数理解析研究所講究録
1170 巻 2000 年 35-47

超離散戸田分子方程式の保存量とバブルソート方程式の保存量と組紐半群の不変量の関係

早大理工　岩尾昌央 (Masataka Iwao)

時間差分戸田分子方程式とその保存量には超離散極限が存在すること, 及び超離散戸田分子方程式がバブルソートアルゴリズムと関係することは既に知られている [3, 4]. 本稿では逆に, まずバブルソート方程式の保存量を求めておいて, これを max-plus 代数の上で変形することにより, 超離散戸田分子方程式の保存量を導出できることを示す.

1　はじめに

Takahashi 等によるソリトン・セルオートマトンの発見 [1] 以来, 独立変数・従属変数共に完全に離散な可積分系の研究が活発に行なわれている. その中でも, 超離散化極限の手法は非常に強力であり, 近年脚光を浴びている.

超離散化極限の手法を用いると, 時間差分戸田分子方程式 [2]

$$\left\{\begin{array}{lcll} Q_n^{t+1} &=& E_n^t + \prod_{k=1}^{n} Q_k^t \times \left(\prod_{k=1}^{n-1} Q_k^{t+1}\right)^{-1}, & (1 \le n \le N) \\ E_n^{t+1} &=& E_n^t \times Q_{n+1}^t \times (Q_n^{t+1})^{-1}, & (1 \le n \le N-1) \end{array}\right.$$

($E_0^t = E_N^t = 0$) から, 超離散戸田分子方程式

$$\left\{\begin{array}{lcll} Q_n^{t+1} &=& \min\left\{E_n^t, \sum_{k=1}^{n} Q_k^t - \sum_{k=1}^{n-1} Q_k^{t+1}\right\}, & (1 \le n \le N) \\ E_n^{t+1} &=& E_n^t + Q_{n+1}^t - Q_n^{t+1}, & (1 \le n \le N-1) \end{array}\right. \tag{1}$$

($E_0^t = E_N^t = \infty$) が得られる.

ここで同時に, 時間差分戸田分子方程式の保存量の「組合せ」をうまく選んで超離散極限をとると, 超離散戸田分子方程式の独立な保存量を得られることが知られている [3, 4]. しかし, 残念ながら, この「組合せ」の選び方は自明ではない. このため, 超離散方程式としてはどのような内在的メカニズムにより独立な保存量を持つのか理解しづらい.

そこで本稿ではバブルソート方程式との関係に視点を置いて, max-plus 代数上で直に超離散戸田分子方程式の独立な保存量を構成することを試みる. これにより, 独立な超離散版保存量の形の必然性を理解できると思われる.

2 節で式 (1) を議論上都合のよい形に書き換える. 3 節で代入写像を導入して超離散戸田分子方程式とバブルソート方程式を関連づける. 4 節でバブルソート方程式の非可逆性にふれる. 5 節でバブルソート方程式の保存量について述べる. 6 節で実際に超離散戸田分子方程式の保存量を構成する. なお都合上, 実際の計算は $N = 2, 3$ の場合だけ行なう.

2　Recurrent Form

式 (1) を書き換えよう. まず従属変数変換

$$Q_n^t = U_n^t - U_{n-1}^t, \tag{2}$$

$(U_0^t=0)$ を導入すると式 (1) は

$$\left\{\begin{array}{lcll} U_n^{t+1} & = & \min\{E_n^t+U_{n-1}^{t+1}, U_n^t\}, & (1\le n\le N) \\ E_n^{t+1} & = & E_n^t+U_{n+1}^t-U_n^t-U_n^{t+1}+U_{n-1}^{t+1}, & (1\le n\le N-1) \end{array}\right. \tag{3}$$

となる. 作用素 $\{\Theta_n|1\le n\le N-1\}$ を

$$\Theta_n:(u_1,u_2,\ldots,u_N,e_1,e_2,\ldots,e_{N-1})\mapsto(u'_1,u'_2,\ldots,u'_N,e'_1,e'_2,\ldots,e'_{N-1}),$$
$$\left\{\begin{array}{lcl} u'_n & = & \min\{e_n+u_{n-1},u_n\}, \\ e'_n & = & e_n+u_{n+1}-u_n-u'_n+u_{n-1}, \\ u'_m & = & u_m, \quad (m\ne n) \\ e'_m & = & e_m, \quad (m\ne n) \end{array}\right. \tag{4}$$

とすると式 (3) は

$$\left\{\begin{array}{l} (U_1^{t+1},U_2^{t+1},\ldots,U_N^{t+1},E_1^{t+1},E_2^{t+1},\ldots,E_{N-1}^{t+1}) \\ =\Theta_{N-1}\cdot\Theta_{N-2}\cdot\cdots\cdot\Theta_1(U_1^t,U_2^t,\ldots,U_N^t,E_1^t,E_2^t,\ldots,E_{N-1}^t). \end{array}\right. \tag{5}$$

となる. ここで従属変数変換 (2) 及び変数変換

$$\left\{\begin{array}{l} q_n=u_n-u_{n-1}, \\ q'_n=u'_n-u'_{n-1}, \end{array}\right.$$

により作用素 (4) は次の $\{\vartheta_n|1\le n\le N-1\}$ に書き換えられる.

$$\vartheta_n:(q_1,q_2,\ldots,q_N,e_1,e_2,\ldots,e_{N-1})\mapsto(q'_1,q'_2,\ldots,q'_N,e'_1,e'_2,\ldots,e'_{N-1}),$$
$$\left\{\begin{array}{rcl} q'_n & = & \min\{e_n,q_n\}, \\ e'_n & = & e_n+q_{n+1}-q'_n, \\ q'_{n+1} & = & e'_n-e_n+q_n, \\ q'_m & = & q_m, \quad (m\ne n,n+1) \\ e'_m & = & e_m. \quad (m\ne n) \end{array}\right. \tag{6}$$

この作用素を用いると, 式 (5) は

$$\left\{\begin{array}{l} (Q_1^{t+1},Q_2^{t+1},\ldots,Q_N^{t+1},E_1^{t+1},E_2^{t+1},\ldots,E_{N-1}^{t+1}) \\ =\vartheta_{N-1}\cdot\vartheta_{N-2}\cdot\cdots\cdot\vartheta_1(Q_1^t,Q_2^t,\ldots,Q_N^t,E_1^t,E_2^t,\ldots,E_{N-1}^t), \end{array}\right. \tag{7}$$

となる. また, 作用素 (4) の逆作用素 $\{\vartheta_n^{-1}|1\le n\le N-1\}$

$$\vartheta_n^{-1}:(q'_1,q'_2,\ldots,q'_N,e'_1,e'_2,\ldots,e'_{N-1})\mapsto(q_1,q_2,\ldots,q_N,e_1,e_2,\ldots,e_{N-1}),$$
$$\left\{\begin{array}{rcl} q_{n+1} & = & \min\{e'_n,q'_{n+1}\}, \\ e_n & = & e'_n+q'_n-q_{n+1}, \\ q_n & = & e_n-e'_n+q'_{n+1}, \\ q_m & = & q'_m, \quad (m\ne n,n+1) \\ e_m & = & e'_m, \quad (m\ne n) \end{array}\right. \tag{8}$$

により式 (5) は次の逆時間発展形式になる.

$$\left\{\begin{array}{l} (Q_1^t,Q_2^t,\ldots,Q_N^t,E_1^t,E_2^t,\ldots,E_{N-1}^t) \\ =\vartheta_1^{-1}\cdot\vartheta_2^{-1}\cdot\cdots\cdot\vartheta_{N-1}^{-1}(Q_1^{t+1},Q_2^{t+1},\ldots,Q_N^{t+1},E_1^{t+1},E_2^{t+1},\ldots,E_{N-1}^{t+1}). \end{array}\right. \tag{9}$$

ここでさらに, 中間変数 $\{q_j^t(l), e_k^t(l) | 1 \leq j, l \leq N, 1 \leq k \leq N-1\}$ を用意する.

$$
\begin{array}{cl}
 & (q_1^t(1), q_2^t(1), \ldots q_N^t(1), e_1^t(1), e_2^t(1), \cdots, e_{N-1}^t(1)) \\
= & (Q_1^t, Q_2^t, \ldots, Q_N^t, E_1^t, E_2^t, \ldots, E_{N-1}^t), \\
 & (q_1^t(2), q_2^t(2), \ldots q_N^t(2), e_1^t(2), e_2^t(2), \ldots, e_{N-1}^t(2)) \\
= & \vartheta_1(q_1^t(1), q_2^t(1), \ldots q_N^t(1), e_1^t(1), e_2^t(1), \ldots, e_{N-1}^t(1)), \\
 & \cdots\cdots\cdots, \\
 & (q_1^t(l+1), q_2^t(l+1), \ldots q_N^t(l+1), e_1^t(l+1), e_2^t(l+1), \ldots, e_{N-1}^t(l+1)) \\
= & \vartheta_l(q_1^t(l), q_2^t(l), \ldots q_N^t(l), e_1^t(l), e_2^t(l), \ldots, e_{N-1}^t(l)), \\
 & \cdots\cdots\cdots, \\
 & (q_1^t(N), q_2^t(N), \ldots q_N^t(N), e_1^t(N), e_2^t(N), \ldots, e_{N-1}^t(N)) \\
= & \vartheta_{N-1}(q_1^t(N-1), q_2^t(N-1), \ldots q_N^t(N-1), e_1^t(N-1), e_2^t(N-1), \ldots, e_{N-1}^t(N-1)),
\end{array}
$$

すると式 (6) と式 (7) から

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
q_m^t(1) & = & Q_m^t, & (1 \leq m \leq N) \\
e_m^t(1) & = & E_m^t, & (1 \leq m \leq N-1) \\
q_n^t(n+1) & = & \min\{q_n^t(n), e_n^t(n)\}, & \\
e_n^t(n+1) & = & e_n^t(n) + q_{n+1}^t(n) - q_n^t(n+1), & \\
q_{n+1}^t(n+1) & = & e_n^t(n+1) - e_n^t(n) + q_n^t(n), & \\
q_m^t(n+1) & = & q_m^t(n), & (m \neq n, n+1) \\
e_m^t(n+1) & = & e_m^t(n), & (m \neq n) \\
Q_m^{t+1} & = & q_m^t(N), & (1 \leq m \leq N) \\
E_m^{t+1} & = & e_m^t(N), & (1 \leq m \leq N-1)
\end{array}
\right. \tag{10}
$$

を得る. また式 (8) と式 (9) から

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
q_m^t(N) & = & Q_m^{t+1}, & (1 \leq m \leq N) \\
e_m^t(N) & = & E_m^{t+1}, & (1 \leq m \leq N-1) \\
q_{n+1}^t(n) & = & \min\{q_{n+1}^t(n+1), e_n^t(t+1)\}, & \\
e_n^t(n) & = & e_n^t(n+1) + q_n^t(n+1) - q_{n+1}^t(n), & \\
q_{n+1}^t(n) & = & e_n^t(n) - e_n^t(n+1) + q_{n+1}^t(n+1), & \\
q_m^t(n) & = & q_m^t(n+1), & (m \neq n, n+1) \\
e_m^t(n) & = & e_m^t(n+1), & (m \neq n) \\
Q_m^t & = & q_m^t(1), & (1 \leq m \leq N) \\
E_m^t & = & e_m^t(1), & (1 \leq m \leq N-1)
\end{array}
\right. \tag{11}
$$

を得る. 以降の節では式 (1) の代わりに式 (10) と式 (11) を用いる.

3 バブルソート方程式

式 (10) に特殊な代入 $Q_m^t = A_m^t, E_m^t = A_{m+1}^t$ を施そう. すると

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
q_n^t(n+1) & = & \min\{q_n^t(n), q_{n+1}^t(n)\}, & \\
q_{n+1}^t(n+1) & = & \max\{q_n^t(n), q_{n+1}^t(n)\}, & \\
q_m^t(n+1) & = & q_m^t(n), & (m \neq n, n+1)
\end{array}
\right. \tag{12}
$$

(for $1 \leq n \leq N-1$) となる．よって作用素 $\{\sigma_n | 1 \leq n \leq N-1\}$ を

$$\sigma_n : (a_1, a_2, \ldots, a_N) \mapsto (a'_1, a'_2, \ldots, a'_N),$$
$$\begin{cases} a'_n &=& \min\{a_n, a_{n+1}\}, \\ a'_{n+1} &=& \max\{a_n, a_{n+1}\}, \\ a'_m &=& a_m, \quad (m \neq n, n+1) \end{cases} \tag{13}$$

と定義すると, 変数 $\{Q_1^{t+1}, Q_2^{t+1}, \ldots, Q_N^{t+1}\}$ の値が次のように書ける．

$$\begin{aligned} (Q_1^{t+1}, Q_2^{t+1}, \ldots, Q_N^{t+1}) &= \sigma_{N-1} \cdot \sigma_{N-2} \cdot \cdots \cdot \sigma_1 (A_1^t, A_2^t, \ldots, A_N^t) \\ &= \sigma_{N-1} \cdot \sigma_{N-2} \cdot \cdots \cdot \sigma_1 (Q_1^t, Q_2^t, \ldots, Q_N^t), \end{aligned} \tag{14}$$

ここで $(Q_1^{t+2}, Q_2^{t+2}, \ldots, Q_N^{t+2})$ は$\sigma_{N-1} \cdot \sigma_{N-2} \cdot \cdots \cdot \sigma_1 (Q_1^{t+1}, Q_2^{t+1}, \ldots, Q_N^{t+1})$ と同じ値であるとは限らない．なぜなら変数 $\{E_1^{t+1}, E_2^{t+1}, \ldots, E_{N-1}^{t+1}\}$ の値が条件 $E_m^{t+1} = Q_{m+1}^{t+1}$ を満たすとは限らないからである．

従って代入

$$\pi^t : \begin{cases} Q_1^t \mapsto A_1^t, \quad Q_2^t \mapsto A_2^t, \quad \cdots, \quad Q_N^t \mapsto A_N^t, \\ E_1^t \mapsto A_2^t, \quad E_2^t \mapsto A_3^t, \quad \cdots, \quad E_{N-1}^t \mapsto A_N^t, \end{cases} \tag{15}$$

のもとで, 式 (10) での変数 $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N)$ の 1 ステップのみ $(t \to t+1)$ の時間発展は, 次のバブルソート方程式 [4] の変数 $(A_1, A_2, \ldots, A_N)$ の時間発展と一致する．

$$(A_1^{t+1}, A_2^{t+1}, \ldots, A_N^{t+1}) = \sigma_{N-1} \cdot \sigma_{N-2} \cdot \cdots \cdot \sigma_1 (A_1^t, A_2^t, \ldots, A_N^t). \tag{16}$$

式 (11) に特殊な代入 $Q_m^{t+1} = B_m^{t+1}, E_m^{t+1} = B_m^{t+1}$ を施そう．すると

$$\begin{cases} q_{n+1}^t(n) &=& \min\{q_{n+1}^t(n+1), q_n^t(n+1)\}, \\ q_n^t(n) &=& \max\{q_{n+1}^t(n+1), q_n^t(n+1)\}, \\ q_m^t(n) &=& q_m^t(n+1), \qquad (m \neq n, n+1) \end{cases} \tag{17}$$

(for $1 \leq n \leq N-1$) となる．よって作用素 $\{\bar{\sigma}_n | 1 \leq n \leq N-1\}$ を

$$\bar{\sigma}_n : (b'_1, b'_2, \ldots, b'_N) \mapsto (b_1, b_2, \ldots, b_N),$$
$$\begin{cases} b_{n+1} &=& \min\{b'_{n+1}, b'_n\}, \\ b_n &=& \max\{b'_{n+1}, b'_n\}, \\ b_m &=& b'_m, \quad (m \neq n, n+1) \end{cases} \tag{18}$$

と定義すると, 変数 $\{Q_1^t, Q_2^t, \ldots, Q_N^t\}$ の値が次のように書ける．

$$\begin{aligned} (Q_1^t, Q_2^t, \ldots, Q_N^t) &= \bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2 \cdot \cdots \cdot \bar{\sigma}_{N-1} (B_1^{t+1}, B_2^{t+1}, \ldots, B_N^{t+1}) \\ &= \bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2 \cdot \cdots \cdot \bar{\sigma}_{N-1} (Q_1^{t+1}, Q_2^{t+1}, \ldots, Q_N^{t+1}), \end{aligned} \tag{19}$$

ここで $(Q_1^{t-1}, Q_2^{t-1}, \ldots, Q_N^{t-1})$ は$\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2 \cdot \cdots \cdot \bar{\sigma}_{N-1} (Q_1^t, Q_2^t, \ldots, Q_N^t)$ と同じ値であるとは限らない．なぜなら変数 $\{E_1^t, E_2^t, \ldots, E_{N-1}^t\}$ の値が条件 $E_m^t = Q_m^t$ を満たすとは限らないからである．

従って代入

$$\bar{\pi}^{t+1} : \begin{cases} Q_1^{t+1} \mapsto B_1^{t+1}, \quad Q_2^{t+1} \mapsto B_2^{t+1}, \quad \cdots, \quad Q_N^{t+1} \mapsto B_N^{t+1}, \\ E_1^{t+1} \mapsto B_1^{t+1}, \quad E_2^{t+1} \mapsto B_2^{t+1}, \quad \cdots, \quad E_{N-1}^{t+1} \mapsto B_{N-1}^{t+1}, \end{cases} \tag{20}$$

のもとで, 式 (11) での変数 $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N)$ の 1 ステップのみ $(t+1 \to t)$ の時間発展は, 次の逆バブルソート方程式の変数 $(B_1, B_2, \ldots, B_N)$ の時間発展と一致する．

$$(B_1^t, B_2^t, \ldots, B_N^t) = \bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2 \cdot \cdots \cdot \bar{\sigma}_{N-1} (B_1^{t+1}, B_2^{t+1}, \ldots, B_N^{t+1}). \tag{21}$$

4 バブルソート方程式の非可逆性

超離散戸田分子方程式の時間発展は可逆であるが, バブルソート方程式と逆バブルソート方程式は非可逆である. 従って式 (10) は式 (11) に書き換えられるが, 式 (16) は決して式 (21) に書き換えられない. このことが後にバブルソート方程式の保存量と逆バブルソート方程式の保存量を別々に考える理由である.

この節ではバブルソート方程式の非可逆性を確認しておく.

まず作用素 $\{R_n(u)|1 \leq n \leq N-1\}$ を次のように定義する.

$$R_n(u) : (a_1, a_2, \dots, a_N) \mapsto (a'_1, a'_2, \dots, a'_N),$$
$$\left\{\begin{array}{rcl} a'_n &=& \min\{a_n + u, a_{n+1}\}, \\ a'_{n+1} &=& \max\{a_n, a_{n+1} - u\}, \\ a'_m &=& a_m, \quad (m \neq n, n+1) \end{array}\right. \tag{22}$$

この作用素は Yang-Baxter 関係式

$$\left\{\begin{array}{l} R_m(u) \cdot R_n(v) = R_n(v) \cdot R_m(u), \quad (2 \leq |m-n|) \\ R_n(u) \cdot R_{n+1}(u+v) \cdot R_n(v) = R_{n+1}(v) \cdot R_n(v+u) \cdot R_{n+1}(u), \end{array}\right. \tag{23}$$

を満たす. 式 (23) は, $\min\{A, B\}$ と $\max\{A, B\}$ を分配束の $A \cap B$ と $A \cup B$ と見なすと証明できる.

作用素 (22) で $u = 0$ と置くと, $\{\sigma_n = R_n(0)|1 \leq n \leq N-1\}$ が組紐関係式

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_m \cdot \sigma_n = \sigma_n \cdot \sigma_m, \quad (2 \leq |m-n|) \\ \sigma_n \cdot \sigma_{n+1} \cdot \sigma_n = \sigma_{n+1} \cdot \sigma_n \cdot \sigma_{n+1}. \end{array}\right. \tag{24}$$

を満たすのは明らか. また, $\{\sigma_n|1 \leq n \leq N-1\}$ は次の関係式（ベキ等律）を満たす（証明は分配束の性質による）.

$$\sigma_n \cdot \sigma_n = \sigma_n, \tag{25}$$

この関係式は, $\{\sigma_n|1 \leq n \leq N-1\}$ のいずれも唯一の逆元を持ち得ないことを示している.

$N = 2$ のときバブルソート方程式は

$$(A_1^{t+1}, A_2^{t+1}) = \sigma_1(A_1^t, A_2^t).$$

である. 式 (25) より

$$\begin{array}{rcl} (A_1^{t+2}, A_2^{t+2}) &=& \sigma_1 \cdot \sigma_1(A_1^t, A_2^t) \\ &=& \sigma_1(A_1^t, A_2^t) \\ &=& (A_1^{t+1}, A_2^{t+1}). \end{array}$$

よって全ての初期値 (A_1^t, A_2^t) に対し

$$(A_1^t, A_2^t) \neq (A_1^{t+1}, A_2^{t+1}) = (A_1^{t+2}, A_2^{t+2}) = (A_1^{t+3}, A_2^{t+3}) = \cdots,$$

であるから非可逆である.

$N = 3$ のとき, バブルソート方程式は

$$(A_1^{t+1}, A_2^{t+1}, A_3^{t+1}) = \sigma_2 \cdot \sigma_1(A_1^t, A_2^t, A_3^t).$$

である. 式 (24) と式 (25) より

$$
\begin{aligned}
(A_1^{t+2}, A_2^{t+2}, A_3^{t+2}) &= (\sigma_2 \cdot \sigma_1) \cdot (\sigma_2 \cdot \sigma_1)(A_1^t, A_2^t, A_3^t) \\
&= (\sigma_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2) \cdot \sigma_1 (A_1^t, A_2^t, A_3^t) \\
&= (\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1) \cdot \sigma_1 (A_1^t, A_2^t, A_3^t) \\
&= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_1)(A_1^t, A_2^t, A_3^t) \\
&= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 (A_1^t, A_2^t, A_3^t), \\
(A_1^{t+3}, A_2^{t+3}, A_3^{t+3}) &= (\sigma_2 \cdot \sigma_1) \cdot (\sigma_2 \cdot \sigma_1) \cdot (\sigma_2 \cdot \sigma_1)(A_1^t, A_2^t, A_3^t) \\
&= (\sigma_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 (A_1^t, A_2^t, A_3^t) \\
&= (\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 (A_1^t, A_2^t, A_3^t) \\
&= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_1) \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 (A_1^t, A_2^t, A_3^t) \\
&= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 (A_1^t, A_2^t, A_3^t) \\
&= \cdots\cdots\cdots \\
&= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 (A_1^t, A_2^t, A_3^t) \\
&= (A_1^{t+2}, A_2^{t+2}, A_3^{t+2}).
\end{aligned}
$$

よって全ての初期値 (A_1^t, A_2^t, A_3^t) に対し

$$
(A_1^t, A_2^t, A_3^t) \neq (A_1^{t+1}, A_2^{t+1}, A_3^{t+1}) \neq (A_1^{t+2}, A_2^{t+2}, A_3^{t+2}) = (A_1^{t+3}, A_2^{t+3}, A_3^{t+3}) = \cdots,
$$

であるから非可逆である.（$N=4$ 以下同様）

5　バブルソート方程式の保存量

両バブルソート方程式の保存量を与えよう. これらの保存量は, 超離散戸田分子方程式で代入写像π^tを施した時の $t \to t+1$ の 1 ステップの保存量, および$\bar{\pi}^{t+1}$を施した時の $t+1 \to t$ の 1 ステップの保存量となる.

まず全ての $\{\sigma_n | 1 \leq n \leq N-1\}$ と $\{\bar{\sigma}_n | 1 \leq n \leq N-1\}$ に対し不変な母関数 G が次で与えられる.

$$
G(\varepsilon; (a_1, a_2, \ldots, a_N)) \equiv \sum_{j=1}^{N} \min\{\varepsilon, a_j\}, \tag{26}
$$

ここで $\{\varepsilon, a_j\}$ は任意の数. また $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ に $\{\sigma_n\}$ および $\{\bar{\sigma}_n\}$ が作用するものとする.

すると確かに

$$
G(\varepsilon; \sigma_n(a_1, a_2, \ldots, a_N)) = G(\varepsilon; (a_1, a_2, \ldots, a_N)),
$$

および

$$
G(\varepsilon; \bar{\sigma}_n(b'_1, b'_2, \ldots, b'_N)) = G(\varepsilon; (b'_1, b'_2, \ldots, b'_N)),
$$

となっている（証略）.

従って

$$
\begin{aligned}
& G(\varepsilon,(A_1^{t+1},A_2^{t+1},\ldots,A_N^{t+1})) \\
= \;& G(\varepsilon,\sigma_{N-1}\cdot\sigma_{N-2}\cdot\cdots\cdot\sigma_1(A_1^t,A_2^t,\ldots,A_N^t)) \\
= \;& G(\varepsilon,\sigma_{N-2}\cdot\cdots\cdot\sigma_1(A_1^t,A_2^t,\ldots,A_N^t)) \\
& \cdots\cdots\cdots \\
= \;& G(\varepsilon,\sigma_1(A_1^t,A_2^t,\ldots,A_N^t)) \\
= \;& G(\varepsilon,(A_1^t,A_2^t,\ldots,A_N^t)),
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
& G(\varepsilon,(B_1^t,B_2^t,\ldots,B_N^t)) \\
= \;& G(\varepsilon,\bar{\sigma}_1\cdot\bar{\sigma}_2\cdot\cdots\cdot\bar{\sigma}_{N-1}(B_1^{t+1},B_2^{t+1},\ldots,B_N^{t+1})) \\
= \;& G(\varepsilon,\bar{\sigma}_2\cdot\cdots\cdot\bar{\sigma}_{N-1}(B_1^{t+1},B_2^{t+1},\ldots,B_N^{t+1})) \\
& \cdots\cdots\cdots \\
= \;& G(\varepsilon,\bar{\sigma}_{N-1}(B_1^{t+1},B_2^{t+1},\ldots,B_N^{t+1})) \\
= \;& G(\varepsilon,(B_1^{t+1},B_2^{t+1},\ldots,B_N^{t+1})),
\end{aligned}
$$

である．これにより G は両バブルソート方程式の時間発展により不変である．

つぎに母関数 G を ε で展開して係数を拾おう．

$$
\begin{aligned}
& G(\varepsilon,(A_1^{t+1},A_2^{t+1},\ldots,A_N^{t+1})) \\
= \;& \sum_{j=1}^{N}\min\{\varepsilon,A_j^t\} \\
= \;& \min_{k=0}^{N}\{k\varepsilon+H_{N-k}^t\} \quad (\ H_0^t=0,\quad H_k^t-H_{k-1}^t\le H_{k+1}^t-H_k^t\ ) \\
= \;& \begin{cases}
N\varepsilon, & (-\infty\le\varepsilon\le H_1^t) \\
(N-1)\varepsilon+H_1^t, & (H_1^t\le\varepsilon\le H_2^t-H_1^t) \\
(N-2)\varepsilon+H_2^t, & (H_2^t-H_1^t\le\varepsilon\le H_3^t-H_2^t) \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
(N-j)\varepsilon+H_j^t, & (H_j^t-H_{j-1}^t\le\varepsilon\le H_{j+1}^t-H_j^t) \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon+H_{N-1}^t, & (H_{N-1}^t-H_{N-2}^t\le\varepsilon\le H_N^t-H_{N-1}^t) \\
H_N^t, & (H_N^t-H_{N-1}^t\le\varepsilon\le\infty)
\end{cases}
\end{aligned} \tag{27}
$$

ここで H_j^t は min-plus 代数での $\{A_1^t,A_2^t,\ldots,A_N^t\}$ に関する j 次の基本対称式である．たとえば $N=2$ では

$$
\begin{aligned}
H_1^t &= \min\{A_1^t,A_2^t\}, \\
H_2^t &= A_1^t+A_2^t,
\end{aligned}
$$

また $N=3$ では，

$$
\begin{aligned}
H_1^t &= \min\{A_1^t,A_2^t,A_3^t\}, \\
H_2^t &= \min\{A_1^t+A_2^t,A_1^t+A_3^t,A_2^t+A_3^t\}, \\
H_3^t &= A_1^t+A_2^t+A_3^t,
\end{aligned}
$$

などである. また $(H_k^t - H_{k-1}^t \leq H_{k+1}^t - H_k^t)$ は min-plus 代数上で母関数の係数を拾うために必要な条件である.

ここで式 (27) の表現より, 次の命題は対偶をとれば明らかである.

$$\begin{aligned} &\forall\varepsilon,\quad G(\varepsilon;(A_1^{t+1},A_2^{t+1},\ldots,A_N^{t+1})) = G(\varepsilon;(A_1^t,A_2^t,\ldots,A_N^t)) \\ &\Longrightarrow\quad 1\leq\forall j\leq N,\quad H_j^{t+1}=H_j^t. \end{aligned}\tag{28}$$

従ってバブルソート方程式の N 個の保存量として $\{H_j^{t+1} = H_j^t | 1 \leq j \leq N\}$ が得られた. 同様に逆バブルソート方程式の N 個の保存量は $\{\bar{H}_j^t = \bar{H}_j^{t+1} | 1 \leq j \leq N\}$ である. ここで $\bar{H}_j^t$ は min-plus 代数での $\{B_1^t, B_2^t, \ldots, B_N^t\}$ に関する j 次の基本対称式である.

6 超離散戸田分子方程式の保存量の構成

π の引き戻しおよび $\bar{\pi}$ の引き戻しを用いて H_j^t および $\bar{H}_j^t$ を変形して, 超離散戸田分子方程式の（任意ステップでの）保存量を構成しよう.

これから構成しようとする保存量を $\{C_1^t, C_2^t, \ldots, C_N^t\}$ と書くことにする. 任意の t に対し次の連立方程式が成り立つとして, これを解くことを考える.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \pi^t(C_j^t) &=& H_j^t, \\ \bar{\pi}^t(C_j^t) &=& \bar{H}_j^t, \\ C_j^{t+1} &=& C_j^t. \end{array}\right.\tag{29}$$

1 番目と二番目の式は保存量の独立性を保証する. 3 番目の式は保存量の定義式である.

式 (29) を次の仮定の下で解こう： C_j^t は $\{Q_j^t, E_k^t\}$ を, $\min\{\cdots\}$ と $+$ でつないで（$-$ を使わないで）表される量である. つまり C_j^t は min-plus 代数上の $\{Q_j^t, E_k^t\}$ に関する多項式である. （この仮定により保存量の候補の集合 $\{f | \pi^t(f) = H_j^t, \bar{\pi}^t(f) = \bar{H}_j^t\}$ は必ず有限集合となる.）

準備として次の記号を導入する.

$$\begin{array}{rcl} A\oplus B &\equiv& \min\{A,B\}, \\ A\otimes B &\equiv& A+B, \\ \langle X_i | i\in\{1,2,\ldots,m\}\rangle = \langle X_1,X_2,\ldots,X_m\rangle &\equiv& \left\{ \bigoplus_{j\in I} X_j \,\middle|\, \emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\ldots,m\} \right\}, \\ \langle A_\lambda|\lambda\in L\rangle\otimes\langle B_\mu|\mu\in M\rangle &\equiv& \langle A_\lambda\otimes B_\mu | \lambda\in L, \mu\in M\rangle, \\ \{A_\lambda|\lambda\in L\}\oplus\{B_\mu|\mu\in M\} &\equiv& \{A_\lambda\oplus B_\mu | \lambda\in L,\mu\in M\}, \end{array}$$

この記号に対し, $\otimes$ と $\oplus$ が結合則・交換則・分配則を満たす. そこで $(A\otimes B)\oplus C \rightarrow A\otimes B\oplus C$ のように（普通の四則演算のように）括弧を省略して書いて良い.

まず式 (10) と式 (11) から

$$\left\{\begin{array}{rcll} q_m^t(1) &=& Q_m^t, & (1 \le m \le N) \\ e_m^t(1) &=& E_m^t, & (1 \le m \le N-1) \\ q_n^t(n+1) &=& q_n^t(n) \oplus e_n^t(n), & \\ q_{n+1}^t(n+1) \oplus e_n^t(n+1) &=& q_{n+1}^t(n), & \\ q_n^t(n+1) \otimes q_{n+1}^t(n+1) &=& q_n^t(n) \otimes q_{n+1}^t(n), & \\ q_m^t(n+1) &=& q_m^t(n), & (m \ne n, n+1) \\ e_m^t(n+1) &=& e_m^t(n), & (m \ne n) \\ Q_m^{t+1} &=& q_m^t(N), & (1 \le m \le N) \\ E_m^{t+1} &=& e_m^t(N), & (1 \le m \le N-1) \end{array}\right. \tag{30}$$

が得られることに注意する.

6.1 Case $N = 2$

$N = 2$ の場合の超離散戸田分子方程式の保存量を構成する. 1 次の保存量は

$$\begin{aligned} \{f | \pi^t(f) = H_1^t\} &= \{f | \pi^t(f) = A_1^t \oplus A_2^t\} \\ &= \left\langle Q_1^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_2^t, E_1^t \right\rangle \\ &= \{Q_1^t \oplus Q_2^t, Q_1^t \oplus E_1^t, Q_1^t \oplus (Q_2^t \oplus E_1^t)\}, \\ \{f | \bar{\pi}^t(f) = \bar{H}_1^t\} &= \{f | \bar{\pi}^t(f) = B_1^t \oplus B_2^t\} \\ &= \left\langle Q_1^t, E_1^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_2^t \right\rangle \\ &= \{Q_1^t \oplus Q_2^t, E_1^t \oplus Q_2^t, (Q_1^t \oplus E_1^t) \oplus Q_2^t\}, \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} C_1^t \in & \quad \{f | \pi^t(f) = H_1^t, \bar{\pi}^t(f) = \bar{H}_1^t\} \\ = & \quad \{f | \pi^t(f) = H_1^t\} \cap \{f | \bar{\pi}^t(f) = \bar{H}_1^t\} \\ = & \quad \{Q_1^t \oplus Q_2^t, Q_1^t \oplus Q_2^t \oplus E_1^t\}, \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} C_1^t &= \min\{f | \pi^t(f) = H_1^t, \bar{\pi}^t(f) = \bar{H}_1^t\} \\ &= Q_1^t \oplus Q_2^t \oplus E_1^t, \end{aligned}$$

と置くと, 式 (30) より

$$\begin{aligned} & Q_1^{t+1} \oplus Q_2^{t+1} \oplus E_1^{t+1} \\ =\ & q_1^t(2) \oplus q_2^t(2) \oplus e_1^t(2) \\ =\ & q_1^t(2) \oplus [q_2^t(2) \oplus e_1^t(2)] \\ =\ & [q_1^t(1) \oplus e_1^t(1)] \oplus q_2^t(1) \\ =\ & q_1^t(1) \oplus q_2^t(1) \oplus e_1^t(1) \\ =\ & Q_1^t \oplus Q_2^t \oplus E_1^t, \end{aligned}$$

となって

$$C_1^{t+1} = C_1^t,$$

である．2 次の保存量は

$$\begin{aligned}\{f|\pi^t(f) = H_2^t\} &= \{f|\pi^t(f) = A_1^t \otimes A_2^t\}\\ &= \left\langle Q_1^t \right\rangle \otimes \left\langle Q_2^t, E_1^t \right\rangle\\ &= \{Q_1^t \otimes Q_2^t, Q_1^t \otimes E_1^t, Q_1^t \otimes (Q_2^t \oplus E_1^t)\},\\ \{f|\bar{\pi}(f) = H_2^t\} &= \{f|\bar{\pi}(f) = B_1^t \otimes B_2^t\}\\ &= \left\langle Q_1^t, E_1^t \right\rangle \otimes \left\langle Q_2^t \right\rangle\\ &= \{Q_1^t \otimes Q_2^t, E_1^t \otimes Q_2^t, (Q_1^t \oplus E_1^t) \otimes Q_2^t\},\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}C_2^t \in\ & \{f|\pi^t(f) = H_2^t, \bar{\pi}^t(f) = \bar{H}_2^t\}\\ =\ & \{f|\pi^t(f) = A_1^t \otimes A_2^t\} \cap \{f|\bar{\pi}^t(f) = B_1^t \otimes B_2^t\}\\ =\ & \{Q_1^t \otimes Q_2^t\},\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}C_2^t &= \min\{f|\pi^t(f) = H_2^t, \bar{\pi}^t(f) = \bar{H}_2^t\}\\ &= Q_1^t \otimes Q_2^t,\end{aligned}$$

と置くと, 式 (30) より

$$\begin{aligned}& Q_1^{t+1} \otimes Q_2^{t+1}\\ =\ & q_1^t(2) \otimes q_2^t(2)\\ =\ & q_1^t(1) \otimes q_2^t(1)\\ =\ & Q_1^t \otimes Q_2^t,\end{aligned}$$

となって

$$C_2^{t+1} = C_2^t,$$

である．

6.2 Case $N = 3$

$N = 3$ の場合の超離散戸田分子方程式の保存量を構成する．1 次の保存量は

$$\begin{aligned}\{f|\pi^t(f) = H_1^t\} =\ & \{f|\pi^t(f) = A_1^t \oplus A_2^t \oplus A_3^t\}\\ =\ & \left\langle Q_1^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_2^t, E_1^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_3^t, E_2^t \right\rangle\\ =\ & \left\{\begin{array}{l} Q_1^t \oplus Q_2^t \oplus Q_3^t, Q_1^t \oplus E_1^t \oplus Q_3^t, Q_1^t \oplus Q_2^t \oplus E_2^t, Q_1^t \oplus E_1^t \oplus E_2^t,\\ Q_1^t \oplus (Q_2^t \oplus E_1^t) \oplus Q_3^t, Q_1^t \oplus (Q_2^t \oplus E_1^t) \oplus E_2^t,\\ Q_1^t \oplus Q_2^t \oplus (Q_3^t \oplus E_2^t), Q_1^t \oplus E_1^t \oplus (Q_3^t \oplus E_2^t),\\ Q_1^t \oplus (Q_2^t \oplus E_1^t) \oplus (Q_3^t \oplus E_2^t) \end{array}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{f|\bar\pi^t(f)=\bar H_1^t\} =& \{f|\bar\pi^t(f)=B_1^t\oplus B_2^t\oplus B_3^t\}\\ =& \left\langle Q_1^t,E_1^t\right\rangle\oplus\left\langle Q_2^t,E_2^t\right\rangle\oplus\left\langle Q_3^t\right\rangle\\ =& \left\{\begin{array}{l} Q_1^t\oplus Q_2^t\oplus Q_3^t, E_1^t\oplus Q_2^t\oplus Q_3^t, Q_1^t\oplus E_2^t\oplus Q_3^t, E_1^t\oplus E_2^t\oplus Q_3^t,\\ (Q_1^t\oplus E_1^t)\oplus Q_2^t\oplus Q_3^t,(Q_1^t\oplus E_1^t)\oplus E_2^t\oplus Q_3^t,\\ Q_1^t\oplus(Q_2^t\oplus E_2^t)\oplus Q_3^t, E_1^t\oplus(Q_2^t\oplus E_2^t)\oplus Q_3^t,\\ (Q_1^t\oplus E_1^t)\oplus(Q_2^t\oplus E_2^t)\oplus Q_3^t\end{array}\right\},\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}C_1^t\in& \{f|\pi^t(f)=H_1^t,\bar\pi^t(f)=\bar H_1^t\}\\ =& \{f|\pi^t(f)=A_1^t\oplus A_2^t\oplus A_3^t\}\cap\{f|\bar\pi^t(f)=B_1^t\oplus B_2^t\oplus B_3^t\}\\ =& \left\{\begin{array}{l} Q_1^t\oplus Q_2^t\oplus Q_3^t, Q_1^t\oplus Q_2^t\oplus Q_3^t\oplus E_1^t,\\ Q_1^t\oplus Q_2^t\oplus Q_3^t\oplus E_2^t, Q_1^t\oplus Q_3^t\oplus E_1^t\oplus E_2^t,\\ Q_1^t\oplus Q_2^t\oplus Q_3^t\oplus E_1^t\oplus E_2^t\end{array}\right\},\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}C_1^t =& \min\{f|\pi^t(f)=H_1^t,\bar\pi^t(f)=\bar H_1^t\}\\ =& Q_1^t\oplus Q_2^t\oplus Q_3^t\oplus E_1^t\oplus E_2^t,\end{aligned}$$

と置くと, 式 (30) より

$$\begin{aligned}& Q_1^{t+1}\oplus Q_2^{t+1}\oplus Q_3^{t+1}\oplus E_1^{t+1}\oplus E_2^{t+1}\\ =& q_1^t(3)\oplus q_2^t(3)\oplus q_3^t(3)\oplus e_1^t(3)\oplus e_2^t(3)\\ =& q_1^t(3)\oplus q_2^t(3)\oplus[q_3^t(3)\oplus e_2^t(3)]\oplus e_1^t(3)\\ =& q_1^t(2)\oplus[q_2^t(2)\oplus e_2^t(2)]\oplus q_3^t(2)\oplus e_1^t(2)\\ =& q_1^t(2)\oplus q_2^t(2)\oplus q_3^t(2)\oplus e_1^t(2)\oplus e_2^t(2)\\ =& q_1^t(2)\oplus[q_2^t(2)\oplus e_1^t(2)]\oplus q_3^t(2)\oplus e_2^t(2)\\ =& [q_1^t(1)\oplus e_1^t(1)]\oplus q_2^t(1)\oplus q_3^t(1)\oplus e_2^t(1)\\ =& q_1^t(1)\oplus q_2^t(1)\oplus q_3^t(1)\oplus e_1^t(1)\oplus e_2^t(1)\\ =& Q_1^t\oplus Q_2^t\oplus Q_3^t\oplus E_1^t\oplus E_2^t,\end{aligned}$$

となって

$$C_1^{t+1}=C_1^t,$$

である. 2 次の保存量は

$$\begin{aligned}& \{f|\pi^t(f)=H_2^t\}\\ =& \{f|\pi^t(f)=A_1^t\otimes A_2^t\oplus A_1^t\otimes A_3^t\oplus A_2^t\otimes A_3^t\}\\ =& \left\langle Q_1^t\right\rangle\otimes\left\langle Q_2^t,E_1^t\right\rangle\oplus\left\langle Q_1^t\right\rangle\otimes\left\langle Q_3^t,E_2^t\right\rangle\oplus\left\langle Q_2^t,E_1^t\right\rangle\otimes\left\langle Q_3^t,E_2^t\right\rangle\\ =& \left\langle Q_1^t\otimes Q_2^t,Q_1^t\otimes E_1^t\right\rangle\oplus\left\langle Q_1^t\otimes Q_3^t,Q_1^t\otimes E_2^t\right\rangle\oplus\left\langle Q_2^t\otimes Q_3^t,E_1^t\otimes Q_3^t,Q_2^t\otimes E_2^t,E_1^t\otimes E_2^t\right\rangle,\\ & \{f|\bar\pi^t(f)=\bar H_2^t\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{f|\bar{\pi}^t(f) = B_1^t \otimes B_2^t \oplus B_1^t \otimes B_3^t \oplus B_2^t \otimes B_3^t\} \\
&= \left\langle Q_1^t, E_1^t \right\rangle \otimes \left\langle Q_2^t, E_2^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_1^t, E_1^t \right\rangle \otimes \left\langle Q_3^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_2^t, E_2^t \right\rangle \otimes \left\langle Q_3^t \right\rangle \\
&= \left\langle Q_1^t \otimes Q_2^t, E_1^t \otimes Q_2^t, Q_1^t \otimes E_2^t, E_1^t \otimes E_2^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_1^t \otimes Q_3^t, E_1^t \otimes Q_3^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_2^t \otimes Q_3^t, E_2^t \otimes Q_3^t \right\rangle,
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
C_2^t \in\ & \{f|\pi^t(f) = H_2^t, \bar{\pi}^t(f) = \bar{H}_2^t\} \\
=\ & \{f|\pi^t(f) = H_2^t\} \cap \{f|\bar{\pi}^t(f) = \bar{H}_2^t\} \\
=\ & \left\langle Q_1^t \otimes Q_2^t, Q_1^t \otimes E_1^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_1^t \otimes Q_3^t, Q_1^t \otimes E_2^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_2^t \otimes Q_3^t, E_1^t \otimes Q_3^t, Q_2^t \otimes E_2^t, E_1^t \otimes E_2^t \right\rangle \\
& \cap \left\langle Q_1^t \otimes Q_2^t, E_1^t \otimes Q_2^t, Q_1^t \otimes E_2^t, E_1^t \otimes E_2^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_1^t \otimes Q_3^t, E_1^t \otimes Q_3^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_2^t \otimes Q_3^t, E_2^t \otimes Q_3^t \right\rangle \\
=\ & \left\langle Q_1^t \otimes Q_2^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_1^t \otimes Q_3^t, Q_1^t \otimes E_2^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_2^t \otimes Q_3^t, E_1^t \otimes Q_3^t, E_1^t \otimes E_2^t \right\rangle \\
& \cap \left\langle Q_1^t \otimes Q_2^t, Q_1^t \otimes E_2^t, E_1^t \otimes E_2^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_1^t \otimes Q_3^t, E_1^t \otimes Q_3^t \right\rangle \oplus \left\langle Q_2^t \otimes Q_3^t \right\rangle,
\end{aligned}
$$

であり

$$
\begin{aligned}
C_2^t &= \min\{f|\pi^t(f) = H_2^t, \bar{\pi}^t(f) = \bar{H}_2^t\} \\
&= Q_1^t \otimes Q_2^t \oplus Q_1^t \otimes Q_3^t \oplus Q_2^t \otimes Q_3^t \oplus Q_1^t \otimes E_2^t \oplus Q_3^t \otimes E_1^t \oplus E_1^t \otimes E_2^t,
\end{aligned}
$$

と置くと, 式 (30) より

$$
\begin{aligned}
& Q_1^{t+1} \otimes Q_2^{t+1} \oplus Q_1^{t+1} \otimes Q_3^{t+1} \oplus Q_2^{t+1} \otimes Q_3^{t+1} \oplus Q_1^{t+1} \otimes E_2^{t+1} \oplus Q_3^{t+1} \otimes E_1^{t+1} \oplus E_1^{t+1} \otimes E_2^{t+1} \\
=\ & q_1^t(3) \otimes q_2^t(3) \oplus q_1^t(3) \otimes q_3^t(3) \oplus [q_2^t(3) \otimes q_3^t(3)] \oplus q_1^t(3) \otimes e_2^t(3) \oplus q_3^t(3) \otimes e_1^t(3) \oplus e_1^t(3) \otimes e_2^t(3) \\
=\ & q_1^t(2) \otimes q_2^t(3) \oplus q_1^t(2) \otimes q_3^t(3) \oplus q_2^t(2) \otimes q_3^t(2) \oplus q_1^t(2) \otimes e_2^t(3) \oplus q_3^t(3) \otimes e_1^t(2) \oplus e_1^t(2) \otimes e_2^t(3) \\
=\ & q_1^t(2) \otimes \{[q_2^t(3) \oplus e_2^t(3)] \oplus q_3^t(3)\} \oplus q_2^t(2) \otimes q_3^t(2) \oplus [q_3^t(3) \oplus e_2^t(3)] \otimes e_1^t(2) \\
=\ & q_1^t(2) \otimes \{q_2^t(2) \oplus [q_3^t(2) \oplus e_2^t(2)]\} \oplus q_2^t(2) \otimes q_3^t(2) \oplus q_3^t(2) \otimes e_1^t(2) \\
=\ & [q_1^t(2) \otimes q_2^t(2)] \oplus q_1^t(2) \otimes q_3^t(2) \oplus q_2^t(2) \otimes q_3^t(2) \oplus q_1^t(2) \otimes e_2^t(2) \oplus q_3^t(2) \otimes e_1^t(2) \\
=\ & q_1^t(1) \otimes q_2^t(1) \oplus q_1^t(2) \otimes q_3^t(2) \oplus q_2^t(2) \otimes q_3^t(1) \oplus q_1^t(2) \otimes e_2^t(1) \oplus q_3^t(1) \otimes e_1^t(2) \\
=\ & q_1^t(1) \otimes q_2^t(1) \oplus \{q_1^t(2) \oplus [q_2^t(2) \oplus e_1^t(2)]\} \otimes q_3^t(1) \oplus q_1^t(2) \otimes e_2^t(1) \\
=\ & q_1^t(1) \otimes q_2^t(1) \oplus \{[q_1^t(1) \oplus e_1^t(1)] \oplus q_2^t(1)\} \otimes q_3^t(1) \oplus [q_1^t(1) \oplus e_1^t(1)] \otimes e_2^t(1) \\
=\ & q_1^t(1) \otimes q_2^t(1) \oplus q_1^t(1) \otimes q_3^t(1) \oplus q_2^t(1) \otimes q_3^t(1) \oplus q_1^t(1) \otimes e_2^t(1) \oplus q_3^t(1) \otimes e_1^t(1) \oplus e_1^t(1) \otimes e_2^t(1) \\
=\ & Q_1^t \otimes Q_2^t \oplus Q_1^t \otimes Q_3^t \oplus Q_2^t \otimes Q_3^t \oplus Q_1^t \otimes E_2^t \oplus Q_3^t \otimes E_1^t \oplus E_1^t \otimes E_2^t,
\end{aligned}
$$

となって

$$
C_2^{t+1} = C_2^t,
$$

である．3 次の保存量は

$$
\begin{aligned}
C_3^t \in\ & \{f|\pi^t(f) = H_3^t, \bar{\pi}^t(f) = \bar{H}_3^t\} \\
=\ & \{f|\pi^t(f) = A_1^t \otimes A_2^t \otimes A_3^t\} \cap \{f|\bar{\pi}^t(f) = B_1^t \otimes B_2^t \otimes B_3^t\} \\
=\ & \left\langle Q_1^t \right\rangle \otimes \left\langle Q_2^t, E_1^t \right\rangle \otimes \left\langle Q_3^t, E_2^t \right\rangle \cap \left\langle Q_1^t, E_1^t \right\rangle \otimes \left\langle Q_2^t, E_2^t \right\rangle \otimes \left\langle Q_3^t \right\rangle \\
=\ & \{Q_1^t \otimes Q_2^t \otimes Q_3^t\},
\end{aligned}
$$

より

$$\begin{aligned} C_3^t &= \min\{f|\pi^t(f) = H_3^t, \bar{\pi}^t(f) = \bar{H}_3^t\} \\ &= Q_1^t \otimes Q_2^t \otimes Q_3^t, \end{aligned}$$

と置くと, 式 (30) より

$$\begin{aligned} & Q_1^{t+1} \otimes Q_2^{t+1} \otimes Q_3^{t+1} \\ = \;& q_1^t(3) \otimes q_2^t(3) \otimes q_3^t(3) \\ = \;& q_1^t(2) \otimes [q_2^t(3) \otimes q_3^t(3)] \\ = \;& q_1^t(2) \otimes q_2^t(2) \otimes q_3^t(2) \\ = \;& [q_1^t(2) \otimes q_2^t(2)] \otimes q_3^t(1) \\ = \;& q_1^t(1) \otimes q_2^t(1) \otimes q_3^t(1) \\ = \;& Q_1^t \otimes Q_2^t \otimes Q_3^t, \end{aligned}$$

となって

$$C_3^{t+1} = C_3^t,$$

である.

注目すべき事柄として以上の全ての保存量が次の形で表される.

$$C_j^t = \min\{f|\pi^t(f) = H_j^t, \bar{\pi}^t(f) = \bar{H}_j^t\}, \tag{31}$$

(for $1 \leq j \leq N$ (N=2,3))

7 まとめ

超離散戸田分子方程式の保存量を, 超離散化の手続きを使わずに構成することを試みた. ここに得られた全ての保存量が式 (31) という非常に簡明な式で表されることは興味深い. 一般的な N について, また他の超離散可積分系については今後の課題としたい.

参考文献

[1] D. Takahashi and J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3514.

[2] R. Hirota, S. Tsujimoto: J. Phys. Soc. Jpn. **64** (1995) 3125.

[3] A. Nagai, T. Tokihiro and J. Satsuma: Phys. Lett. A **244** (1998) 383.

[4] A. Nagai, D. Takahashi and T. Tokihiro: Phys. Lett. A **255** (1999) 265.