数理解析研究所講究録
1162 巻 2000 年 36-42

FBI transforms and function spaces

奈良女子大学理学部数学科　森藤紳哉 (SHINYA MORITOH)

本稿では FBI 変換（とその変形）を用いて函数空間を定義し、Besov-Triebel-Lizorkin 空間との比較を行いたい。**0** で本稿で扱う函数空間の理論を展開する上での基盤となる Littlewood-Paley の定理を述べる。**1** で FBI 変換（とその変形）の定義、函数空間の定義、定理１、２を、**2** で Triebel-Lizorkin 空間の特徴付け（定理３）を、**3** でいくつかの注意を述べ、最後に **4** で FBI 変換と超局所特異性について述べる。（文献表は完全からほど遠いことをお断りします。）

0. はじめに

Littlewood-Paley の定理 (1931–1937) は次のように述べられる ([7],[8])。函数 $f(\theta)$ の２進分解

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(\theta),$$
$$\Delta_k(\theta) = \sum_{2^{k-1} \leqq |n| < 2^k} a_n e^{in\theta},\ k \geqq 1;\ \Delta_0 = a_0$$

に付随する square function の L_p ノルム $\left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_k(\theta)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p}$ と 函数 f の L_p ノルム $\|f\|_{L_p}$ は同等である $(1 < p < \infty)$、という結果である。

1. FBI 変換 (Fourier-Bros-Iagolnitzer 変換)

$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ の FBI 変換 ([1]) は次のように定義される。

$$Tf(x,\xi) = \int f(t)\ |\xi|^{n/2} \exp\{-|\xi||x-t|^2/2 + i\xi \cdot (x-t)\}dt,\ (x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n.$$

変数 x に関してフーリエ変換すると

$$\widehat{Tf}(z,\xi) = \hat{f}(z)\exp\{-|z-\xi|^2/2|\xi|\}.$$

時刻 $\{t; |t-x| \leqq |\xi|^{-1/2}\}$, 周波数 $\{z; |z-\xi| \leqq |\xi|^{1/2}\}$ あたりの函数 $f(t)$ の情報を引き出しているのが FBI 変換といえる。これを変形して、$r>0,\ 0 \leqq \alpha \leqq 2$ とし

$$T_{r,\alpha}f(x,\xi) = \int f(t)\ |\xi|^{n\alpha/2}\exp\{-|\xi|^\alpha|x-t|^2/2 + ir\xi\cdot(x-t)\}dt, \quad (x,\xi)\in T^*\mathbb{R}^n.$$

変数 x に関してフーリエ変換すると

$$\widehat{T_{r,\alpha}f}(z,\xi) = \hat{f}(z)\exp\{-|z-r\xi|^2/2|\xi|^\alpha\}.$$

Triebel-Lizorkin 空間 ([8]) の定義を述べておく。$\phi_0(z)$ をコンパクト台をもつ C^∞ 級の函数で $\{z; |z| \leqq 1\}$ の近傍で 1 をとるものとする。$\phi(z)$ を C^∞ 級の函数で、ある正の定数 $c_1 < c_2$ が存在して $\{z; c_1 < |z| < c_2\}$ に台をもつとする。さらに原点からのいかなる半直線も $\phi(z)$ の台と交わるとする。$s \in \mathbb{R}, 1 \leqq p < \infty, 1 \leqq q \leqq \infty$ とする。$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ が Triebel-Lizorkin 空間 F^s_{pq} に属するとは

$$||(\phi_0\hat{f})\check{}||_{L_p} + \left\|\left\|r^s(\phi(\cdot/r)\hat{f}(\cdot))\check{}(x)\right\|_{L_q(dr/r;r\geqq 1)}\right\|_{L_p} < \infty$$

が満たされることと定義される。(ϕ_0, ϕ の取り方によらない。) さて、Triebel-Lizorkin type の函数空間を定義しよう。$s \in \mathbb{R}, 1 \leqq p < \infty, 1 \leqq q \leqq \infty$ とする。$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ が函数空間 $\mathcal{F}^s_{pq\alpha}$ に属するとは

$$||(\phi_0\hat{f})\check{}||_{L_p} + \left\|\Big(\int_{|\xi|\geqq 1}|\xi|^{sq}|\int_{S^{n-1}}\int_1^2 T_{r,\alpha}f(x,\xi)drd\theta_\xi|^q d|\xi|/|\xi|\Big)^{1/q}\right\|_{L_p} < \infty$$

が満たされることと定義する。(ϕ_0 の取り方によらない。) このとき、

Theorem 1. $0 \leqq \beta \leqq \alpha < 2$ に対して、$\mathcal{F}^{s}_{pq\alpha} = \mathcal{F}^{s-n(\alpha-\beta)/2}_{pq\beta}$.

証明の鍵は次の評価 ([3]) と vector-valued Fourier multiplier theorem([8]) である。

$$\phi^1_{\alpha,|\xi|}(z) = \int_{S^{n-1}} \int_1^2 \exp\{-|z - r\xi|^2/2|\xi|^\alpha\} dr d\theta_\xi,$$
$$\phi^2_{\alpha,|\xi|}(z) = \int_{S^{n-1}} \int_{1/2}^4 \exp\{-|z - r\xi|^2/2|\xi|^\alpha\} dr d\theta_\xi$$

とおくと、任意の z と任意の $|\xi| \geqq 1$ に対してある定数 C, c が存在し

$$\phi^1_{\alpha,|\xi|}(z) \leqq C|\xi|^{n(\alpha-\beta)/2}\phi^2_{\beta,|\xi|}(z) + C\exp\{-c(|\xi|^{2-\alpha} + |z|^2/|\xi|^\alpha)\},$$

$$|\xi|^{n(\alpha-\beta)/2}\phi^1_{\beta,|\xi|}(z) \leqq C\phi^2_{\alpha,|\xi|}(z).$$

$\{z;\ |\xi|/10 \leqq |z| \leqq 10|\xi|\}$ においては第一式の第二項 $C\exp\{-c(|\xi|^{2-\alpha} + |z|^2/|\xi|^\alpha)\}$ は不要であることに注意する。この定理では $\alpha = 2$ の場合が除外されているが、その理由はこの項が $|\xi|$ に関して指数減少になっていないためである。$\alpha = 2$ の場合は次の章で扱われる。さらに vector-valued Fourier multiplier theorem([8]) をこの証明で使われる形で引用しておく。

Fact. $1 \leqq p < \infty, 1 \leqq q \leqq \infty$ そして $\kappa > n(1/2 + 1/\min(p,q))$ とする。$f(x,y)$ を $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の函数、$\hat{f}(\xi, y)$ を函数 $f(x,y)$ の変数 x に関するフーリエ変換とする。Ω_y を $\operatorname{supp} \hat{f}(\cdot, y)$ を含む集合とし、Ω_y の直径 d_y を変数 y に関する正値連続函数とする。 このとき $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の函数 $M(x,y)$ に対してある定数 C が存在し次の不等式が成り立つ:

$$\left\| \|M(\cdot, y) * f(\cdot, y)\|_{L_q(dy/|y|^n)} \right\|_{L_p(dx)}$$
$$\leqq C \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \|\hat{M}(d_y \cdot, y)\|_{H^\kappa} \cdot \left\| \|f(x,y)\|_{L_q(dy/|y|^n)} \right\|_{L_p(dx)}.$$

Besov type の函数空間の定義、定理の定式化も以上と同様に次のようになされる。まず Besov 空間 ([8]) の定義を述べておく。$\phi_0(z)$, $\phi(z)$ を先と同様にとる。$s \in \mathbb{R}, 1 \leqq p, q \leqq \infty$ とする。$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ が Besov 空間 B^s_{pq} に属するとは

$$\|(\phi_0 \hat{f})\check{}\|_{L_p} + \left\| \left\| r^s(\phi(\cdot/r)\hat{f}(\cdot))\check{}(x) \right\|_{L_p(dx)} \right\|_{L_q(dr/r; r \geqq 1)} < \infty$$

が満たされることと定義される。(ϕ_0, ϕ の取り方によらない。) さて、Besov type の函数空間を定義しよう。$s \in \mathbb{R}, 1 \leqq p, q \leqq \infty$ とする。$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ が函数空間 $\mathcal{B}^s_{pq\alpha}$ に属するとは

$$\|(\phi_0 \hat{f})\check{}\|_{L_p} + \left\| \left(\int |\xi|^{sp} \left| \int_{S^{n-1}} \int_1^2 T_{r,\alpha} f(x, \xi) dr d\theta_\xi \right|^p dx \right)^{1/p} \right\|_{L_q(d|\xi|/|\xi|;\ |\xi| \geqq 1)} < \infty$$

が満たされることと定義する。(ϕ_0 の取り方によらない。) このとき、

Theorem 2. $0 \leqq \beta \leqq \alpha < 2$ に対して、$\mathcal{B}^s_{pq\alpha} = \mathcal{B}^{s-n(\alpha-\beta)/2}_{pq\beta}$.

2. Triebel-Lizorkin 空間の特徴づけ

$2k > n/\min(p, q)$ なる k を定め、$\phi^1_{2,|\xi|}(z)$ を $z = 0$ で退化させた函数を

$$\varphi_{|\xi|}(z) = |z|^{2k}/|\xi|^{2k} \int_{S^{n-1}} \int_1^2 \exp\{-|z - r\xi|^2/2|\xi|^2\} dr d\theta_\xi$$

と定める。すると $\varphi_1(z/|\xi|) = \varphi_{|\xi|}(z)$ が成り立ち、$\varphi_1(z)$ を Triebel-Lizorkin 空間の一般的な特徴付け ([8]) に使うことができる。Δ_x を x に関する Laplacian とする。

Theorem 3. $s \in \mathbb{R}, 1 \leqq p < \infty, 1 \leqq q \leqq \infty$ とする。$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ が *Triebel-Lizorkin* 空間 F^s_{pq} に属することと

$$\|(\phi_0 \hat{f})\check{}\|_{L_p} + \left\| \left(\iint_{|\xi| \geqq 1, 1 \leqq r \leqq 2} |\xi|^{(s-2k)q} |\Delta^k_x T_{r,2} f(x, \xi)|^q d\xi/|\xi|^n \right)^{1/q} \right\|_{L_p} < \infty$$

が満たされることは同値である。

Besov 空間に対しても同様の特徴付けがなされる。

ここで、Triebel-Lizorkin 空間の一般的な特徴付けによって得られる次の事実 ([8]) も引用しておく。函数空間の index p, q の範囲を 1 未満にまで拡張した形で述べる。$x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ とし、

$$W(t)f(x) = (4\pi t)^{-n/2} \int e^{-|x-y|^2/4t} f(y)dy$$

を Gauss-Weierstrass 半群、

$$P(t)f(x) = c_n \int \frac{t}{(|x-y|^2 + t^2)^{(n+1)/2}} f(y)dy$$

を Cauchy-Poisson 半群とする。ここで c_n は $P(0)$ が identity になるように定める。$\sigma_p = n(1/p - 1)_+$ とおく。

Fact. $s \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty, 0 < q \leqq \infty$ とする。ϕ_0 を先と同じにとる。m, k を

$$m > s/2, \quad k > n/\min(p,q) + \max(s, \sigma_p)$$

をみたす整数とすると、$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ が *Triebel-Lizorkin* 空間 F^s_{pq} に属することと

$$||(\phi_0 \hat{f})\check{}||_{L_p} + \left\| \left(\int_0^1 t^{(m-s/2)q} |\partial^m W(t)f/\partial t^m|^q dt/t \right)^{1/q} \right\|_{L_p} < \infty$$

あるいは

$$||(\phi_0 \hat{f})\check{}||_{L_p} + \left\| \left(\int_0^1 t^{(k-s)q} |\partial^k P(t)f/\partial t^k|^q dt/t \right)^{1/q} \right\|_{L_p} < \infty$$

が成り立つことは同値であり、F^s_{pq} における同値な擬ノルムを与える。

3. 注意

1) $\mathcal{F}^s_{2,2,1}$ は L_2 に付随する Sobolev 空間 $H^{s-n/4}$ に一致する。これは Plancherel の定理を直接用いて示される。さらに函数空間 $\mathcal{F}^s_{2,2,1}$ の定義において $1 \leqq r \leqq 2$ に関する積分を省いてもやはり同じ Sobolev 空間が得られる。

2) 上のことから今まで考察の対象にした函数空間 $\mathcal{F}^s_{pq\alpha}$ よりも $T_\alpha = T_{1,\alpha}$ とおいて

$$||(\phi_0 \hat{f})||_{L_p} + \left\| \left(\int_{|\xi| \geqq 1} |\xi|^{sq} |T_\alpha f(x,\xi)|^q d\xi / |\xi|^{n\alpha/2} \right)^{1/q} \right\|_{L_p} < \infty$$

を満たす函数の集合を考察の対象にするのが自然に思われる。

3) $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$ $(1 \geqq \rho > \delta \geqq 0)$ を symbol とする擬微分作用素 $a(x,D)$ に対して

$$a(x,D) - T^*_{\rho+\delta} M_a T_{\rho+\delta} \in OPS^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}.$$

ここで、$T_\alpha = T_{1,\alpha}$, M_a は $a(x,\xi)$ による掛け算作用素、$*$ は共役を表わす ([2],[4])。

4) フーリエ積分作用素の L_p 有界性の証明に用いられた周波数空間の second dyadic (= dyadic-parabolic) decomposition ([7]) との関連も興味深い。

4. FBI 変換と超局所特異性

そもそも FBI 変換は超函数の超局所的な解析的特異性を取り出すために使われた。ここでは analytic, Gevrey, C^∞, H^s の特異性の特徴付けを与えておく ([1],[3],[4],[5],[6])。

1) $(x_0,\xi^0) \notin WF_A(f) \Leftrightarrow (x_0,\xi^0)$ のある錐近傍 Γ, ある定数 C, c が存在して

$$|Tf(x,\xi)| \leqq Ce^{-c|\xi|}, \quad (x,\xi) \in \Gamma.$$

2) $(x_0,\xi^0) \notin WF(G^s)(f) \Leftrightarrow (x_0,\xi^0)$ のある錐近傍 Γ, ある定数 C, c が存在して

$$|Tf(x,\xi)| \leqq Ce^{-c|\xi|^{1/s}}, \quad (x,\xi) \in \Gamma.$$

3) $(x_0, \xi^0) \notin WF(f) \Leftrightarrow (x_0, \xi^0)$ のある錐近傍 Γ が存在して

$$|Tf(x, \xi)| \leqq C_N(1 + |\xi|)^{-N}, \quad (x, \xi) \in \Gamma, \ \forall N \in \mathbb{N}.$$

4) $(x_0, \xi^0) \notin WF(H^s)(f) \Leftrightarrow (x_0, \xi^0)$ のある錐近傍 Γ が存在して

$$\iint_\Gamma \int_1^2 (1 + |\xi|^2)^{s+n/4} |T_r f(x, \xi)|^2 dr dx d\xi \ < \ \infty.$$

ここで $T_r = T_{r,1}$ とした。

References

1. J. Bros and D. Iagolnitzer, *Support essentiel et structure analytique des distributions*, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz, exp. no. 18 (1975 – 76).
2. A. Córdoba and C. Fefferman, *Wave packets and Fourier integral operators*, Comm. Partial Diff. Eq. **3** (1978), 979–1005.
3. J. M. Delort, *F.B.I transformation – second microlocalization and semilinear caustics*, Springer Lecture Notes in Math., Number 1522, 1992.
4. G. B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Annals of Math. Studies, Number 122, Princeton Univ. Press, 1989.
5. L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
6. J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque **95** (1982), 1–166.
7. E. M. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton Univ. Press, 1993.
8. H. Triebel, *Theory of Function Spaces II*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1992.