式, *数理解析研究所講究録* **1060** (1998), 66-90.
- [17] K.Matsumoto, Asymptotic series for double zeta, double gamma, and Hecke L -functions, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **123** (1998), 385-405.
- [18] K.Matsumoto, Asymptotic expansions of double zeta-functions of Barnes, of Shintani, and Eisenstein series, preprint.
- [19] K.Matsumoto, Asymptotic series for double zeta, double gamma, and Hecke L -functions II, preprint.
- [20] T.Shintani, On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **24** (1977), 167-199.
- [21] T.Shintani, A proof of the classical Kronecker limit formula, *Tokyo J. Math.* **3** (1980), 191-199.
- [22] D.Zagier, Values of zeta functions and their applications, in "First European Congress of Mathematics, Vol.II, Invited Lectures (Part 2)", A.Joseph et al.(eds.), *Progress in Math.* **120**, Birkhäuser, 1994, pp.497-512.
- [23] J.Zhao, Analytic continuation of multiple zeta functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.