

Missing, pooling を伴う離散サンプリングの統計的推測

関東学院大経済 布能英一郎 (Eiichiro Funo)

用語 本稿では、母集団からのランダムサンプリングを、観測と略記する。

1. Introduction

1.1. 本稿は、次の2つの定理を示すと共に、これら2つの定理に関連した種々の問題を考察する。

定理 1

第1回目の観測 $(X_{10}, X_{11}, \dots, X_{1k-1}, X_{1k}) \sim \text{Multinomial}(N_1, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \theta_k)$

第2回目の観測 $(X_{20}, X_{21}, \dots, X_{2k-1}) \sim \text{Multinomial}(N_2, \frac{\theta_0}{\theta_0 + \dots + \theta_{k-1}}, \dots, \frac{\theta_{k-1}}{\theta_0 + \dots + \theta_{k-1}})$

⋮

第k-1回目の観測 $(X_{k-10}, X_{k-11}, X_{k-12}) \sim \text{Multinomial}(N_{k-1}, \frac{\theta_0}{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2}, \dots, \frac{\theta_2}{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2})$

第k回目の観測 $(X_{k0}, X_{k1}) \sim \text{Binomial}(N_k, \frac{\theta_0}{\theta_0 + \theta_1}, \frac{\theta_1}{\theta_0 + \theta_1})$

第1回目の観測で $X_{10} = X_{11} = \dots = X_{1k-1} = 0$ の場合、第2回目以降の観測は行わない。第2回目までの観測で $X_{10} = X_{20} = \dots = X_{1k-2} = X_{2k-2} = 0$ の場合、第3回目以降の観測は行わない。以下、同様の状況を仮定する。そうすると、 θ_i ($i=0,1,2,\dots,k$) のMLEは、自乗損失下で許容的。

定理 2

第1回目の観測 $(X_{10}, X_{11}, \dots, X_{1k-1}, X_{1k}) \sim \text{Multinomial}(N_1, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \theta_k)$

第2回目の観測 $(X_{20}, X_{21}, \dots, X_{2k-1}) \sim \text{Multinomial}(N_2, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-2}, \theta_{k-1} + \theta_k)$

⋮

第k-1回目の観測 $(X_{k-10}, X_{k-11}, X_{k-12}) \sim \text{Multinomial}(N_{k-1}, \theta_0, \theta_1, \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_k)$

第k回目の観測 $(X_{k0}, X_{k1}) \sim \text{Binomial}(N_k, \theta_0, \theta_1 + \dots + \theta_k)$

第1回目の観測で $X_{10} = X_{11} = \dots = X_{1k-1} = 0$ の場合、第2回目以降の観測は行わない。第2回目までの観測で $X_{10} = X_{20} = \dots = X_{1k-2} = X_{2k-2} = 0$ の場合、第3回目以降の観測は行わない。以下、同様の状況を仮定する。そうすると、 θ_i , $i=0,1,2,\dots,k$ のMLEは、自乗損失下で許容的。

1.2. 定理1および定理2の証明には、stepwise Bayesian procedure を用いるのが簡潔である。stepwise Bayesian procedure とは、次のようなものである。

標本空間を \mathcal{X} , 母数空間を Θ で表記する。以下、離散型確率分布 $P(x|\theta)$ のみを考え、確率分布・損失関数に次の仮定を置く。

仮定 1. $x \in \mathcal{X}$ に対し、 $P(x|\theta) > 0$ を満たす $\theta \in \Theta$ が少なくとも1つ存在する。

仮定 2. 損失関数 L は δ に関して strictly convex である。

\mathcal{X} の空でない部分集合 $\mathcal{X}(i)$ に対し、 $\Theta(\mathcal{X}(i)) = \{\theta \in \Theta | g_i(\theta) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(x|\theta) > 0\}$ と定める。そうすると、標本空間を $\mathcal{X}(i)$, 母数空間を $\Theta(\mathcal{X}(i))$ とする restricted probability distribution $P_{\mathcal{X}(i)}(x|\theta)/g_i(\theta)$

が well-defined である。\$\Theta\$ の空でない部分集合 \$\Theta^*\$ に対して、\$\Theta^*\$ 上で定義されている事前確率 \$d\tau(\theta)\$ に対し、\$\Theta - \Theta^*\$ 上で zero mass を持つと定める。これにより、\$d\tau(\theta)\$ は \$\Theta\$ 上で定義された事前確率となる。
 $g(x : \tau) = \int P(x|\theta)d\tau(\theta)$ と定める。

定理 3

\$\mathcal{X}\$ の空でない部分集合の列 \$\{\mathcal{X}(i)|i \in I\}\$ と、事前確率の列 \$\{d\tau_i(\theta)|i \in I\}\$ が

- (a) \$\mathcal{X}(1) = \{x \in \mathcal{X} | g(x : \tau_1) > 0\}, \dots, \mathcal{X}(j) = \{x \in \mathcal{X} - \mathcal{X}(2) - \dots - \mathcal{X}(j-1) | g(x : \tau_j) > 0\}\$ を満たし、かつ
 \$\mathcal{X}(i) \neq \emptyset, \mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{X}(i)\$ を満たす
 (b) \$\Theta(i) = \{\theta \in \Theta(\mathcal{X}(i)) : d\tau_i(\theta) \text{ は positive mass を持つ}\}\$ と置くと、\$\{\Theta(i)|i \in I\}\$ は disjoint
 (c) 推定量 \$\delta(x)\$ が各 \$(\Theta(i), \mathcal{X}(i))\$ 上で事前確率 \$d\tau_i(\theta)\$ より一意に定まる Bayes 解

ならば、\$\delta(x)\$ は \$(\Theta, \mathcal{X})\$ で許容的。

1.3. stepwise Bayesian procedure を用いた許容性証明の例

例 1 三項分布 \$P(x_0, x_1, x_2 | \theta_0, \theta_1, \theta_2) = \frac{n!}{x_0! x_1! x_2!} \theta_0^{x_0} \theta_1^{x_1} \theta_2^{x_2}, x_0 + x_1 + x_2 = n, \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, 0 \le \theta_0, \theta_1, \theta_2 \le 1\$ にて、\$\hat{\theta}_i\$ (\$\theta_i\$ の MLE) の自乗損失下での許容性を考察する。

母数空間 \$\Theta = \{(\theta_0, \theta_1, \theta_2) | \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, 0 \le \theta_i \le 1\}\$ 上に the sequence priors \$\{d\tau_i(\theta) | i = 1, 2, 3\}\$ を

\$d\tau_1(\theta) : \theta_i = 1 (i=0,1,2)\$ にのみ集中する事前確率

\$d\tau_2(\theta) : \theta_i + \theta_j = 1, 0 < \theta_i, \theta_j < 1, i \neq j\$ にのみ集中する事前確率で、かつ

$$d\tau_2(\theta) \propto (\text{restriction}) \sum_{i \neq j} \frac{d\theta_i}{\theta_i \theta_j}$$

$$d\tau_3(\theta) \propto (\text{restriction}) \frac{d\theta_1 d\theta_2}{\theta_0 \theta_1 \theta_2}$$

で導入する。そうすると、標本空間の分割は

$$\mathcal{X}(1) = \{(n, 0, 0), (0, n, 0), (0, 0, n)\}, \quad \mathcal{X}(2) = \{(x_0, x_1, 0)\} \cup \{(x_0, 0, x_2)\} \cup \{(0, x_1, x_2)\},$$

$$\mathcal{X}(3) = \{(x_0, x_1, x_2)\}$$

で与えられる。なお、この表記で、\$1 \le x_i \le n-1, x_0 + x_1 + x_2 = n\$ なる条件を省略してある。また

$$\Theta(1) = \Theta(\mathcal{X}(1)) = \{(1, 0, 0)\} \cup \{(0, 1, 0)\} \cup \{(0, 0, 1)\},$$

$$\Theta(2) = \Theta(\mathcal{X}(2)) = \{(\theta_0, \theta_1, 0)\} \cup \{(\theta_0, 0, \theta_2)\} \cup \{(0, \theta_1, \theta_2)\}, \quad \Theta(3) = \Theta(\mathcal{X}(3)) = \{(\theta_0, \theta_1, \theta_2)\}$$

であることも直ちにわかる。なお、この表記は \$0 < \theta_i < 1, \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1\$ なる条件を省略してある。

あとは、各 \$(\Theta(i), \mathcal{X}(i))\$ 上で \$d\tau_i(\theta)\$ より定まる \$\theta_i\$ の Bayes 解を計算すれば、Bayes 解が MLE と一致することが示される。よって、\$\hat{\theta}_i = x_i/n\$ は自乗損失下で許容的。

2. 定理 1, 2 の証明

本節では、定理 1, 2 の証明を \$k=3\$ の場合に示す。一般の \$k\$ に対する証明も、同様である。

2.1 \$k=3\$ の場合の定理 1 の証明 すなわち、

$$(X_0, X_1, X_2, X_3) \sim \text{Multinomial}(N_1, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3), \quad (Y_0, Y_1, Y_2) \sim \text{Multinomial}(N_2, \theta'_0, \theta'_1, \theta'_2),$$

$$(Z_0, Z_1) \sim \text{Binomial}(N_3, \theta_0'', \theta_1'') \text{ 但し } \theta_i'' = \theta_i / (\theta_0 + \theta_1 + \theta_2), \theta_j'' = \theta_j' / (\theta'_0 + \theta'_1) \text{ の場合は}$$

$$\hat{\theta}_0 = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{x_0 + x_1 + y_0 + y_1 + z_0 + z_1} \frac{x_0 + x_1 + y_0 + y_1}{x_0 + x_1 + x_2 + y_0 + y_1 + y_2} \frac{x_0 + x_1 + x_2}{x_0 + x_1 + x_2 + x_3},$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{x_1 + y_1 + z_1}{x_0 + x_1 + y_0 + y_1 + z_0 + z_1} \frac{x_0 + x_1 + y_0 + y_1}{x_0 + x_1 + x_2 + y_0 + y_1 + y_2} \frac{x_0 + x_1 + x_2}{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{x_2 + y_2}{x_0 + x_1 + x_2 + N_2} \frac{x_0 + x_1 + x_2}{x_0 + x_1 + x_2 + x_3} \quad \hat{\theta}_3 = \frac{x_3}{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}$$

である。stepwise Bayes 法を用いると、この推定量の自乗損失下での許容性を次のようにして示せる

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(N_1) &= \{(0, 0, 0, N_1)\}, \quad \mathcal{X}(N_1, N_2) = \{(0, 0, x_2, x_3, 0, 0, N_2) \mid x_3 \leq N_1 - 1, x_2 + x_3 = N_1\}, \\ \mathcal{X}(N_1, N_2, N_3) &= \{(x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, z_0, z_1) \mid x_i = 0, 1, \dots, N_1, x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = N_1, x_3 \leq N_1 - 1, \\ & y_i = 0, 1, \dots, N_2, y_0 + y_1 + y_2 = N_2, z_i = 0, 1, \dots, N_3, z_0 + z_1 = N_3, x_0 + x_1 + y_0 + y_1 + z_0 + z_1 \geq 1\} \text{ と定める。} \end{aligned}$$

最初に、標本空間 \mathcal{X} は、 $\mathcal{X} = \mathcal{X}(N_1) \cup \mathcal{X}(N_1, N_2) \cup \mathcal{X}(N_1, N_2, N_3)$ であることに注意する。

母数空間 $\Theta = \{(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1, 0 \leq \theta_i \leq 1\}$ 上に the sequence of priors $\{d\tau_i(\theta) \mid i = 1, 2, 3, 4\}$ を

$d\tau_1(\theta) : \theta_i = 1 (i=0,1,2,3)$ にのみ集中する事前確率

$d\tau_2(\theta) : \theta_i + \theta_j = 1, 0 < \theta_i, \theta_j < 1, i \neq j$ にのみ集中する事前確率で、かつ

$$d\tau_2(\theta) \propto (\text{restriction}) \sum_{i \neq j} \frac{d\theta_i}{\theta_i \theta_j}$$

$d\tau_3(\theta) : \theta_i + \theta_j + \theta_k = 1, 0 < \theta_i, \theta_j, \theta_k < 1, i \neq j \neq k$ にのみ集中する事前確率で、かつ

$$d\tau_3(\theta) \propto (\text{restriction}) \sum_{i \neq j \neq k} \frac{d\theta_i d\theta_j}{\theta_i \theta_j \theta_k}$$

$$d\tau_4(\theta) \propto (\text{restriction}) \frac{d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3}{\theta_0 \theta_1 \theta_2 \theta_3}$$

を導入する。そうすると、標本空間の分割は

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(1) &= \bigcup_{i=1}^4 \mathcal{X}(1, i), \quad \mathcal{X}(2) = \bigcup_{i,j, i \neq j} \mathcal{X}(2, i:j), \quad \mathcal{X}(3) = \bigcup_{i,j,k, i \neq j \neq k} \mathcal{X}(3, i:j:k), \\ \mathcal{X}(4) &= \{(x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, z_0, z_1)\} \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(1, 0) &= \{(N_1, 0, 0, 0, N_2, 0, 0, N_3, 0)\}, & \mathcal{X}(1, 1) &= \{(0, N_1, 0, 0, 0, N_2, 0, 0, N_3)\}, \\ \mathcal{X}(1, 2) &= \{(0, 0, N_1, 0, 0, 0, N_2)\}, & \mathcal{X}(1, 3) &= \{(0, 0, 0, N_1)\} = \mathcal{X}(N_1), \\ \mathcal{X}(2, 0:1) &= \{(x_0, x_1, 0, 0, y_0, y_1, 0, z_0, z_1)\}, & \mathcal{X}(2, 0:2) &= \{(x_0, 0, x_2, 0, y_0, 0, y_2, N_3, 0)\}, \\ \mathcal{X}(2, 0:3) &= \{(x_0, 0, 0, x_3, N_2, 0, 0, N_3, 0)\}, & \mathcal{X}(2, 1:2) &= \{(0, x_1, x_2, 0, 0, y_1, y_2, 0, N_3)\}, \\ \mathcal{X}(2, 1:3) &= \{(0, x_1, 0, x_3, 0, N_2, 0, N_3, 0)\}, & \mathcal{X}(2, 2:3) &= \{(0, 1, x_2, x_3, 0, 0, N_2)\}, \\ \mathcal{X}(3, 0:1:2) &= \{(x_0, x_1, x_2, 0, y_0, y_1, y_2, z_0, z_1)\}, & \mathcal{X}(3, 0:1:3) &= \{(x_0, x_1, 0, x_3, y_0, y_1, 0, z_0, z_1)\}, \\ \mathcal{X}(3, 0:2:3) &= \{(x_0, 0, x_2, x_3, y_0, 0, y_2, N_3, 0)\}, & \mathcal{X}(3, 1:2:3) &= \{(0, x_1, x_2, x_3, 0, y_1, y_2, 0, N_3)\}. \\ \mathcal{X}(4) &= \{(x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, z_0, z_1)\} \end{aligned}$$

であるが、上記の表記で、 $1 \leq x_i \leq N_1 - 1, x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = N_1, 1 \leq y_j \leq N_2 - 1, y_0 + y_1 + y_2 = N_2, 1 \leq z_k \leq N_3 - 1, z_0 + z_1 = N_3$ なる条件を省略してある。これらより

$$\Theta(1) = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

$$\Theta(2) = \bigcup_{i,j} \{(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Theta \mid \theta_i = \theta_j = 0, 0 < \theta_k, \theta_l < 1, \text{ for all } k, l \neq i, j\}$$

$$\Theta(3) = \bigcup_i \{(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Theta \mid \theta_i = 0, 0 < \theta_j < 1, \text{ for all } j \neq i\}$$

$$\Theta(4) = \{(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Theta \mid 0 < \theta_i < 1, \text{ for all } i\}$$

が示され、更に、定理の条件 (a),(b) が満たされることがわかる。あとは各 $\{(\Theta(i), \mathcal{X}(i)) \mid i = 1, 2, 3, 4\}$ 上でベイズ解と MLE が一致することを示せばよい。 $(\Theta(4), \mathcal{X}(4))$ 上でのベイズ解の計算は、次の通り。

$$P_{\mathcal{X}(4)}(x, y, z | \theta) \propto \frac{\theta_0^{x_0} \theta_1^{x_1} \theta_2^{x_2} \theta_3^{x_3}}{\text{restriction}}$$

$$\times \left(\frac{\theta_0}{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2} \right)^{y_0} \left(\frac{\theta_1}{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2} \right)^{y_1} \left(\frac{\theta_2}{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2} \right)^{y_2} \left(\frac{\theta_0}{\theta_0 + \theta_1} \right)^{z_0} \left(\frac{\theta_1}{\theta_0 + \theta_1} \right)^{z_1}$$

であるから、 $s_0 = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2$, $s_1 = (\theta_0 + \theta_1)/(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2)$, $s_2 = \theta_0/(\theta_0 + \theta_1)$. なる変数変換を行う。そうすると $\theta_0 = s_0 s_1 s_2$, $\theta_1 = s_0 s_1 (1 - s_2)$, $\theta_2 = s_0 (1 - s_1)$, $\theta_3 = 1 - s_0$ であり、

$$0 < \theta_0, \theta_1, \theta_2 < 1, 0 < \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 < 1 \Leftrightarrow 0 < s_0, s_1, s_2, s_3 < 1$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \partial\theta_0/\partial s_0 & \partial\theta_0/\partial s_1 & \partial\theta_0/\partial s_2 \\ \partial\theta_1/\partial s_0 & \partial\theta_1/\partial s_1 & \partial\theta_1/\partial s_2 \\ \partial\theta_2/\partial s_0 & \partial\theta_2/\partial s_1 & \partial\theta_2/\partial s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1 s_2 & s_0 s_2 & s_0 s_1 \\ s_1 (1 - s_2) & s_0 (1 - s_2) & -s_0 s_1 \\ 1 - s_1 & -s_0 & 0 \end{vmatrix} = s_0^2 s_1$$

である。よって

$$\begin{aligned} \int P_{\mathcal{X}(4)}(x, y, z | \theta) d\tau_4(\theta) &= \iiint \frac{\theta_0^{x_0} \theta_1^{x_1} \theta_2^{x_2} \theta_3^{x_3}}{\text{restriction}} \left(\frac{\theta_0}{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2} \right)^{y_0} \left(\frac{\theta_1}{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2} \right)^{y_1} \\ &\quad \times \left(\frac{\theta_2}{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2} \right)^{y_2} \left(\frac{\theta_0}{\theta_0 + \theta_1} \right)^{z_0} \left(\frac{\theta_1}{\theta_0 + \theta_1} \right)^{z_1} \frac{\text{restriction}}{\theta_0 \theta_1 \theta_2 \theta_3} d\theta_0 d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \iiint (s_0 s_1 s_2)^{x_0 - 1} (s_0 s_1 (1 - s_2))^{x_1 - 1} (s_0 (1 - s_1))^{x_2 - 1} (1 - s_0)^{x_3 - 1} \\ &\quad \times (s_1 s_2)^{y_0} (s_1 (1 - s_2))^{y_1} (1 - s_1)^{y_2} s_2^{z_0} (1 - s_2)^{z_1} |J| ds_0 ds_1 ds_2 \\ &= \int_0^1 s_0^{x_0 + x_1 + x_2 - 1} (1 - s_0)^{x_3 - 1} ds_0 \int_0^1 s_1^{x_0 + y_0 + x_1 + y_1 - 1} (1 - s_1)^{x_2 + y_2 - 1} ds_1 \\ &\quad \times \int_0^1 s_2^{x_0 + y_0 + z_0 - 1} (1 - s_2)^{x_1 + y_1 + z_1 - 1} ds_2 \\ &= B(x_0 + x_1 + x_2, x_3) B(x_0 + y_0 + x_1 + y_1, x_2 + y_2) B(x_0 + y_0 + z_0, x_1 + y_1 + z_1) \end{aligned}$$

を得る。

全く同様な計算方法により

$$\begin{aligned} &\int \theta_0 P_{\mathcal{X}(4)}(x, y, z | \theta) d\tau_4(\theta) \\ &= B(x_0 + x_1 + x_2 + 1, x_3) B(x_0 + y_0 + x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2) B(x_0 + y_0 + z_0 + 1, x_1 + y_1 + z_1) \\ &\int \theta_1 P_{\mathcal{X}(4)}(x, y, z | \theta) d\tau_4(\theta) \\ &= B(x_0 + x_1 + x_2 + 1, x_3) B(x_0 + y_0 + x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2) B(x_0 + y_0 + z_0, x_1 + y_1 + z_1 + 1) \\ &\int \theta_2 P_{\mathcal{X}(4)}(x, y, z | \theta) d\tau_4(\theta) \\ &= B(x_0 + x_1 + x_2 + 1, x_3) B(x_0 + y_0 + x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 1) B(x_0 + y_0 + z_0, x_1 + y_1 + z_1) \\ &\int \theta_3 P_{\mathcal{X}(4)}(x, y, z | \theta) d\tau_4(\theta) \\ &= B(x_0 + x_1 + x_2, x_3 + 1) B(x_0 + y_0 + x_1 + y_1, x_2 + y_2) B(x_0 + y_0 + z_0, x_1 + y_1 + z_1) \end{aligned}$$

を得る。以上より

$$\begin{aligned}\theta_{0\text{ Bayes}} &= \frac{\int \theta_0 P_{\mathcal{X}(4)}(x, y, z | \theta) d\tau_4(\theta)}{\int P_{\mathcal{X}(4)}(x, y, z | \theta) d\tau_4(\theta)} \\ &= \frac{B(x_0 + x_1 + x_2 + 1, x_3) B(x_0 + y_0 + x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2) B(x_0 + y_0 + z_0 + 1, x_1 + y_1 + z_1)}{B(x_0 + x_1 + x_2, x_3) B(x_0 + y_0 + x_1 + y_1, x_2 + y_2) B(x_0 + y_0 + z_0, x_1 + y_1 + z_1)} \\ &= \frac{x_0 + x_1 + x_2}{x_0 + x_1 + x_2 + x_3} \frac{x_0 + y_0 + x_1 + y_1}{x_0 + y_0 + x_1 + y_1 + x_2 + y_2} \frac{x_0 + y_0 + z_0}{x_0 + y_0 + z_0 + x_1 + y_1 + z_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_{1\text{ Bayes}} &= \frac{\int \theta_1 P_{\mathcal{X}(4)}(x, y, z | \theta) d\tau_4(\theta)}{\int P_{\mathcal{X}(4)}(x, y, z | \theta) d\tau_4(\theta)} \\ &= \frac{x_0 + x_1 + x_2}{x_0 + x_1 + x_2 + x_3} \frac{x_0 + y_0 + x_1 + y_1}{x_0 + y_0 + x_1 + y_1 + x_2 + y_2} \frac{x_1 + y_1 + z_1}{x_0 + y_0 + z_0 + x_1 + y_1 + z_1}\end{aligned}$$

$$\theta_{2\text{ Bayes}} = \frac{\int \theta_2 P_{\mathcal{X}(4)}(x, y, z | \theta) d\tau_4(\theta)}{\int P_{\mathcal{X}(4)}(x, y, z | \theta) d\tau_4(\theta)} = \frac{x_0 + x_1 + x_2}{x_0 + x_1 + x_2 + x_3} \frac{x_2 + y_2}{x_0 + y_0 + x_1 + y_1 + x_2 + y_2}$$

$$\theta_{3\text{ Bayes}} = \frac{\int \theta_3 P_{\mathcal{X}(4)}(x, y, z | \theta) d\tau_4(\theta)}{\int P_{\mathcal{X}(4)}(x, y, z | \theta) d\tau_4(\theta)} = \frac{x_3}{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}$$

が得られた。 $(\Theta(i), \mathcal{X}(i))$, $i = 1, 2, 3$ 上でベイズ解と MLE が一致することは、上記の計算方法を更に簡略化したものなので、省略する。このようにして θ_{MLE} の自乗損失下での許容性が示せた。

2.2 $k=3$ の場合の定理 2 の証明 すなわち、

$$(X_0, X_1, X_2, X_3) \sim \text{Multinomial}(N_1, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3),$$

$$(Y_0, Y_1, Y_2) \sim \text{Multinomial}(N_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2 + \theta_3),$$

$$(Z_0, Z_1) \sim \text{Binomial}(N_3, \theta_0, \theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

の場合、 $\theta_1 = (1 - \theta_0)\xi$, $\theta_2 = (1 - \theta_0)(1 - \xi)\eta$, $\theta_3 = (1 - \theta_0)(1 - \xi)(1 - \eta)$ と、パラメータを変更して考える。そうすると、考えているモデルは

observation	probability	number of observations
X_0	θ_0	x_0
X_1	$(1 - \theta_0)\xi$	x_1
X_2	$(1 - \theta_0)(1 - \xi)\eta$	x_2
X_3	$(1 - \theta_0)(1 - \xi)(1 - \eta)$	x_3
Y_0	θ_0	y_0
Y_1	$(1 - \theta_0)\xi$	y_1
Y_2	$(1 - \theta_0)(1 - \xi)$	y_2
Z_0	θ_0	z_0
Z_1	$1 - \theta_0$	z_1

と書き表される。そうすると、MLE の計算および MLE の自乗損失下での許容性の証明が容易である。なお、このようなパラメータ変更のアイデアは、Meeden, Ghosh, Srinivasan, Vardeman(1989) を参考にした。実際の計算結果は次の通り：

$$P(x, y, z | \theta) \propto \theta_0^{x_0 + y_0 + z_0} (1 - \theta_0)^{x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + z_1} \xi^{x_1 + y_1} (1 - \xi)^{x_2 + x_3 + y_2} \eta^{x_2} (1 - \eta)^{x_3}$$

これより直ちに MLE を求めることができる :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_0 &= \frac{x_0 + y_0 + z_0}{N_1 + N_2 + N_3}, \quad \hat{\xi} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2}, \quad \hat{\eta} = \frac{x_2}{x_2 + x_3} \\ \hat{\theta}_1 &= (1 - \hat{\theta}_0)\hat{\xi} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + z_1}{N_1 + N_2 + N_3} \frac{x_1 + y_1}{x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2} \\ \hat{\theta}_2 &= (1 - \hat{\theta}_0)(1 - \hat{\xi})\hat{\eta} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + z_1}{N_1 + N_2 + N_3} \frac{x_2 + x_3 + y_2}{x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2} \frac{x_2}{x_2 + x_3} \\ \hat{\theta}_3 &= (1 - \hat{\theta}_0)(1 - \hat{\xi})(1 - \hat{\eta}) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + z_1}{N_1 + N_2 + N_3} \frac{x_2 + x_3 + y_2}{x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2} \frac{x_3}{x_2 + x_3}\end{aligned}$$

母数空間 $\Theta = \{(\theta_0, \xi, \eta) \mid 0 \leq \theta_0, \xi, \eta \leq 1\}$ 上に the sequence of priors $\{d\tau_i(\theta_0, \xi, \eta) \mid i = 1, 2, 3, 4\}$ を

$$\begin{aligned}d\tau_1(\theta_0, \xi, \eta) &= \frac{1}{4}dI_{\{\theta_0=1\}}(\theta_0)d\tau(\xi, \eta) + \frac{1}{4}dI_{\{\theta_0=0\}}(\theta_0)dI_{\{\xi=1\}}(\xi)d\tau(\eta) \\ &\quad + \frac{1}{4}dI_{\{\theta_0=0\}}(\theta_0)dI_{\{\xi=0\}}(\xi)\left(dI_{\{\eta=0\}}(\eta) + dI_{\{\eta=1\}}(\eta)\right) \\ d\tau_2(\theta_0, \xi, \eta) &\propto \frac{\text{restriction}}{5}dI_{\{\theta_0=0\}}(\theta_0)dI_{\{\eta=0\}}(\eta)\frac{d\xi}{\xi(1-\xi)} \\ &\quad + \frac{\text{restriction}}{5}dI_{\{\theta_0=0\}}\left(dI_{\{\xi=0\}}(\xi) + dI_{\{\xi=1\}}(\xi)\right)\frac{d\eta}{\eta(1-\eta)} \\ &\quad + \frac{\text{restriction}}{5}dI_{\{\xi=0\}}(\xi)\left(dI_{\{\eta=0\}}(\eta) + dI_{\{\eta=1\}}(\eta)\right)\frac{d\theta_0}{\theta_0(1-\theta_0)} \\ d\tau_3(\theta_0, \xi, \eta) &\propto \frac{\text{restriction}}{4}dI_{\{\xi=0\}}(\xi)\frac{d\eta d\theta_0}{\eta(1-\eta)\theta_0(1-\theta_0)} \\ &\quad + \frac{\text{restriction}}{4}\left(dI_{\{\eta=0\}}(\eta) + dI_{\{\eta=1\}}(\eta)\right)\frac{d\xi d\theta_0}{\xi(1-\xi)\theta_0(1-\theta_0)} \\ &\quad + \frac{\text{restriction}}{4}dI_{\{\theta_0=0\}}(\theta_0)\frac{d\xi d\eta}{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)} \\ d\tau_4(\theta_0, \xi, \eta) &\propto \frac{\text{restriction}}{\theta_0(1-\theta_0)\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}d\theta_0 d\xi d\eta\end{aligned}$$

で導入する。そうすると、標本空間の分割は

$$\mathcal{X}(1) = \bigcup_{i=0}^3 \mathcal{X}(1, i), \quad \mathcal{X}(2) = \bigcup_{i=0}^5 \mathcal{X}(2, i), \quad \mathcal{X}(3) = \bigcup_{j=0}^3 \mathcal{X}(3, j),$$

$$\mathcal{X}(4) = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, z_0, z_1) \in \mathcal{X} \mid 1 \leq x_i \leq N_1 - 1, 1 \leq y_j \leq N_2 - 1, 1 \leq z_k \leq N_3 - 1\}$$

で与えられる。ここで $\mathcal{X}(i, j)$ は次のページの表で定められるもの。この表では $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, z_0, z_1$ に対して $1 \leq x_i \leq N_1 - 1, 1 \leq y_j \leq N_2 - 1, 1 \leq z_k \leq N_3 - 1$ の条件を省略して記述している。また、-とは、「第1回目の観測で $X_{10} = X_{11} = X_{12} = 0$ の場合、第2回目以降の観測は行わない。第2回目までの観測で $X_{10} = X_{20} = X_{1k-2} = X_{2k-2} = 0$ の場合、第3回目の観測は行わない。」との条件により、観測がなされないことを示すものである。

あとは各標本空間 $\mathcal{X}(i)$ 上で $d\tau_i(\theta_0, \xi, \eta)$ に対するベイズ解を求めれば良い。これは容易に計算でき、MLE に一致することがわかる。

標本分割	X_0	Y_0	Z_0	X_1	Y_1	X_2	X_3	Z_1	Y_2	Marginal が positive となるような事前確率
$\mathcal{X}(1,0)$	N_1	N_2	N_3	0	0	0	0	0	0	$\theta_0 = 1$ に集中
$\mathcal{X}(1,1)$	0	0	0	N_1	N_2	0	0	N_3	0	$\theta_0 = 0, \xi = 1$ に集中
$\mathcal{X}(1,2)$	0	0	-	0	0	0	N_1	0	N_2	$\theta_0 = 0, \xi = 0, \eta = 1$ に集中
$\mathcal{X}(1,3)$	0	-	-	0	-	0	N_1	-	-	$\theta_0 = 0, \xi = 0, \eta = 0$ に集中
$\mathcal{X}(2,0)$	x_0	y_0	z_0	x_1	y_1	0	0	z_1	0	$\xi = 1$ に集中
$\mathcal{X}(2,1)$	0	0	0	0	0	x_2	x_3	N_3	y_2	$\theta_0 = 0, \xi = 0$ に集中
$\mathcal{X}(2,2)$	0	0	0	x_1	y_1	0	x_3	N_3	y_2	$\theta_0 = 0, \eta = 0$ に集中
$\mathcal{X}(2,3)$	0	0	0	x_1	y_1	x_2	0	N_3	y_2	$\theta_0 = 0, \eta = 1$ に集中
$\mathcal{X}(2,4)$	x_0	y_0	z_0	0	0	0	x_3	z_1	y_2	$\xi = 0, \eta = 0$ に集中
$\mathcal{X}(2,5)$	x_0	y_0	z_0	0	0	x_2	0	z_1	y_2	$\xi = 0, \eta = 1$ に集中
$\mathcal{X}(3,0)$	0	0	0	x_1	y_1	x_2	x_3	N_3	y_2	$\theta_0 = 0$ に集中
$\mathcal{X}(3,1)$	x_0	y_0	z_0	0	0	x_2	x_3	z_1	y_2	$\xi = 0$ に集中
$\mathcal{X}(3,2)$	x_0	y_0	z_0	x_1	y_1	0	x_3	z_1	y_2	$\eta = 0$ に集中
$\mathcal{X}(3,3)$	x_0	y_0	z_0	x_1	y_1	x_2	0	z_1	y_2	$\eta = 1$ に集中
$\mathcal{X}(4)$	x_0	y_0	z_0	x_1	y_1	x_2	x_3	z_1	y_2	内部

3. 定理 1, 2 の拡張

定理 1, 2 では、各観測に多項分布を仮定した。しかし、多項分布でなくても定理 1 と同様の結果が得られる場合がある。

次のような性質を満たすような確率分布を $\mathcal{D}(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)$ とする。

1. 母数空間 $\Theta = \{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k) \in \mathbf{R}^{k+1} \mid 0 \leq \theta_i \leq 1, \theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_k = 1\}$
2. 標本空間 $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^{k+1}\}$.
3. $P(\mathbf{x} \mid \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k) = c(\mathbf{x}) \prod_{i=0}^k \theta_i^{a_i(x_i)}$
4. 関数 $a_i(x_i)$ は $a_i(x_i) = b_i x_i + d_i, b_i \geq 0, d_i \geq 0$ であって、かつ $b_i > 0$ for all $i=k-m, k-m+1, \dots, k$
5.
 - ・各 $i = 0, 1, \dots, k$ に対し、 $c(\mathbf{x}^{[i]}) > 0, a_i(x_i^{[i]}) > 0, a_j(x_j^{[i]}) = 0$ for all $j \neq i$ となるような $\mathbf{x}^{[i]} = (x_0^{[i]}, x_1^{[i]}, \dots, x_k^{[i]}) \in \mathcal{X}$ が存在する。
 - ・各非負の整数 i, j such that $0 \leq i < j < k$ に対し、 $c(\mathbf{x}^{[ij]}) > 0, a_i(x_i^{[ij]}) > 0, a_j(x_j^{[ij]}) > 0, a_h(x_h^{[ij]}) = 0$ for all $h \neq i, j$ となるような $\mathbf{x}^{[ij]} = (x_0^{[ij]}, x_1^{[ij]}, \dots, x_k^{[ij]}) \in \mathcal{X}$ が存在する。
 - ⋮
 - ・ $c(\mathbf{x}^{[012\dots k]}) > 0, a_0(x_0^{[012\dots k]}) > 0, a_1(x_1^{[012\dots k]}) > 0, \dots, a_k(x_k^{[012\dots k]}) > 0$ となるような $\mathbf{x}^{[012\dots k]} = (x_0^{[012\dots k]}, x_1^{[012\dots k]}, \dots, x_k^{[012\dots k]}) \in \mathcal{X}$ が存在する。

定理 4 第 1 回目の観測 $(X_{10}, X_{11}, \dots, X_{1k-1}, X_{1k})$, 第 2 回目の観測 $(X_{20}, X_{21}, \dots, X_{2k-1}), \dots$, 第 m 回目の観測 $(X_{m0}, X_{m1}, \dots, X_{mk-m}),$ に関して、第 1 回目の観測で $X_{11} = \dots = X_{1k-1} = 0$ の場合、第 2

回目以降の観測は行わない。第2回目までの観測で $X_{10} = X_{20} = X_{11} = X_{21} = \dots = X_{1k-2} = X_{2k-2} = 0$ の場合、第3回目以降の観測は行わない。以下、同様の状況を仮定する。更に、確率分布に関して、第1回目の観測が $\mathcal{D}(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)$ に従い、第j回目の観測 ($j=2,3,\dots,m$) が

$$\mathcal{D}\left(\frac{\theta_0}{\theta_0 + \dots + \theta_{k-j+1}}, \dots, \frac{\theta_{k-j+1}}{\theta_0 + \dots + \theta_{k-j+1}}\right)$$

に従うならば、 θ_i ($i=0,1,2,\dots,k$) の MLE は、自乗損失下で許容的。

定理5 Sampling に関して、定理4と同じ仮定をする。確率分布に関して、第1回目の観測が $\mathcal{D}(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)$ に従い、第j回目の観測 ($j=2,3,\dots,m$) が $\mathcal{D}(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-j+1}, \theta_{k-j+1} + \theta_{k-j+2} + \dots + \theta_k)$ に従うならば、 θ_i ($i=0,1,2,\dots,k$) の MLE は、自乗損失下で許容的。

例2 $\mathcal{D}(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)$ の例として、多項分布の他に、次のようなものが考えられる。

$$P(x_1, \dots, x_k | \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)$$

$$= \begin{cases} \frac{(x_1 + \dots + x_k)!}{x_1! \dots x_k!} \theta_0 \theta_1^{x_1} \theta_2^{x_2} \dots \theta_k^{x_k} & \text{if } x_1 + x_2 + \dots + x_k < n \\ & x_i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ for all } i=1,2,\dots,k, \\ \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \theta_1^{x_1} \theta_2^{x_2} \dots \theta_k^{x_k} & \text{if } x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ & x_i = 0, 1, \dots, n \text{ for all } i=1,2,\dots,k, \end{cases}$$

なお、この確率分布は、一次元確率分布

$$P(x|\theta) = \begin{cases} (1-\theta)\theta^x & \text{if } x = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ \theta^n & \text{if } x = n. \end{cases}$$

の自然な多次元化である。

4. Poisson 分布の場合の考察

定理1, 2, 4, 5を、一般の Exponential family に拡張できない。なぜなら、stepwise Bayes 法を用いた許容性の証明は、母数空間がコンパクトのときに有効だが、母数空間がコンパクトでない場合には有用でない。たとえば、ポアソン分布の母数空間はノンコンパクトである。実際、ポアソン分布の場合、stepwise Bayesian procedure によって許容性を証明できない。しかしながら、定理1, 2の証明中で用いた変数変換を用いると、Poisson 分布の場合、MLE が容易に求められることがわかった。このことを本節で示す。

例3 $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Z$ は互いに独立で、 $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$, $i=1,2,3$.

$$Y_i \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\right), \quad i=1,2, \quad Z \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$$

なるモデルに対して、MLE を求める：

$$\begin{aligned} P(x, y, z | \lambda) &\propto \lambda_1^{x_1} \lambda_2^{x_2} \lambda_3^{x_3} \exp(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) \\ &\quad \times \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\right)^{y_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\right)^{y_2} \exp\left(-\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^z \exp\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \end{aligned}$$

変数変換 $s = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $t = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, $u = \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ を用いると,
 $\lambda_1 = st$, $\lambda_2 = su$, $\lambda_3 = s(1-t-u)$ であるから

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{st}{st + su} = \frac{t}{t + u}$$

ここで、更に変数変換 $w = t + u$, $v = t / (t + u)$ を用いると

$$t = wv, u = w - t = w(1 - v), 1 - t - u = 1 - wv - w(1 - v) = 1 - w$$

$$\lambda_1 = st = swv, \lambda_2 = su = sw(1 - v), \lambda_3 = s(1 - t - u) = s(1 - w)$$

$$\text{Likelihood} \propto (swv)^{x_1} (sw(1 - v))^{x_2} (s(1 - w))^{x_3} \exp(-s)(wv)^{y_1} (w(1 - v))^{y_2} \exp(-w)v^z \exp(-v)$$

$$\ln L = C + (x_1 + x_2 + x_3) \ln s - s + (x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \ln w + x_3 \ln(1 - w) - w$$

$$+ (x_1 + y_1 + z) \ln v + (x_2 + y_2) \ln(1 - v) - v$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial s} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{s} - 1 \Rightarrow \hat{s} = x_1 + x_2 + x_3$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial w} = \frac{x_1 + x_2 + y_1 + y_2}{w} - \frac{x_3}{1 - w} - 1$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial v} = \frac{x_1 + y_1 + z}{v} - \frac{x_2 + y_2}{1 - v} - 1$$

$$\therefore w^2 - (x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + x_3 + 1)w + x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 0$$

$$v^2 - (x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z + 1)v + x_1 + y_1 + z = 0$$

この w, v に関する二次方程式は、 $0 \leq w \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ の間で唯一の解を持ち、その解は

$$\hat{w} = \frac{1}{2} (x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + x_3 + 1 - \sqrt{(x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + x_3 + 1)^2 - 4(x_1 + x_2 + y_1 + y_2)})$$

$$\hat{v} = \frac{1}{2} (x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z + 1 - \sqrt{(x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z + 1)^2 - 4(x_1 + y_1 + z)})$$

例 3-2 例 3 の一般化を行う。すなわち

第 1 回目の観測 $(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1,k-1}, X_{1k})$, 第 2 回目の観測 $(X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2k-1}), \dots$

第 $k-1$ 回目の観測 $(X_{k-1,1}, X_{k-1,2}),$ 第 k 回目の観測 X_k

$X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1,k-1}, X_{1k}, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2,k-1}, \dots, X_{k-1,1}, X_{k-1,2}, X_k$ は、すべて独立であって

$$X_{1i} \sim \text{Poisson}(\lambda_i), \quad X_{2i} \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}\right), \quad X_{3i} \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1}}\right),$$

$$\dots, X_{k-1,i} \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\right), \quad X_k \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$$

の時に $\hat{\lambda}_i$ を求める。

$$\text{Likelihood} \propto \left(\prod_{i=1}^k \lambda_i^{x_{1i}} \right) \exp(-\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_k)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1} + \lambda_k} \right)^{x_{2i}} \right) \exp \left(- \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1} + \lambda_k} \right) \\
& \times \dots \times \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right)^{x_{k-1,1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right)^{x_{k-1,2}} \exp \left(- \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right) \\
& \times \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{x_k} \exp \left(- \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)
\end{aligned}$$

変数変換

$$\begin{aligned}
s_k &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k, & s_{k-1} &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1} + \lambda_k}, & s_{k-2} &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-2}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-2} + \lambda_{k-1}}, \\
\dots, & & s_2 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, & s_1 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}
\end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= s_1 s_2 \dots s_k, & \lambda_2 &= (1 - s_1) s_2 \dots s_k, & \lambda_3 &= (1 - s_2) s_3 \dots s_k, & \dots, \\
\lambda_{k-1} &= (1 - s_{k-2}) s_{k-1} s_k, & \lambda_k &= (1 - s_{k-1}) s_k
\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}
\text{Likelihood} &\propto (s_1 s_2 \dots s_k)^{x_{11}} ((1 - s_1) s_2 \dots s_k)^{x_{12}} ((1 - s_2) s_3 \dots s_k)^{x_{13}} \dots ((1 - s_{k-1}) s_k)^{x_{1k}} \exp(-s_k) \\
&\times (s_1 \dots s_{k-1})^{x_{21}} ((1 - s_1) s_2 \dots s_{k-1})^{x_{22}} \dots ((1 - s_{k-2}) s_{k-1})^{x_{2,k-1}} \exp(-s_{k-1}) \\
&\times \dots \times (s_1 s_2 s_3)^{x_{k-2,1}} ((1 - s_1) s_2 s_3)^{x_{k-2,2}} ((1 - s_2) s_3)^{x_{k-2,3}} \exp(-s_3) \\
&\times (s_1 s_2)^{x_{k-1,1}} ((1 - s_1) s_2)^{x_{k-1,2}} \exp(-s_2) \times s_1^{x_k} \exp(-s_1) \\
&= s_1^{x_{11} + x_{21} + \dots + x_{k-1,1} + x_k} ((1 - s_1)^{x_{12} + x_{22} + \dots + x_{k-1,2}} \exp(-s_1)) \\
&\times s_2^{x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + \dots + x_{k-1,1} + x_{k-1,2}} (1 - s_2)^{x_{13} + x_{23} + \dots + x_{k-2,3}} \exp(-s_2) \\
&\times \dots \times s_{k-1}^{x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1k} + x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2,k-1}} (1 - s_{k-1})^{x_{1k}} \exp(-s_{k-1}) \\
&\times s_k^{x_{11} + \dots + x_{1k}} \exp(-s_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln L &= C + (x_{11} + x_{21} + \dots + x_{k-1,1} + x_k) \ln s_1 + (x_{12} + x_{22} + \dots + x_{k-1,2}) \ln(1 - s_1) - s_1 \\
&+ (x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + \dots + x_{k-1,1} + x_{k-1,2}) \ln s_2 + (x_{13} + \dots + x_{k-2,3}) \ln(1 - s_2) - s_2 \\
&+ \dots + (x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1k} + x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2,k-1}) \ln s_3 + x_{1k} \ln(1 - s_{k-1}) - s_{k-1} \\
&+ (x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1k}) \ln s_k - s_k
\end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial s_1} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_{i1} + x_k}{s_1} - \frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_{i2}}{1 - s_1} - 1, \quad 0 = \frac{\partial \ln L}{\partial s_2} = \frac{\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{k-1} x_{ij}}{s_2} - \frac{\sum_{i=1}^{k-2} x_{i3}}{1 - s_2} - 1,$$

$$\dots, \quad 0 = \frac{\partial \ln L}{\partial s_{k-1}} = \frac{\sum_{j=1}^k x_{1j} + \sum_{j=1}^{k-1} x_{2j}}{s_{k-1}} - \frac{x_{1k}}{1 - s_{k-1}} - 1,$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial s_k} = \frac{\sum_{j=1}^k x_{1j}}{s_k} - 1 \Rightarrow \hat{s}_k = \sum_{j=1}^k x_{1j}$$

よって \hat{s}_i $i=1,2,\dots,k-1$ は、上記から得られる二次方程式の解で exact に求まる。それゆえ、 $\hat{\lambda}_i$ $i=1,2,\dots,k-1$ も exact に求まる。

例 3 では $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Z$ は互いに独立で、 $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$, $i=1,2,3$.

$$Y_i \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\right), \quad i=1,2, \quad Z \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$$

なるモデルに対して、MLE を求めたが、今度は

例 3-3 $X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_3$ は互いに独立で、 $X_{1i} \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$, $i=1,2,3$.

$$X_{2i} \sim \text{Poisson}\left(\mu_2 \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}\right), \quad i=1,2, \quad X_3 \sim \text{Poisson}(\mu_3)$$

なるモデルに対して、MLE を求めてみる。例 3 同様の変数変換を用いると

$$\begin{aligned} \text{Likelihood} &\propto \lambda_1^{x_{11}} \lambda_2^{x_{12}} \lambda_3^{x_{13}} \exp(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) \\ &\quad \times \left(\frac{\mu_2 \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{x_{21}} \left(\frac{\mu_2 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{x_{22}} \exp(-\mu_2) \times \mu_3^{x_3} \exp(-\mu_3) \\ &= (s_1 s_2 s_3)^{x_{11}} ((1-s_1) s_2 s_3)^{x_{12}} ((1-s_2) s_3)^{x_{13}} \exp(-s_3) \\ &\quad \times (\mu_2 s_1)^{x_{21}} (\mu_2 (1-s_1))^{x_{22}} \exp(-\mu_2) \times \mu_3^{x_3} \exp(-\mu_3) \\ &= s_1^{x_{11} + x_{21}} ((1-s_1)^{x_{12} + x_{22}} s_2^{x_{11} + x_{12}} (1-s_2)^{x_{13}} \times s_3^{x_{11} + x_{12} + x_{13}} \exp(-s_3) \\ &\quad \times \mu_2^{x_{21} + x_{22}} \exp(-\mu_2) \times \mu_3^{x_3} \exp(-\mu_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln L &= C + (x_{11} + x_{21}) \ln s_1 + (x_{12} + x_{22}) \ln(1-s_1) + (x_{11} + x_{12}) \ln s_2 + x_{13} \ln(1-s_2) \\ &\quad + (x_{11} + x_{12} + x_{13}) \ln s_3 - s_3 + (x_{21} + x_{22}) \ln \mu_2 - \mu_2 + x_3 \ln \mu_3 - \mu_3 \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial s_1} = \frac{x_{11} + x_{21}}{s_1} - \frac{x_{12} + x_{22}}{1-s_1} \Rightarrow \hat{s}_1 = \frac{x_{11} + x_{21}}{x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22}}$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial s_2} = \frac{x_{11} + x_{12}}{s_2} - \frac{x_{13}}{1-s_2} \Rightarrow \hat{s}_2 = \frac{x_{11} + x_{12}}{x_{11} + x_{12} + x_{13}}$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial s_3} = \frac{x_{12} + x_{12} + x_{13}}{s_3} - 1 \Rightarrow \hat{s}_3 = x_{11} + x_{12} + x_{13}$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} = \frac{x_{21} + x_{22}}{\mu_2} - 1 \Rightarrow \hat{\mu}_2 = x_{21} + x_{22}$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial \mu_3} = \frac{x_3}{\mu_3} - 1 \Rightarrow \hat{\mu}_3 = x_3$$

$$\therefore \hat{\lambda}_1 = \hat{s}_1 \hat{s}_2 \hat{s}_3 = \frac{(x_{11} + x_{21})(x_{11} + x_{12})}{x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22}}, \quad \hat{\lambda}_2 = (1 - \hat{s}_1) \hat{s}_2 \hat{s}_3 = \frac{(x_{12} + x_{22})(x_{11} + x_{12})}{x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22}},$$

$$\hat{\lambda}_3 = (1 - \hat{s}_2) \hat{s}_3 = x_{13}.$$

例 3-4 例 3-3 で、 $\mu_2 = \mu_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ の場合を考える。すなわち

$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_3$ は互いに独立で、 $X_{1i} \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$, $i=1,2,3$

$X_{2i} \sim \text{Poisson}\left((\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$, $i=1,2$, $X_3 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$

なるモデルに対して、MLE を求めると

$$\begin{aligned} \text{Likelihood} &\propto 8(s_1 s_2 s_3)^{x_{11}} ((1-s_1) s_2 s_3)^{x_{12}} ((1-s_2) s_3)^{x_{13}} \exp(-s_3) \\ &\quad \times (s_3 s_1)^{x_{21}} (s_3(1-s_1))^{x_{22}} \exp(-s_3) \times s_3^{x_3} \exp(-s_3) \\ &= s_1^{x_{11}+x_{21}} ((1-s_1)^{x_{12}+x_{22}} s_2^{x_{11}+x_{12}} (1-s_2)^{x_{13}} s_3^{x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_3}) \exp(-3s_3) \end{aligned}$$

$$\hat{s}_1 = \frac{x_{11} + x_{21}}{x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22}}, \quad \hat{s}_2 = \frac{x_{11} + x_{12}}{x_{11} + x_{12} + x_{13}},$$

$$\hat{s}_3 = \frac{x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_3}{3} = \frac{x_{\text{total}}}{3}$$

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{s}_1 \hat{s}_2 \hat{s}_3 = \frac{x_{11} + x_{21}}{x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22}} \frac{x_{11} + x_{12}}{x_{11} + x_{12} + x_{13}} \frac{x_{\text{total}}}{3}$$

$$\hat{\lambda}_2 = (1 - \hat{s}_1) \hat{s}_2 \hat{s}_3 = \frac{x_{12} + x_{22}}{x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22}} \frac{x_{11} + x_{12}}{x_{11} + x_{12} + x_{13}} \frac{x_{\text{total}}}{3}$$

$$\hat{\lambda}_3 = (1 - \hat{s}_2) \hat{s}_3 = \frac{x_{13}}{x_{11} + x_{12} + x_{13}} \frac{x_{\text{total}}}{3}$$

例 3-5 例 3-4 の一般化 すなわち

第 1 回目の観測: $(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1k-1}, X_{1k})$, 第 2 回目の観測: $(X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2k-1}), \dots$

第 $k-1$ 回目の観測: (X_{k-11}, X_{k-12}) , 第 k 回目の観測: X_k に対して

$X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1k-1}, X_{1k}, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2k-1}, \dots, X_{k-11}, X_{k-12}, X_k$ は、すべて独立であって

$$X_{1i} \sim \text{Poisson}(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$X_{2i} \sim \text{Poisson}\left((\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1}}\right), \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

$$X_{3i} \sim \text{Poisson}\left((\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-2}}\right), \quad i = 1, 2, \dots, k-2$$

⋮

$$X_{k-1i} \sim \text{Poisson}\left((\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}\right), \quad i = 1, 2$$

$$X_k \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)$$

と仮定する。この場合に MLE を求める。

$$\text{Likelihood} \propto \left(\prod_{i=1}^k \lambda_i^{x_{1i}} \right) \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k))$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\prod_{i=1}^{k-1} \left((\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1}} \right)^{x_{2i}} \right) \exp(-(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)) \times \dots \\ & \times \left((\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{x_{k-11}} \left((\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{x_{k-12}} \exp(-(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)) \\ & \times (\lambda_1 + \dots + \lambda_k)^{x_k} \exp(-(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)) \end{aligned}$$

先ほどと全く同じ変数変換を用いると

$$\begin{aligned} \text{Likelihood} & \propto (s_1 s_2 \dots s_k)^{x_{11}} ((1-s_1) s_2 \dots s_k)^{x_{12}} ((1-s_2) s_3 \dots s_k)^{x_{13}} \dots ((1-s_{k-1}) s_k)^{x_{1k}} \exp(-s_k) \\ & \times (s_k s_1 \dots s_{k-2})^{x_{21}} (s_k (1-s_1) s_2 \dots s_{k-2})^{x_{22}} \dots (s_k (1-s_{k-2}))^{x_{2k-1}} \exp(-s_k) \times \dots \\ & \times (s_k s_1 s_2)^{x_{k-21}} (s_k (1-s_1) s_2)^{x_{k-22}} (s_k (1-s_2))^{x_{k-23}} \exp(-s_k) \\ & \times (s_k s_1)^{x_{k-11}} (s_k (1-s_1))^{x_{k-12}} \exp(-s_k) \times s_k^{x_k} \exp(-s_k) \\ & = s_1^{x_{11} + x_{21} + \dots + x_{k-11} + x_k} ((1-s_1)^{x_{12} + x_{22} + \dots + x_{k-12}} \\ & \times s_2^{x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + \dots + x_{k-21} + x_{k-22}} (1-s_2)^{x_{13} + x_{23} + \dots + x_{k-23}} \times \dots \\ & \times s_{k-2}^{x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1k-2} + x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2k-2}} (1-s_{k-2})^{x_{1k-1} + x_{2k-1}} \\ & \times s_{k-1}^{x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1k-1}} (1-s_{k-1})^{x_{1k}} \times s_k^{x_{total}} \exp(-k s_k) \end{aligned}$$

但し $x_{total} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i+1} x_{ij} + x_k$. 従つて

$$\begin{aligned} \ln L & = C + (x_{11} + x_{21} + \dots + x_{k-11} + x_k) \ln s_1 + (x_{12} + x_{22} + \dots + x_{k-12}) \ln(1-s_1) \\ & + (x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + \dots + x_{k-21} + x_{k-22}) \ln s_2 + (x_{13} + x_{23} + \dots + x_{k-23}) \ln(1-s_2) \\ & + \dots \\ & + (x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1k-2} + x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2k-2}) \ln s_{k-2} + (x_{1k-1} + x_{2k-1}) \ln(1-s_{k-2}) \\ & + (x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1k-1}) \ln s_{k-1} + x_{1k} \ln(1-s_{k-1}) + x_{total} \ln s_k - k s_k \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial s_1} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_{i1} + x_k}{s_1} - \frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_{i2}}{1-s_1} \Rightarrow \hat{s}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_{i1} + x_k}{\sum_{i=1}^{k-1} (x_{i1} + x_{i2}) + x_k}$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial s_2} = \frac{\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{k-2} x_{ij}}{s_2} - \frac{\sum_{i=1}^{k-2} x_{i3}}{1-s_2} \Rightarrow \hat{s}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{k-2} (x_{i1} + x_{i2})}{\sum_{i=1}^{k-1} (x_{i1} + x_{i2} + x_{i3})}$$

.....

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial s_{k-1}} = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} x_{1j}}{s_{k-1}} - \frac{x_{1k}}{1-s_{k-1}} \Rightarrow \hat{s}_{k-1} = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} x_{1j}}{\sum_{j=1}^k x_{1j}}$$

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial s_k} = \frac{x_{total}}{s_k} - k \Rightarrow \hat{s}_k = \frac{x_{total}}{k}$$

これより、各 $\hat{\lambda}_i$ は、 $\hat{\lambda}_1 = \hat{s}_1 \hat{s}_2 \cdots \hat{s}_k$, $\hat{\lambda}_2 = (1 - \hat{s}_1) \hat{s}_2 \cdots \hat{s}_k$, $\hat{\lambda}_3 = (1 - \hat{s}_2) \hat{s}_3 \cdots \hat{s}_k$, ..., $\hat{\lambda}_k = (1 - \hat{s}_{k-1}) \hat{s}_k$ によって求まる。

例 4 $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Z$ は互いに独立で、 $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, 3$, $Y_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$, $Y_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2 + \lambda_3)$, $Z \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ なるモデルに対して、MLE を求める：

$$P(x, y, z | \lambda) \propto \lambda_1^{x_1} \lambda_2^{x_2} \lambda_3^{x_3} \exp(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) \times \lambda_1^{y_1} (\lambda_2 + \lambda_3)^{y_2} \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) \\ \times (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^z \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3))$$

MLE を求めるのに、次の変数変換を用いると容易に計算できる

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad t = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \quad u = \lambda_2 / (\lambda_2 + \lambda_3).$$

$$\therefore \lambda_1 = \lambda t, \quad \lambda_2 = \lambda(1-t)u, \quad \lambda_3 = \lambda(1-t)(1-u).$$

$$\therefore P(x, y, z | \lambda) \propto \lambda^{x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + z} \exp(-3\lambda) t^{x_1 + y_1} (1-t)^{x_2 + x_3 + y_2} u^{x_2} (1-u)^{x_3}.$$

これより直ちに

$$\hat{\lambda} = \frac{x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + z}{3}, \quad \hat{t} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + x_3}, \quad \hat{u} = \frac{x_2}{x_2 + x_3}$$

を得る。よって

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda} \hat{t} = \frac{x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + z}{3} \frac{x_1 + y_1}{x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3},$$

$$\hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda} (\hat{t} - 1) \hat{u} = \frac{x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + z}{3} \frac{x_2 + y_2 + x_3}{x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3} \frac{x_2}{x_2 + x_3},$$

$$\hat{\lambda}_3 = \hat{\lambda} (1 - \hat{t}) (1 - \hat{u}) = \frac{x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + z}{3} \frac{x_2 + y_2 + x_3}{x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3} \frac{x_3}{x_2 + x_3}.$$

5. single proper prior による Bayes 推定

Poisson 分布に対し、通常の Bayes 推定では、パラメーター λ_i $i=1,2,..$ の事前分布に、共役分布族であるガンマ分布を仮定する。さて、ガンマ分布には次のような都合の良い性質がある。

Property 1. $W_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$, $i=1,2,3$. W_1, W_2, W_3 are independent, then

$$S_3 = W_1 + W_2 + W_3, \quad S_2 = \frac{W_1 + W_2}{W_1 + W_2 + W_3}, \quad S_1 = \frac{W_1}{W_1 + W_2}$$

are mutually independent and $S_3 \sim \text{Gamma}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta)$, $S_2 \sim \text{Beta}(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3)$ $S_1 \sim \text{Beta}(\alpha_1, \alpha_2)$

例 3-3 の続き Property 1 を用いて、例 3-3 のモデルに対して、事前分布

$$d\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \propto \lambda_1^{\alpha_1 - 1} \exp(-\beta \lambda_1) \lambda_2^{\alpha_2 - 1} \exp(-\beta \lambda_2) \lambda_3^{\alpha_3 - 1} \exp(-\beta \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3$$

を用いた時の Bayes 推定量を求める。パラメータの変数変換は、前回同様

$$s_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad s_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \quad s_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

を用いる。 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ について解くと、 $\lambda_1 = s_1 s_2 s_3$, $\lambda_2 = (1 - s_1) s_2 s_3$, $\lambda_3 = (1 - s_2) s_3$ であるから、Property 1 により

$$d\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \propto s_3^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1} \exp(-\beta s_3) s_2^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} (1 - s_2)^{\alpha_3 - 1} s_1^{\alpha_1 - 1} (1 - s_1)^{\alpha_2 - 1} ds_1 ds_2 ds_3$$

である。そして、 $Likelihood \propto s_1^{x_{11} + x_{21}} (1 - s_1)^{x_{12} + x_{22}} s_2^{x_{11} + x_{12}} (1 - s_2)^{x_{13}} s_3^{x_{total}} \exp(-3s_3)$ であるから

$$Likelihood \times prior \propto s_3^{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1} \exp(-(\beta + 3)s_3) s_2^{x_{11} + x_{12} + \alpha_1 + \alpha_2 - 1} (1 - s_2)^{x_{13} + \alpha_3 - 1} \\ \times s_1^{x_{11} + x_{21} + \alpha_1 - 1} (1 - s_1)^{x_{12} + x_{22} + \alpha_2 - 1} ds_3 ds_2 ds_1$$

$$\int Likelihood \times prior \propto \int s_3^{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1} \exp(-(\beta + 3)s_3) ds_3 \\ \times \int s_2^{x_{11} + x_{12} + \alpha_1 + \alpha_2 - 1} (1 - s_2)^{x_{13} + \alpha_3 - 1} ds_2 \int s_1^{x_{11} + x_{21} + \alpha_1 - 1} (1 - s_1)^{x_{12} + x_{22} + \alpha_2 - 1} ds_1 \\ = \frac{\Gamma(x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{(\beta + 3)^{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}} B(x_{11} + x_{12} + \alpha_1 + \alpha_2, x_{13} + \alpha_3) B(x_{11} + x_{21} + \alpha_1, x_{12} + x_{22} + \alpha_2)$$

同様に

$$\int \lambda_1 \times Likelihood \times prior = \int s_1 s_2 s_3 \times Likelihood \times prior \\ \propto \frac{\Gamma(x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1)}{(\beta + 3)^{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1}} \\ \times B(x_{11} + x_{12} + \alpha_1 + \alpha_2 + 1, x_{13} + \alpha_3) B(x_{11} + x_{21} + \alpha_1 + 1, x_{12} + x_{22} + \alpha_2)$$

$$\int \lambda_2 \times Likelihood \times prior = \int (1 - s_1) s_2 s_3 \times Likelihood \times prior \\ \propto \frac{\Gamma(x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1)}{(\beta + 3)^{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1}} \\ \times B(x_{11} + x_{12} + \alpha_1 + \alpha_2 + 1, x_{13} + \alpha_3) B(x_{11} + x_{21} + \alpha_1, x_{12} + x_{22} + \alpha_2 + 1)$$

$$\int \lambda_3 \times Likelihood \times prior = \int (1 - s_2) s_3 \times Likelihood \times prior \\ \propto \frac{\Gamma(x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1)}{(\beta + 3)^{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1}} \\ \times B(x_{11} + x_{12} + \alpha_1 + \alpha_2, x_{13} + \alpha_3 + 1) B(x_{11} + x_{21} + \alpha_1, x_{12} + x_{22} + \alpha_2)$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\int \lambda_1 \times Likelihood \times prior}{\int Likelihood \times prior} \\ = \frac{1}{\beta + 3} \frac{\Gamma(x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1)}{\Gamma(x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} \\ \times \frac{B(x_{11} + x_{12} + \alpha_1 + \alpha_2 + 1, x_{13} + \alpha_3) B(x_{11} + x_{21} + \alpha_1 + 1, x_{12} + x_{22} + \alpha_2)}{B(x_{11} + x_{12} + \alpha_1 + \alpha_2, x_{13} + \alpha_3) B(x_{11} + x_{21} + \alpha_1, x_{12} + x_{22} + \alpha_2)} \\ = \frac{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\beta + 3} \frac{x_{11} + x_{12} + \alpha_1 + \alpha_2}{x_{11} + x_{12} + x_{13} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \frac{x_{11} + x_{21} + \alpha_1}{x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22} + \alpha_1 + \alpha_2}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_2 &= \frac{\int \lambda_2 \times \text{Likelihood} \times \text{prior}}{\int \text{Likelihood} \times \text{prior}} \\ &= \frac{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\beta + 3} \frac{x_{11} + x_{12} + \alpha_1 + \alpha_2}{x_{11} + x_{12} + x_{13} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \frac{x_{12} + x_{22} + \alpha_2}{x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22} + \alpha_1 + \alpha_2} \\ \tilde{\lambda}_3 &= \frac{\int \lambda_3 \times \text{Likelihood} \times \text{prior}}{\int \text{Likelihood} \times \text{prior}} = \frac{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\beta + 3} \frac{x_{13} + \alpha_3}{x_{11} + x_{12} + x_{13} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}\end{aligned}$$

limit property 上記の結果から、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \rightarrow 0$ とすることで、 $\tilde{\lambda}_i \rightarrow \hat{\lambda}_i$ ($i = 1, 2, 3$) が得られる。

Property 1 と本質的に同じではあるが、パラメータ変換を多少違えた場合、次のようになる

Property 2. $W_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$, $i=1,2,3$. W_1, W_2, W_3 are independent, then

$$S = W_1 + W_2 + W_3, \quad T = \frac{W_1}{W_1 + W_2 + W_3}, \quad U = \frac{W_2}{W_2 + W_3}$$

are mutually independent and $S \sim \text{Gamma}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta)$, $T \sim \text{Beta}(\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3)$, $U \sim \text{Beta}(\alpha_2, \alpha_3)$.

例 4 の続き Property 2 を用いて、例 4 のモデルに対して、事前分布

$$\begin{aligned}d\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &\propto \lambda_1^{\alpha_1-1} \exp(-\beta\lambda_1) \lambda_2^{\alpha_2-1} \exp(-\beta\lambda_2) \lambda_3^{\alpha_3-1} \exp(-\beta\lambda_3) \\ &= \lambda_1^{\alpha_1-1} \lambda_2^{\alpha_2-1} \lambda_3^{\alpha_3-1} \exp(-\beta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3\end{aligned}$$

を用いた時の Bayes 推定量を求める。変数変換

$$s = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad t = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \quad u = \lambda_2 / (\lambda_2 + \lambda_3)$$

$\therefore \lambda_1 = st, \lambda_2 = s(1-t)u, \lambda_3 = s(1-t)(1-u)$ により

$$\begin{aligned}\text{Likelihood} &\propto \lambda_1^{x_1} \lambda_2^{x_2} \lambda_3^{x_3} \exp(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) \times \lambda_1^{y_1} (\lambda_2 + \lambda_3)^{y_2} \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) \\ &\quad \times (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^z \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) \\ &= s^{x_{total}} \exp(-3s) t^{x_1+y_1} (1-t)^{x_2+x_3+y_2} u^{x_2} (1-u)^{x_3}\end{aligned}$$

但し、 $x_{total} = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + z$.

$$\text{prior} \propto s^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1} \exp(-\beta s) t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2+\alpha_3-1} u^{\alpha_2-1} (1-u)^{\alpha_3-1} ds dt du$$

$\therefore \text{Likelihood} \times \text{prior}$

$$\begin{aligned}&\propto s^{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1} \exp(-(\beta+3)s) \\ &\quad \times t^{x_1+y_1+\alpha_1-1} (1-t)^{x_2+x_3+y_2+\alpha_2+\alpha_3-1} u^{x_2+\alpha_2-1} (1-u)^{x_3+\alpha_3-1} ds dt du\end{aligned}$$

$$\int \text{Likelihood} \times \text{prior}$$

$$\propto \int s^{x_{total}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1} \exp(-(\beta+3)s) ds$$

$$\begin{aligned}
& \times \int t^{x_1+y_1+\alpha_1-1} (1-t)^{x_2+x_3+y_2+\alpha_2+\alpha_3-1} dt \int u^{x_2+\alpha_2-1} (1-u)^{x_3+\alpha_3-1} du \\
& = \frac{\Gamma(x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{(\beta + 3)^{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}} \\
& \quad \times B(x_1 + y_1 + \alpha_1, x_2 + x_3 + y_2 + \alpha_2 + \alpha_3) B(x_2 + \alpha_2, x_3 + \alpha_3)
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
& \int \lambda_1 \times \text{Likelihood} \times \text{prior} = \int st \times \text{Likelihood} \times \text{prior} \\
& \propto \frac{\Gamma(x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1)}{(\beta + 3)^{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1}} \\
& \quad \times B(x_1 + y_1 + \alpha_1 + 1, x_2 + x_3 + y_2 + \alpha_2 + \alpha_3) B(x_2 + \alpha_2, x_3 + \alpha_3) \\
& \int \lambda_2 \times \text{Likelihood} \times \text{prior} = \int s(1-t)u \times \text{Likelihood} \times \text{prior} \\
& \propto \frac{\Gamma(x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1)}{(\beta + 3)^{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1}} \\
& \quad \times B(x_1 + y_1 + \alpha_1, x_2 + x_3 + y_2 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1) B(x_2 + \alpha_2 + 1, x_3 + \alpha_3) \\
& \int \lambda_3 \times \text{Likelihood} \times \text{prior} = \int s(1-t)(1-u) \times \text{Likelihood} \times \text{prior} \\
& \propto \frac{\Gamma(x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1)}{(\beta + 3)^{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1}} \\
& \quad \times B(x_1 + y_1 + \alpha_1, x_2 + x_3 + y_2 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1) B(x_2 + \alpha_2, x_3 + \alpha_3 + 1) \\
\tilde{\lambda}_1 & = \frac{\int \lambda_1 \times \text{Likelihood} \times \text{prior}}{\int \text{Likelihood} \times \text{prior}} \\
& = \frac{1}{\beta + 3} \frac{\Gamma(x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1)}{\Gamma(x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} \\
& \quad \times \frac{B(x_1 + y_1 + \alpha_1 + 1, x_2 + x_3 + y_2 + \alpha_2 + \alpha_3)}{B(x_1 + y_1 + \alpha_1, x_2 + x_3 + y_2 + \alpha_2 + \alpha_3)} \frac{B(x_2 + \alpha_2, x_3 + \alpha_3)}{B(x_2 + \alpha_2, x_3 + \alpha_3)} \\
& = \frac{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\beta + 3} \frac{x_1 + y_1 + \alpha_1}{x_1 + y_1 + x_2 + x_3 + y_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\
\tilde{\lambda}_2 & = \frac{\int \lambda_2 \times \text{Likelihood} \times \text{prior}}{\int \text{Likelihood} \times \text{prior}} \\
& = \frac{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\beta + 3} \frac{x_2 + x_3 + y_2 + \alpha_2 + \alpha_3}{x_1 + y_1 + x_2 + x_3 + y_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \frac{x_2 + \alpha_2}{x_2 + x_3 + \alpha_2 + \alpha_3} \\
\tilde{\lambda}_3 & = \frac{\int \lambda_3 \times \text{Likelihood} \times \text{prior}}{\int \text{Likelihood} \times \text{prior}} \\
& = \frac{x_{total} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\beta + 3} \frac{x_2 + x_3 + y_2 + \alpha_2 + \alpha_3}{x_1 + y_1 + x_2 + x_3 + y_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \frac{x_3 + \alpha_3}{x_2 + x_3 + \alpha_2 + \alpha_3}
\end{aligned}$$

limit property 上記の結果から、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \rightarrow 0$ とすることで、 $\tilde{\lambda}_i \rightarrow \hat{\lambda}_i$ ($i = 1, 2, 3$) が得られる。

Blyth の方法を用いた許容性について 例 3-3, 例 4 にて, MLE が limit Bayes ゆえ「許容的な推定量で近似される」ことまではわかった。しかし、許容的な推定量で近似されても、MLE が許容性だと断言できない。Blyth(1951) は、「目的の推定量が、ベイズ推定量によって、ベイズリスクという measurement で近づくことが示されれば、許容的」という定理を示した。よって、Blyth の方法によって許容性を示すには、単に limit Bayes だけでは不十分で、ベイズリスクも近づくことを示さなくてはならない。

一次元 Poisson 分布: $P(X|\lambda) = \lambda^x \exp(-\lambda)/x!$ の MLE $\hat{\delta}(x) = x$ が、自乗損失下で許容であることを Blyth の方法で証明するには、次のようにすればよい: , 事前分布として、 $d\tau_{\alpha,\beta}(\lambda) \propto \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda) d\lambda$ を選ぶ。この事前分布に対する Bayes estimator は $\delta_{\alpha,\beta}(x) = (x+\alpha)/(1+\beta)$ 。 $R(\lambda, \delta_{\alpha,\beta}) = E_{\lambda}[\lambda - ((X+\alpha)/(1+\beta))]^2 = ((\alpha - \beta\lambda)^2 + \lambda)/(1+\beta)^2$, $\gamma(d\tau_{\alpha,\beta}, \delta_{\alpha,\beta}) = \alpha/(\beta(1+\beta))$ 。 他方、 $\hat{\delta}(x) = x$ に対して $R(\lambda, \hat{\delta}) = E_{\lambda}[\lambda - X]^2 = \lambda$, $\gamma(d\tau_{\alpha,\beta}, \hat{\delta}) = \alpha/\beta$ であり、 $\gamma(d\tau_{\alpha,\beta}, \delta_{\alpha,\beta}) - \gamma(d\tau_{\alpha,\beta}, \hat{\delta}) = -\alpha/(1+\beta) \rightarrow 0$ when $\alpha, \beta \rightarrow 0$ 。 であるから、許容的。

この Blyth の方法を例 3-3, 例 4 に適用できるかも知れないと思い、試みた。しかし、計算が途中でスタックし、成功していない。

Acknowledgement

本稿の著者は、科研費シンポジウム「多変量解析」(1999年12月7日-9日、広島大学)にて Admissibility of the MLE for multinomial distribution with monotone missing data という題名で発表を行った。内容は、主に本稿の定理 1, 3, 4 に関するものであった。この発表に対し、座長の狩野裕先生(大阪大・人間科学)、フロアーの辻谷将明先生(大阪電気通信大・情報工)、藤越康祝先生、若木宏文先生(広島大・理)等から、数々の質問・コメントを頂いた。これらの質問・コメントが本稿の定理 2, 5 および第 4 章以降の基になっている。これらの諸先生方に厚くお礼申し上げたい。

参考文献

- [1] Asano, C. (1965) On estimating multinomial probabilities by pooling incomplete samples, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **17**, 1-17.
- [2] Blyth, C.R. (1951). On minimax statistical decision procedures and their admissibility. *Annals of Mathematical Statistics* **22**, 22-42.
- [3] Brown, L.D. (1981). A complete class theorem for statistical problems with finite sample space, *Annals of Statistics* **9**, 1289-1300.
- [4] Ghosh, M. and Meeden, G. (1997). *Bayesian methods for finite population sampling*, Chapman and Hall.
- [5] Hsuan, F. (1979). A stepwise Bayesian procedure, *Annals of Statistics* **7**, 860-868.
- [6] Meeden, G., Ghosh, M., Srinivasan. C., and Vardeman, S. (1989). The admissibility of the Kaplan-Meyer and other maximum likelihood estimators in the presence of censoring, *Annals of Statistics* **17** 1509-1531.